Matemática

1

MANOEL PAIVA

EDITORA MODERNA

EDITORA MODERNA

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Ana Maria Onofre
Dalva F. N. Muramatsu
José Luís Carvalho da Cruz
Ricardo Seballos

PREPARAÇÃO DO TEXTO
Sérgio Roberto Torres

EDIÇÃO DE ARTE
Marcel Destailleur

CAPA
Anne Marie Bardot
Foto: "Borboleta e Orquídea
(imagens infinitas)" © Fleming & Parker/
SPL-Stock Photos

PESQUISA ICONOGRÁFICA
Sérgio Scazufca

GRÁFICOS
Sidnei Moura

ILUSTRAÇÕES
Paulo Manzi

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
Formato Produções Gráficas Ltda.

COORDENAÇÃO DO PCP
Fernando Dalto Degan

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel Rodrigues, 1950 -
Matemática / Manoel Rodrigues Paiva. – São Paulo :
Moderna, 1995.

Obra em 3 volumes.
Suplementado por guia do mestre.

1. Matemática (2º grau) 2. Matemática (2º grau) -- Problemas, exercícios, etc. 3. Matemática (Vestibular) I. Título.

95-0798 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 2º grau 510.7

ISBN 85-16-01169-0

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tel.: 822-5099
CEP 0451[illegible]901 - São Paulo - SP - Brasil
1995

Impresso no Brasil

3 5 7 9 10 8 6 4 2

Av. Duque de Caxias – 6468
Tel. 3225-1181

Tony
aluno

Eq. 2º grau (p. 187, 180)

JAVA 1001 DICAS P/ PROGRAMAÇÃO.

Sumário

Capítulo 0 – Noções básicas de lógica 1

1. Introdução, 1. **2.** Proposição, 1. **3.** Sentença aberta, 2. **4.** Conectivo, 2. **5.** Implicação lógica, 4. **6.** Equivalência lógica, 4. **7.** Quantificadores, 5. **8.** Negação de uma proposição contendo quantificador, 7.

Capítulo 1 – Conjuntos, subconjuntos e suas representações 9

1. Introdução, 9. **2.** Conceitos primitivos, 9. **3.** Representação de um conjunto – relação de pertinência, 10. **4.** Tipos de conjunto, 11. **5.** Conjunto universo (U), 12. **6.** Subconjunto, 12.

Capítulo 2 – Conjuntos cujos elementos são conjuntos 20

1. Introdução, 20. **2.** Conjunto das partes de um conjunto, 20.

Capítulo 3 – União e intersecção de conjuntos 25

1. Introdução, 25. **2.** União (ou reunião) de conjuntos, 25. **3.** Intersecção de conjuntos, 26.

Capítulo 4 – Conjunto diferença 33

1. Conceituação, 33. **2.** Conjunto complementar, 35.

Capítulo 5 – Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos 41

Capítulo 6 – Classificação dos números 46

1. Introdução, 46. **2.** Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), 46. **3.** Conjuntos dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), 47. **4.** O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$), 49.

Capítulo 7 – Os números reais 57

1. Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{Q}'$), 57. **2.** Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), 59.

Capítulo 8 – O eixo real 65

1. Conceituação, 65. **2.** Intervalos reais, 66.

Capítulo 9 – O plano cartesiano 75

1. Introdução, 75. **2.** Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, 75. **3.** Par ordenado, 77.

Capítulo 10 – Produto cartesiano 82

1. Conceituação, 82.

Capítulo 11 – Relação 88

1. Conceituação, 88.

Capítulo 12 – Domínio e imagem de uma relação 93

1. Conceituação, 93.

Capítulo 13 – Função 98

1. Introdução, 98. **2.** Formalização do conceito de função, 99.

Capítulo 14 – Imagem de um elemento através de uma função 103

1. Imagem de um elemento através do diagrama de flechas, 103. **2.** Imagem de um elemento através da lei $y = f(x)$, 103. **3.** Imagem de um elemento através do gráfico de uma função, 104.

Capítulo 15 – Estudo dos gráficos 113

1. Introdução, 113. **2.** Análise gráfica – reconhecimento de uma função, 113.

Capítulo 16 – Função real de variável real 123

1. Conceituação, 123.

Capítulo 17 – Função constante, crescente ou decrescente 128
1. Raiz de uma função, 128. 2. Função constante, 128. 3. Função crescente e função decrescente, 129.

Capítulo 18 – Função afim ou do 1º grau 135
1. Conceituação, 135. 2. Gráfico de uma função do 1º grau, 138.

Capítulo 19 – Variação de sinal da função do 1º grau 144
1. Introdução, 144. 2. Estudo genérico da variação da função do 1º grau $f(x) = ax + b$, 145.

Capítulo 20 – Inequação produto e inequação quociente 154
1. Introdução, 154. 2. Inequação produto, 154. 3. Inequação quociente, 157.

Capítulo 21 – Função quadrática ou do 2º grau 165
1. A parábola, 165. 2. A parábola como gráfico de uma função, 166. 3. Gráfico de uma função do 2º grau, 167. 4. Pontos notáveis da parábola, 168.

Capítulo 22 – Máximo e mínimo de uma função 182
1. Valor máximo de uma função, 182. 2. Valor mínimo de uma função, 183.

Capítulo 23 – Variação de sinal de uma função do 2º grau 190
1. Conceituação, 190. 2. Generalização, 191. 3. Inequação do 2º grau, 193.

Capítulo 24 – Aplicação das funções do 2º grau na resolução de uma inequação produto ou de uma inequação quociente 197

Capítulo 25 – Função definida por mais de uma sentença 207
1. Conceituação, 207.

Capítulo 26 – O conceito de módulo 213
1. Distância entre dois pontos do eixo real, 213. 2. Módulo de um número real, 214. 3. Propriedades dos módulos, 215.

Capítulo 27 – Função modular 219
1. Conceituação, 219.

Capítulo 28 – Técnicas para construção de gráficos de funções modulares 228
1. Conceituação, 228.

Capítulo 29 – Equações modulares 235
1. Equações do tipo $|f(x)| = |g(x)|$, 235. 2. Equações do tipo $|f(x)| = t(x)$, em que $t(x)$ é uma função que não apresenta módulo, 235. 3. Equações do tipo $|f(x)| \pm |g(x)| \pm \ldots \pm |h(x)| = t(x)$, 236.

Capítulo 30 – Desigualdades e módulos 240
1. Propriedades, 240. 2. Inequações modulares, 241.

Capítulo 31 – Composição de funções 246
1. Conceituação, 246.

Capítulo 32 – Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras 252
1. Funções sobrejetoras, 252. 2. Funções injetoras, 252. 3. Funções bijetoras, 253. 4. Classificação de uma função através do gráfico, 254. 5. Classificação de uma função f através da lei de associação $y = f(x)$, 256.

Capítulo 33 – Conceito de funções inversas 260
1. Introdução, 260. 2. Relações inversas, 261. 3. Funções inversas, 262. 4. Condição necessária e suficiente para que uma função seja invertível, 263. 5. Técnica para a obtenção da inversa de uma função, 265. 6. Pontos simétricos em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares, 268. 7. Gráficos de funções inversas, 269.

Capítulo 34 – Potenciação em $\mathbb{R}$ (revisão) 273

1. Potência de base real e expoente inteiro, 273. 2. Propriedades das potências de expoentes inteiros, 274.

Capítulo 35 – Radiciação em $\mathbb{R}$ (revisão) 276

1. Radiciação em $\mathbb{R}$, 276. 2. Propriedades dos radicais, 276. 3. Simplificação de radicais, 277. 4. Operações com radicais, 278. 5. Potência de expoente racional, 278. 6. Propriedades das potências de expoentes racionais, 279. 7. Potência de expoente irracional, 280. 8. Propriedades das potências de expoentes irracionais, 281.

Capítulo 36 – Função exponencial 283

1. Conceituação, 283. 2. Propriedades da função exponencial, 285. 3. Equação exponencial, 286.

Capítulo 37 – Inequação exponencial 290

1. Conceituação, 290. 2. Resolução de uma inequação exponencial, 290.

Capítulo 38 – Teoria dos logaritmos — o porquê dos logaritmos 294

1. Princípios básicos, 294. 2. Logaritmo, 294. 3. Propriedades dos logaritmos, 296.

Capítulo 39 – Outras propriedades dos logaritmos 300

1. Apresentação, 300.

Capítulo 40 – Função logarítmica 305

1. Introdução, 305. 2. Propriedades da função logarítmica, 307.

Capítulo 41 – Equação logarítmica 310

1. Conceituação, 310. 2. Resolução de uma equação logarítmica, 310.

Capítulo 42 – Inequação logarítmica 315

1. Conceituação, 315. 2. Resolução de uma inequação logarítmica, 315.

Capítulo 43 – Logaritmos decimais 321

1. A tábua de logaritmos, 321. 2. Uso da tábua de logaritmos, 321.

Capítulo 44 – Cálculo de logaritmos não-tabelados 326

1. Propriedade fundamental da mantissa, 326. 2. Interpolação logarítmica, 327. 3. Tábua de logaritmos decimais, 330.

Capítulo 45 – Conceito de ângulo 336

1. Semiplano, 336. 2. Ângulo geométrico, 336. 3. Ângulo replementar de um ângulo geométrico, 337. 4. Ângulo raso, 338. 5. Ângulo de uma volta e ângulo nulo, 338. 6. O grau, unidade de medida de arco e ângulo, 338. 7. Operações com medidas em graus, minutos e segundos, 340.

Capítulo 46 – Generalidades sobre ângulos 346

1. Ângulo reto, 346. 2. Ângulo agudo, 346. 3. Ângulo obtuso, 346. 4. Ângulos complementares, 347. 5. Ângulos suplementares, 347. 6. Ângulos adjacentes, 347. 7. Ângulos opostos pelo vértice, 347. 8. Bissetriz de um ângulo, 348. 9. Retas perpendiculares, 348.

Capítulo 47 – Trigonometria no triângulo retângulo 351

1. Introdução, 351. 2. Seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo, 352.

Capítulo 48 – Dois teoremas importantes 359

1. Relação entre o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo, 359. 2. Ângulos complementares, 360.

Capítulo 49 – A trigonometria e o teorema de Pitágoras 364

1. Aplicações, 364.

Capítulo 50 – Cálculos de alguns senos, co-senos e tangentes 368

1. Ângulos notáveis, 368.

Capítulo 51 – Unidades de medida de arcos e ângulos 375
1. O número π (pi), 375. **2.** O radiano, unidade de medida de arco e ângulo, 376. **3.** A medida da circunferência em radianos, 377. **4.** Medidas equivalentes, 378. **5.** Transformações de unidades, 378.

Capítulo 52 – O sistema trigonométrico 382
1. Introdução, 382. **2.** Circunferência trigonométrica, 382. **3.** Arcos trigonométricos, 383. **4.** Simetrias, 385.

Capítulo 53 – Seno e co-seno de um arco trigonométrico 390
1. Extensões dos conceitos de seno e co-seno, 390. **2.** Variação de sinal do seno e do co-seno, 391. **3.** Redução ao 1º quadrante, 392.

Capítulo 54 – Redução ao 1º quadrante (generalização) 397
1. Arcos de medidas α, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$, 397. **2.** Arcos de medidas opostas (α e $-\alpha$), 398. **3.** Arcos de medidas α, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ e $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, 398.

Capítulo 55 – Relação entre o seno e o co-seno de um mesmo arco 403
1. Relação fundamental da trigonometria, 403.

Capítulo 56 – Equações trigonométricas em seno ou co-seno 407
1. Conceituação de equação trigonométrica, 407. **2.** Resolução de uma equação trigonométrica, 407. **3.** Equações imediatas em seno ou co-seno, 407. **4.** Método gráfico para a resolução de uma equação imediata, 408.

Capítulo 57 – Equações na forma fatorada 412
1. Propriedade do produto nulo, 412.

Capítulo 58 – Resolução de equações trigonométricas através de equações polinomiais 415
1. Equação polinomial, 415.

Capítulo 59 – Inequações trigonométricas em seno ou co-seno 418
1. Inequações imediatas em seno ou co-seno, 418. **2.** Sistema de inequações trigonométricas em uma incógnita, 420.

Capítulo 60 – Resolução de inequações trigonométricas através de inequações polinomiais 423
1. Inequação polinomial, 423.

Capítulo 61 – Inequações produto e inequações quociente em seno ou co-seno 427
1. Técnicas de resolução, 427.

Capítulo 62 – Tangente de um arco trigonométrico 431
1. Extensão do conceito de tangente, 431. **2.** Redução ao 1º quadrante, 434. **3.** Arcos de medidas opostas (α e $-\alpha$), 436.

Capítulo 63 – Equações trigonométricas em tangente 439
1. Equações imediatas em tangente, 439.

Capítulo 64 – Inequações trigonométricas em tangente 443
1. Inequações imediatas em tangente, 443.

Capítulo 65 – As razões recíprocas do seno, do co-seno e da tangente 446
1. Co-tangente, secante e co-secante de um arco trigonométrico, 446.

Capítulo 66 – Identidades 457
1. Identidade em uma variável, 457. **2.** Técnicas para demonstração de identidades, 458.

Capítulo 67 – Identidades notáveis 461

1. Aplicação de identidades na resolução de problemas, 461.

Capítulo 68 – Girando as infinitas voltas da circunferência trigonométrica 464

1. Introdução, 464. 2. Progressão aritmética, 464. 3. Expressão geral das medidas de um arco, 465. 4. Aplicação do conjunto dos números reais (ℝ) sobre o conjunto de pontos da circunferência trigonométrica, 467. 5. Resolução de uma equação trigonométrica em ℝ, 469.

Capítulo 69 – Ampliação do conceito de expressão geral das medidas de arcos 473

1. Pontos simétricos em relação à origem do sistema, 473. 2. Pontos que dividem a circunferência trigonométrica em arcos de mesma medida, 475.

Capítulo 70 – Inequações trigonométricas com universo ℝ 479

1. Resolução de uma inequação trigonométrica em ℝ, 479.

Capítulo 71 – Fórmulas de adição de arcos para o seno e o co-seno 484

1. Seno e co-seno dos arcos de medidas $a + b$ e $a - b$, 484.

Capítulo 72 – Fórmulas de adição de arcos para a tangente 491

1. Tangente dos arcos de medidas $a + b$ e $a - b$, 491.

Capítulo 73 – Fórmulas de arco duplo para o seno e co-seno 494

1. Seno e co-seno do arco duplo, 494.

Capítulo 74 – Fórmula de arco duplo para a tangente 498

1. Tangente do arco duplo, 498.

Capítulo 75 – Fórmulas do arco triplo 501

1. Seno e co-seno do arco triplo, 501.

Capítulo 76 – Fórmulas do arco metade 503

1. Seno, co-seno e tangente do arco metade, 503.

Capítulo 77 – Equações trigonométricas com arcos da forma $ax + b$ 507

1. Técnica de resolução, 507.

Capítulo 78 – Inequações trigonométricas com arcos da forma $ax + b$ 512

1. Técnica de resolução, 512.

Capítulo 79 – Fatoração de expressões trigonométricas em seno e co-seno – fórmulas de prostaférese 515

1. Fórmulas de transformação em produto, 515.

Capítulo 80 – Equações trigonométricas na forma fatorada 518

1. Resolução de equações através das fórmulas de transformação em produto, 518.

Capítulo 81 – Fatoração de expressões trigonométricas em tangente 521

1. Fórmulas de transformação em produto, 521.

Capítulo 82 – A função seno 523

1. Conceituação, 523. 2. Gráfico da função $y = \text{sen}\, x$, 523.

Capítulo 83 – A função co-seno 530

1. Conceituação, 530. 2. Gráfico da função $y = \cos x$, 530.

Capítulo 84 – Outras funções trigonométricas 535

1. Função tangente, 535. 2. Função co-tangente, 538. 3. Função co-secante, 540. 4. Função secante, 542.

Capítulo 85 – Funções periódicas 547
1. Períodos de funções trigonométricas, 547.

Capítulo 86 – A inversa da função seno 551
1. Relação arco-seno, 551. 2. Função arco-seno, 552.

Capítulo 87 – A inversa da função co-seno 557
1. Relação arco-co-seno, 557. 2. Função arco-co-seno, 558.

Capítulo 88 – A inversa da função tangente 563
1. Relação arco-tangente, 563. 2. Função arco-tangente, 564.

Capítulo 89 – Gráficos das funções trigonométricas inversas 568
1. Função arco-seno, 568. 2. Função arco-co-seno, 568. 3. Função arco-tangente, 569.

Capítulo 90 – Lei dos co-senos 573
1. Aplicação do co-seno na resolução de triângulos, 573.

Capítulo 91 – Lei dos senos 578
1. Aplicação do seno em resolução de triângulos, 578.

Respostas 585

Capítulo 0

Noções básicas de lógica

1. Introdução

A lógica está de tal modo incrustada na matemática que às vezes ambas se fundem numa só estrutura. A matemática necessita da lógica para suas definições, postulados e teoremas.

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos de lógica que serão utilizados nos três volumes desta obra.

2. Proposição

Proposição é toda expressão que encerra um pensamento de sentido completo e pode ser classificada como V (verdadeira) ou F (falsa).

Indicaremos as proposições por letras minúsculas: *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, ...

Exemplos

a) *p*: O Sol é uma estrela. (V)   b) *q*: Todo ser vivo é mamífero. (F)   c) *r*: $5 + 3 = 7$ (F)

Os símbolos V ou F são chamados de **valores lógicos**.

2.1. Princípios básicos das proposições

I. Princípio da não-contradição:

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.

II. Princípio do terceiro excluído:

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa; não existe um terceiro valor lógico.

2.2. Negação de uma proposição

Dada uma proposição *p*, a negação de *p* será indicada por ~*p* (lê-se "não *p*").

A proposição $\sim p$ será falsa se p for verdadeira; ou será verdadeira se p for falsa. Podemos representar os valores de p e $\sim p$ através da tabela ao lado, chamada de **tabela verdade**.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Exemplos

a) p: $8 \neq 5$ **(V)** $\sim p$: $8 = 5$ **(F)**

b) p: $5 < 3$ **(F)** $\sim p$: $5 \geqslant 3$ **(V)**

3. Sentença aberta

Considere as seguintes afirmações:

a) p: "$x + 5 = 8$" e b) q: "Fulano é jogador da seleção brasileira de futebol".

Qual é o valor lógico, V ou F, de cada uma dessas afirmações?

Nenhuma delas pode ser classificada como V ou F, pois nos faltam informações a respeito do x e do "Fulano". Afirmações desse tipo são chamadas de **sentenças abertas**.

> Sentença aberta é toda expressão que encerra um pensamento de sentido completo mas **não** pode ser classificada como V ou F.

Toda sentença aberta possui pelo menos um termo **variável**, ou seja, um termo que pode assumir mais de um valor.

Exemplos

a) Na sentença "$x + 5 = 8$", a variável é x, pois podemos atribuir infinitos valores a x. Apenas um desses infinitos valores transforma a **sentença aberta** numa **proposição** verdadeira.

b) Na sentença "Fulano é jogador da seleção brasileira de futebol", a variável é "Fulano", pois podemos substituí-lo por um nome qualquer. Porém, para que a proposição obtida seja verdadeira, a variável deve ser substituída pelo nome de um jogador da seleção brasileira de futebol.

4. Conectivo

É uma expressão que une duas proposições dando origem a uma outra proposição.

Estudaremos os seguintes conectivos:

I. **e** (∧); II. **ou** (∨); III. **se ..., então** (→); IV. **se, e somente se** (↔).

I. Dadas duas proposições p e q, chama-se "conjunção de p e q" a proposição "$p \wedge q$" (lê-se "p e q"). A conjunção $p \wedge q$ será verdadeira quando p e q forem ambas verdadeiras; e será falsa nos outros casos.

Representando na tabela verdade, temos:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos

a) $\underbrace{5 > 3}_{\text{V}} \wedge \underbrace{6 = 5 + 1}_{\text{V}}$ **(V)**

c) $\underbrace{\text{A Lua é uma estrela}}_{\text{F}}$ e $\underbrace{\text{o Sol é uma estrela.}}_{\text{V}}$ **(F)**

b) $\underbrace{5 > 3}_{\text{V}} \wedge \underbrace{6 \neq 5 + 1}_{\text{F}}$ **(F)**

d) $\underbrace{2 > 6}_{\text{F}} \wedge \underbrace{4 < 1}_{\text{F}}$ **(F)**

II. Dadas duas proposições p e q, chama-se "disjunção de p e q" a proposição "$p \vee q$" (lê-se "p ou q"). A disjunção $p \vee q$ será verdadeira se pelo menos uma das proposições (p ou q) for verdadeira; e será falsa apenas no caso em que as duas (p e q) forem falsas.

Representando na tabela verdade, temos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos

a) $\underbrace{8 > 6}_{\textbf{V}} \vee \underbrace{8 = 7 + 1}_{\textbf{V}}$ **(V)**

b) $5 \geqslant 3$ **(V)**, pois essa proposição pode ser escrita assim: $\underbrace{5 > 3}_{\textbf{V}} \vee \underbrace{5 = 3}_{\textbf{F}}$ **(V)**

c) $\underbrace{\text{A Lua é uma estrela}}_{\textbf{F}}$ ou $\underbrace{\text{o Sol é uma estrela.}}_{\textbf{V}}$ **(V)**

d) $\underbrace{5 > 8}_{\textbf{F}} \vee \underbrace{5 = 8}_{\textbf{F}}$ **(F)**

III. Dadas duas proposições p e q, a proposição "se p, então q", que será indicada por "$p \rightarrow q$", é chamada de **condicional**. A proposição condicional $p \rightarrow q$ será falsa quando p for verdadeira e q falsa; e será verdadeira nos outros casos.

A tabela verdade da proposição condicional é:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplos

a) Se $\underbrace{5 > 3}_{\textbf{V}}$, então $\underbrace{5 > 2}_{\textbf{V}}$. **(V)**

b) $\underbrace{5 > 3}_{\textbf{V}} \rightarrow \underbrace{5 > 6}_{\textbf{F}}$ **(F)**

c) $\underbrace{8 > 9}_{\textbf{F}} \rightarrow \underbrace{8 > 7}_{\textbf{V}}$ **(V)**

d) $\underbrace{2 + 3 = 8}_{\textbf{F}} \rightarrow \underbrace{3 + 2 = 8}_{\textbf{F}}$ **(V)**

IV. Dadas duas proposições p e q, a proposição "p se, e somente se, q", que será indicada por "$p \leftrightarrow q$", é chamada de **bicondicional**. A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ será verdadeira quando p e q forem ambas verdadeiras ou ambas falsas; e será falsa nos demais casos.

Sua tabela verdade é:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplos

a) $\underbrace{5 = 5}_{\textbf{V}}$ se, e somente se, $\underbrace{5 = 4 + 1}_{\textbf{V}}$. **(V)**

b) $\underbrace{3 > 2}_{\textbf{V}}$ se, e somente se, $\underbrace{3 > 4}_{\textbf{F}}$. **(F)**

c) $\underbrace{\text{A Lua é uma estrela}}_{\textbf{F}}$ se, e somente se, $\underbrace{\text{o Sol é uma estrela.}}_{\textbf{V}}$ **(F)**

d) $\underbrace{\text{3 é par}}_{\textbf{F}}$ se, e somente se, $\underbrace{\text{2 é ímpar}}_{\textbf{F}}$. **(V)**

5. Implicação lógica

Dizemos que uma proposição p implica uma proposição q quando a proposição condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira.

Indicamos que p implica q do seguinte modo: $p \Rightarrow q$.

Exemplos

a) $3 = 2 + 1 \Rightarrow 3^2 = (2 + 1)^2$.

Podemos usar o símbolo ⇒, pois a proposição condicional:

$$\underbrace{3 = 2 + 1}_{\text{V}} \rightarrow \underbrace{3^2 = (2 + 1^2)}_{\text{V}} \quad \text{é verdadeira.}$$

b) Não podemos escrever que $3 > 2 \Rightarrow 3 > 4$, pois a proposição condicional:

$$\underbrace{3 > 2}_{\text{V}} \rightarrow \underbrace{3 > 4}_{\text{F}} \quad \text{é falsa.}$$

Nota

Embora os símbolos → e ⇒ representem, respectivamente, uma operação e uma relação entre proposições, empregaremos ao longo dos três volumes apenas o símbolo ⇒, tomando sempre o cuidado de usá-lo apenas quando a proposição condicional for verdadeira.

6. Equivalência lógica

Dizemos que uma proposição p é equivalente a uma proposição q quando a proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira.

Indicamos que p é equivalente a q do seguinte modo: $p \Leftrightarrow q$.

Exemplos

a) $3 > 2 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$.

Podemos usar o símbolo ⇔, pois a proposição bicondicional:

$$\underbrace{3 > 2}_{\text{V}} \leftrightarrow \underbrace{3^2 > 2^2}_{\text{V}} \quad \text{é verdadeira.}$$

b) $3 > 4 \Leftrightarrow 3^2 > 4^2$.

Podemos usar o símbolo ⇔, pois a proposição bicondicional:

$$\underbrace{3 > 4}_{\text{F}} \leftrightarrow \underbrace{3^2 > 4^2}_{\text{F}} \quad \text{é verdadeira.}$$

c) Não podemos escrever que $-3 > -4 \Leftrightarrow (-3)^2 > (-4)^2$, pois a proposição bicondicional:

$$\underbrace{-3 > -4}_{\text{V}} \leftrightarrow \underbrace{(-3)^2 > (-4)^2}_{\text{F}} \quad \text{é falsa.}$$

Nota

Embora os símbolos ↔ e ⇔ representem, respectivamente, uma operação e uma relação entre proposições, empregaremos ao longo dos três volumes apenas o símbolo ⇔, tomando sempre o cuidado de usá-lo apenas quando a proposição bicondicional for verdadeira.

7. Quantificadores

Que valor lógico você atribuiria à sentença aberta $x + 2 = 5$?

Não podemos classificá-la como V ou F, pois nos faltam informações sobre a variável x.

Para transformarmos uma sentença aberta em uma proposição, ou seja, uma afirmação que pode ser qualificada como V ou F, devemos atribuir valores às variáveis ou utilizar símbolos lógicos chamados de "quantificadores". Estudaremos o quantificador universal e os existenciais.

I. Quantificador universal: $\forall$ (lê-se "qualquer que seja", ou, ainda, "para todo").

II. Quantificadores existenciais: $\exists$ (lê-se "existe pelo menos um") e $\exists|$ (lê-se "existe um único").

Nos quatro exemplos seguintes, considere $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Exemplos

a) $(\forall x, x \in \mathbb{N})\ (x + 2 = 5)$, que se lê "qualquer que seja x, x elemento de $\mathbb{N}$, tem-se $x + 2 = 5$", é uma afirmação falsa.

b) $(\exists x, x \in \mathbb{N})\ (x + 2 = 5)$, que se lê "existe pelo menos um x, x elemento de $\mathbb{N}$, tal que $x + 2 = 5$", é uma afirmação verdadeira.

c) $(\exists| x, x \in \mathbb{N})\ (x + 2 = 5)$, que se lê "existe um único x, x elemento de $\mathbb{N}$, tal que $x + 2 = 5$", é uma afirmação verdadeira.

d) $(\exists| x, x \in \mathbb{N})\ (x + 2 > 5)$, que se lê "existe um único x, x elemento de $\mathbb{N}$, tal que $x + 2 > 5$", é uma afirmação falsa.

Exercícios resolvidos

R.1 Quais das afirmações seguintes são proposições? Classificar cada proposição como V ou F:

a) $4 + 2 = 6$ b) $2 + 9 > 15$ c) $x + 5 = 6$ d) $x + y = 10$

Resolução

É proposição toda afirmação que pode ser classificada como V ou F. Assim, temos que:

- (a) é uma proposição verdadeira;
- (b) é uma proposição falsa;
- (c) e (d) não são proposições, pois não podem ser classificadas como V ou F; são sentenças abertas.

R.2 Sendo p: $5 > 3$, q: $5 \neq 3$, escrever a negação de cada uma dessas sentenças.

Resolução

- $\sim p$: $5 \leq 3$;
- $\sim q$: $5 = 3$.

R.3 Dadas duas proposições p e q, construir a tabela verdade de:

a) $p \vee \sim p$ b) $p \wedge \sim p$ c) $p \vee \sim q$ d) $p \wedge \sim q$

Resolução

a)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

b)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

c)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

d)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

R.4 Dadas duas proposições p e q, comparar a tabela verdade de $\sim(p \vee q)$ com a de $\sim p \wedge \sim q$.

Resolução

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

As proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ têm a mesma tabela verdade; por isso dizemos que são proposições equivalentes, ou seja, $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

R.5 De acordo com a conclusão do exercício R.4, escrever a negação da proposição "João é alto ou gordo".

Resolução

João não é alto e não é gordo.

R.6 Mostrar que as proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são equivalentes.

Resolução

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Como as proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ têm a mesma tabela verdade, temos que: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

R.7 Dadas as proposições p e q, comparar a tabela verdade de $p \rightarrow q$ com a de $\sim q \rightarrow \sim p$.

Resolução

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

A tabela verdade de $p \rightarrow q$ é a mesma de $\sim q \rightarrow \sim p$; por isso dizemos que essas proposições são equivalentes: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

R.8 De acordo com a conclusão do exercício R.7, escrever a proposição equivalente a "Se Celso é pai de Guilherme, então Rita é esposa de Celso".

Resolução

Se Rita não é esposa de Celso, então Celso não é pai de Guilherme.

R.9 Sendo $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, classificar cada uma das afirmações como V ou F:

a) $(\forall x, x \in \mathbb{Z})\ (x - x = 0)$

b) $(\forall x, x \in \mathbb{Z})\ (x - 5 = 7)$

c) $(\exists x, x \in \mathbb{Z})\ (x - 5 = 7)$

d) $(\exists | x, x \in \mathbb{Z})\ (x - 5 = 7)$

e) $(\exists | x, x \in \mathbb{Z})\ (x^2 = 9)$

f) $(\exists x, x \in \mathbb{Z})\ (2x = 3)$

Resolução

a) V, pois a diferença $x - x$ é zero para todo x.

b) F, pois, se fizermos $x = 6$, teremos a sentença $6 - 5 = 7$, que é falsa.

c) V, pois existe $x = 12$ tal que $x - 5 = 7$.

d) V, pois existe e é único o valor 12 para x tal que $x - 5 = 7$.

e) F, pois existem dois valores para x: 3 ou -3 tal que $x^2 = 9$.

f) F, pois o valor que satisfaz a igualdade $2x = 3$ é $x = \frac{3}{2}$, que não é inteiro.

8. Negação de uma proposição contendo quantificador

Consideremos as seguintes proposições:

p: "Todo brasileiro gosta de futebol" e q: "Existe mulher alta".

As negações dessas proposições são:

$\sim p$: "Existe brasileiro que **não** gosta de futebol" e $\sim q$: "Toda mulher é $\underbrace{\text{baixa}}_{\textbf{(não}\text{ é alta)}}$".

Observe que:

- para negarmos a proposição p, substituímos o quantificador "todo" pelo quantificador "existe" e negamos a afirmação subseqüente, "brasileiro gosta de futebol";
- para negarmos a proposição q, substituímos o quantificador "existe" pelo quantificador "toda" e negamos a afirmação subseqüente, "mulher alta".

De modo geral:

A negação da proposição p: $(\forall x)$ (x satisfaz a condição c) é $\sim p$: $(\exists x)$ (x **não** satisfaz a condição c).

A negação da proposição q: $(\exists x)$ (x satisfaz a condição c) é $\sim q$: $(\forall x)$ (x **não** satisfaz a condição c).

Exercícios resolvidos

R.10 Escrever a negação da proposição p: $(\forall x)\ (x + 2 = 6)$.

Resolução

$\sim p$: $(\exists x)\ (x + 2 \neq 6)$.

R.11 Escrever a negação da proposição p: $(\exists x)\ (x > 5)$.

Resolução

$\sim p$: $(\forall x)\ (x \leqslant 5)$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B6, B.8, C.1, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.7, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Quais das sentenças seguintes são proposições?

a) $5 - 3 = 8$
b) $8 > 3$
c) $x + 6 = 10$
d) 5 é número par.
e) x é número par.

B.2 Sendo p: $8 < 1$, q: $x = 6$, r: x é número par, escreva a negação de cada uma dessas sentenças.

B.3 Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) 5 é número par e 5 é número ímpar.
b) 5 é número par ou 5 é número ímpar.
c) 4 é número ímpar ou 4 é múltiplo de 3.
d) 6 é número par e 6 é múltiplo de 3.
e) $5 \geqslant 5$
f) $5 \geqslant 4$
g) $5 \geqslant 9$

B.4 Usando a equivalência $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$, escreva a negação da sentença "5 é número par ou 5 é diferente de 3".

B.5 Escreva a negação da sentença "Carlos foi viajar ou foi à escola".

B.6 Usando a equivalência $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$, escreva a negação da sentença “José casou-se e foi viajar”.

B.7 Escreva a negação da sentença “Márcia não voltou e foi ao cinema”.

B.8 Classifique como V ou F cada uma das sentenças:

a) Sendo x um número, tem-se $(\forall x)\ (x > 0)$.
b) Sendo x um número, tem-se $(\exists x)\ (x > 0)$.
c) Sendo x um número, tem-se $(\exists x)\ (x > 0)$.
d) Sendo x um número, tem-se $(\forall x)\ (x + 2 = 2 + x)$.

Exercícios complementares

C.1 Numa sentença do tipo $p \rightarrow q$, o condicional $\rightarrow$ só pode ser substituído pela relação de implicação $\Rightarrow$ quando a sentença $p \rightarrow q$ for verdadeira. Substitua, quando for possível, o símbolo $\rightarrow$ por $\Rightarrow$.

a) $5 > 3 \rightarrow 3 + 1 = 4$
b) $6 > 5 \rightarrow 3 < 2$
c) $3 < 2 \rightarrow 6 > 5$
d) $3 + 2 = 6 \rightarrow 5 < 1$

C.2 Numa sentença do tipo $p \leftrightarrow q$, o bicondicional $\leftrightarrow$ só poderá ser substituído pelo símbolo de equivalência $\Leftrightarrow$ quando a sentença $p \leftrightarrow q$ for verdadeira. Substitua, quando for possível, o símbolo $\leftrightarrow$ por $\Leftrightarrow$:

a) $9 + 1 = 10 \leftrightarrow 5 > 2$
b) $3 < 5 \leftrightarrow 3 - 1 = 6$
c) $6 + 1 = 5 \leftrightarrow 6 + 1 = 7$
d) $6 < 1 \leftrightarrow 3 + 1 = 0$

C.3 Classifique cada uma das sentenças como V ou F:

a) Sendo x um número, tem-se $x > 3 \Rightarrow x > 2$.
b) Sendo x um número, tem-se $x > 2 \Rightarrow x > 3$.
c) ABC é um triângulo retângulo $\Rightarrow$ o triângulo ABC possui apenas dois ângulos agudos.
d) O triângulo ABC possui apenas dois ângulos agudos $\Rightarrow$ ABC é um triângulo retângulo.
e) Sendo x um número, tem-se $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$.
f) Sendo x um número, tem-se $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$.
g) Sendo x um número, tem-se $2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.
h) Sendo x um número, tem-se $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$.
i) Sendo x um número, tem-se x é par se, e somente se, $x + 1$ é ímpar.
j) Sendo x um número, tem-se $\dfrac{x}{2}$ é par se, e somente se, x é par.

(**Sugestão:** para classificar como V ou F uma sentença do tipo $p \Leftrightarrow q$, entenda-a como $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$.)

C.4 Mostre que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$. (**Sugestão:** basta mostrar que as tabelas verdade de $\sim(\sim p)$ e de p são iguais.)

C.5 Usando a equivalência $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, dê uma sentença equivalente a “Não é verdade que Márcia não voltou”.

C.6 Usando a equivalência $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$, escreva uma sentença equivalente a cada uma das sentenças:

a) $x > 3 \rightarrow x > 2$
b) Se Raquel é mulher de José, então Beto é filho de Raquel.
c) Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFBA) Sendo p e q proposições quaisquer, r uma proposição verdadeira, s uma proposição falsa, a proposição $(p \wedge r) \rightarrow (q \vee s)$ será:

a) verdadeira, somente se p for verdadeira.
b) verdadeira, somente se q for verdadeira.
c) verdadeira, para quaisquer valores lógicos de p e q.
d) falsa, se p for verdadeira e q, falsa.
e) falsa, se p e q forem ambas falsas.

V.2 (PUC-RS) A sentença $(\exists x \mid x - a = b)$ é a negação de:

a) $\exists x \mid x - a \neq b$
b) $\exists x \mid x - a > b$
c) $\exists x \mid x - a < b$
d) $\forall x, x - a = b$
e) $\forall x, x - a \neq b$

V.3 (Mackenzie-SP) Duas grandezas x e y são tais que, “se $x = 3$, então $y = 7$”. Pode-se concluir que:

a) se $x \neq 3$, então $y \neq 7$.
b) se $y = 7$, então $x = 3$.
c) se $y \neq 7$, então $x \neq 3$.
d) se $x = 5$, então $y = 5$.
e) nenhuma das conclusões anteriores é válida.

Capítulo 1

Conjuntos, subconjuntos e suas representações

1. Introdução

A teoria dos conjuntos foi desenvolvida por Georg Cantor por volta de 1872. Dentre outras tantas contribuições dadas à matemática por essa teoria, destacam-se as definições precisas dos conceitos de **infinito** e **infinitésimo**.

No início do século XX (1910-1913), a teoria de Cantor obteve um auxílio inestimável do matemático, filósofo e sociólogo inglês Bertrand Russell, que através da **teoria dos tipos** eliminou alguns paradoxos da teoria dos conjuntos.

Georg Cantor (1845-1918) fez da teoria dos conjuntos um vasto campo de investigação matemática.

T. BEAUJC, PRESS-KEYSTONE

Bertrand Russell (1872-1970). Dentre muitas contribuições à ciência, ele publicou trabalhos sobre a fundamentação lógica da matemática.

Estudaremos agora os conceitos elementares da teoria dos conjuntos.

2. Conceitos primitivos

Para dar início à sua teoria, Georg Cantor admitiu os conceitos primitivos (não-definidos) de "conjunto" e de "elemento de um conjunto", que exemplificaremos a seguir.

A idéia de conjunto é a mesma de coleção.

Exemplos

a) Uma coleção de revistas é um **conjunto**; e cada revista é um **elemento** desse conjunto.
b) Um time de futebol é um **conjunto**; e cada atleta do time é um **elemento** desse conjunto.
c) Os alunos de sua sala de aula formam um **conjunto**; e você é um **elemento** desse conjunto.

3. Representação de um conjunto – relação de pertinência

Veremos em seguida três modos de se representar um conjunto.

3.1. Representação tabular

Podemos representar um conjunto sob forma de uma **tabela**, escrevendo seus elementos entre chaves e separados por vírgula.

Exemplos

a) $A = \{a, e, i, o, u\}$

b) $B = \{1, 2, 3, 4\}$

É usual darmos **nomes** aos conjuntos usando letras maiúsculas de fôrma $A, B, C, D, \ldots$. Os elementos de um conjunto são comumente representados por letras minúsculas $a, b, c, d, \ldots$.

Note, nos dois exemplos anteriores, que u é elemento do conjunto A e não é elemento do conjunto B. Tais fatos serão indicados, respectivamente, por:

$u \in A$ (lê-se "u pertence a A") e $u \notin B$ (lê-se "u não pertence a B").

De modo geral, para relacionar elemento e conjunto, só podemos usar um desses símbolos:

$\in$ (pertence); $\notin$ (não pertence).

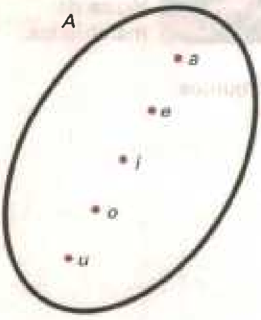
3.2. Representação de um conjunto através de diagramas de Venn

O matemático inglês John Venn (1834-1923) adotou uma maneira de representar conjuntos que muito nos ajuda na visualização das operações entre conjuntos que estudaremos mais adiante.

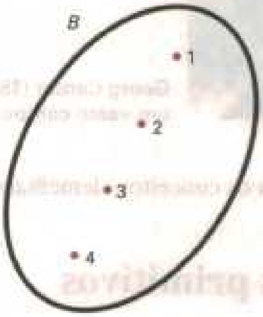
Os elementos de um conjunto são representados por pontos interiores a uma região plana, limitada por uma linha fechada simples, isto é, uma linha que não se entrelaça.

Exemplos

a)



b)



3.3. Representação de um conjunto através de uma propriedade

Se uma propriedade p é comum a todos os elementos de um conjunto A, e somente esses elementos têm a propriedade p, então o conjunto A pode ser descrito por:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}.$$

Lê-se "A é o conjunto de **todos** os elementos x tal que x tem a propriedade p".

Exemplos

a) $A = \{x \mid \underbrace{x \text{ é país da Europa}}_{\text{Propriedade } p}\}$.

b) $B = \{x \mid \underbrace{x \text{ é mamífero}}_{\text{Propriedade } p}\}$.

Entenda bem:

- o conjunto A é formado por **todos** os países da Europa;
- o conjunto B é formado por **todos** os mamíferos.

4. Tipos de conjunto

4.1. Conjunto unitário

Conjunto unitário é todo conjunto formado por um único elemento.

Exemplos

a) $A = \{5\}$.

b) $B = \{x \mid x \text{ é estrela do Sistema Solar}\}$.

4.2. Conjunto vazio

Conjunto vazio é o conjunto que não possui elemento algum. Representa-se o vazio por $\varnothing$ ou por $\{\ \}$.

Exemplos

a) $A = \{x \mid x \text{ é número e } x \cdot 0 = 5\} = \varnothing$.

b) $B = \{x \mid x \text{ é palavra proparoxítona, da língua portuguesa, não-acentuada}\} = \{\ \}$.

4.3. Conjunto finito

Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Contando seus elementos, um a um, conseguimos chegar ao "fim" da contagem. Por isso dizemos que A é um conjunto finito.

Exemplos

a) $B = \varnothing$

b) $C = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $D = \{x \mid x \text{ é brasileiro}\}$.

4.4. Conjunto infinito

Você já estudou no primeiro grau o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Cada um desses conjuntos é infinito, pois, se contarmos seus elementos um a um, jamais chegaremos ao "fim" da contagem.

Exemplos

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é divisível por } 3\} = \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

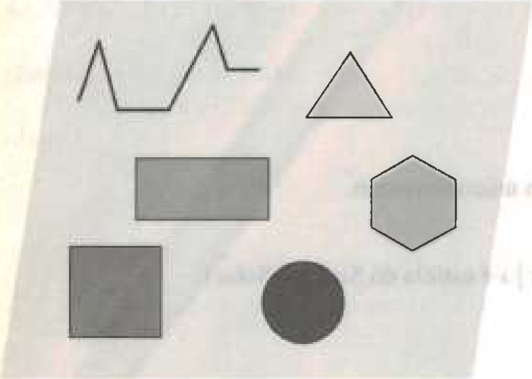
5. Conjunto universo (U)

Quando estudamos a história da humanidade, o conjunto de todos os seres humanos que viveram ou vivem até hoje é chamado de "conjunto universo" (U) do estudo em questão.

Quando estudamos as figuras contidas num plano, o conjunto de todos os pontos desse plano é o conjunto universo do estudo em questão.

DECOUX/REA-STOCK PHOTOS

Novembro de 1989: o Muro de Berlim começa a ruir, dando início a uma nova ordem mundial. Os personagens que viveram esse momento pertencem ao universo da história da humanidade.



Assim, podemos generalizar:

Conjunto universo de um estudo é um conjunto ao qual pertencem todos os elementos desse estudo.

Curiosidade

Em estudos antigos da teoria dos conjuntos, admitia-se a existência do **conjunto universo absoluto**, isto é, o conjunto que possui todo e qualquer elemento. Isso provocou alguns paradoxos na teoria, que teve de ser reformulada. Após a reformulação, provou-se que **não existe** o conjunto universo absoluto. Faremos essa prova, a título de curiosidade, no capítulo 2, após estudarmos alguns pré-requisitos necessários.

6. Subconjunto

Consideremos o conjunto B, formado por todos os brasileiros. Com os elementos de B podemos formar o conjunto A, dos homens brasileiros, e o conjunto C, das mulheres brasileiras. Dizemos que os conjuntos A e C são **subconjuntos** de B.

De modo geral, podemos definir:

Sendo A e B dois conjuntos, diz-se que A é subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A pertence a B.

Indica-se que A é subconjunto de B por: $A \subset B$ (lê-se "A está contido em B"), ou, ainda, por: $B \supset A$ (lê-se "B contém A").

Exemplos

a) $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3, 8, 9\}$ b) $\{6, 9, 6, 5\} \supset \{9, 6\}$ c) $\{2, 8\} \subset \{2, 8\}$

Propriedade

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto: $\varnothing \subset A, \quad \forall A$.

Demonstração

Uma estratégia que podemos usar para provar essa propriedade é supor que ela é falsa, ou seja: é falso que $\varnothing \subset A$.

Ora, pela definição de subconjunto, temos que: se é falso que $\varnothing \subset A$, então existe x, tal que $x \in \varnothing$ e $x \notin A$. Mas isso é uma contradição, pois o conjunto vazio não possui elemento algum.

Assim, a afirmação $\varnothing \subset A$ não é falsa. Pelo **princípio do terceiro excluído**, que garante que toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, concluímos que a proposição $\varnothing \subset A$ é verdadeira.

(c.q.d.)

Exemplos

a) $\varnothing \subset \{1, 2, 3\}$ b) $\varnothing \subset \varnothing$

Para indicar que um conjunto A não é subconjunto de B, simbolizaremos assim:

$A \not\subset B$ (lê-se "A não está contido em B") ou $B \not\supset A$ (lê-se "B não contém A").

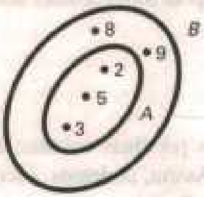
Exemplos

a) $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, d\}$ b) $\{1, 2, 3\} \not\supset \{4, 5, 8\}$

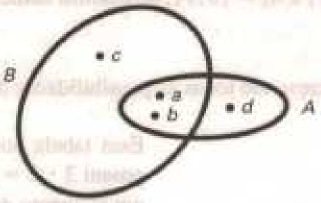
6.1. Representação em diagramas de Venn

Para indicar que $A \subset B$ ou $A \not\subset B$ sob a forma de diagramas de Venn, usaremos representações conforme os seguintes exemplos:

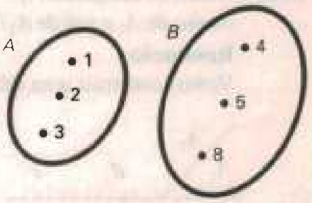
a) $A \subset B$ (ou $B \supset A$)



b) $A \not\subset B$ (ou $B \not\supset A$)



c) $A \not\subset B$ (ou $B \not\supset A$)



Notas

1. A relação de inclusão ($\subset$) é usada **exclusivamente** para relacionar um subconjunto B com um conjunto A que contém B: $B \subset A$.

2. A relação de pertinência ($\in$) é usada **exclusivamente** para relacionar um elemento x com um conjunto A que possui x como elemento: $x \in A$.

Exercícios resolvidos

R.1 Representar os conjuntos na forma tabular:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant x < 10\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - x - 1 = 0\}$

Resolução

a) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Resolvendo a equação $x^2 = 9$, temos que $x = \pm\sqrt{9}$, isto é, $x = \pm 3$. Como 3 e -3 são números inteiros, concluímos que $B = \{-3, 3\}$.

c) A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau ($ax^2 + bx + c = 0$) é $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Na equação $2x^2 - x - 1 = 0$ temos: $a = 2$, $b = -1$ e $c = -1$.

Logo, temos: $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9 \therefore x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

Como $1 \in \mathbb{Z}$ e $-\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, temos que $C = \{1\}$.

R.2 Determinar todos os subconjuntos do conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Resolução

Os subconjuntos de A são: $A_1 = \varnothing$; $A_2 = \{a\}$; $A_3 = \{b\}$; $A_4 = \{c\}$; $A_5 = \{a, b\}$; $A_6 = \{a, c\}$; $A_7 = \{b, c\}$; $A_8 = \{a, b, c\}$.

R.3 Classificar como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\{3\} \subset \{1, 2, 3\}$

b) $\{2, 3, 1\} \subset \{1, 2, 3\}$

c) $2 \subset \{1, 2\}$

d) $2 \in \{1, 2\}$

e) $\{2, 3, 4\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$

f) $\varnothing \subset \{1, 2\}$

g) $\varnothing \in \{1, 2\}$

h) $\{3, 5, 2\} \supset \{3, 5\}$

Resolução

a) V, pois o único elemento do conjunto $\{3\}$ também é elemento do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

b) V, pois todo elemento do conjunto $\{2, 3, 1\}$ também é elemento do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

c) F, pois a relação de inclusão ($\subset$) só pode ser usada entre um subconjunto e um conjunto, **nunca** entre elemento e conjunto.

d) V, pois o elemento 2 é elemento do conjunto $\{1, 2\}$.

e) F, pois todo elemento de $\{2, 3, 4\}$ também é elemento de $\{1, 2, 3, 4\}$; logo, $\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

f) V, pois o vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

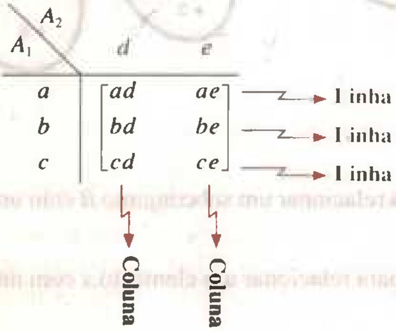
g) F, pois a relação de pertinência ($\in$) só pode ser usada entre elemento e conjunto, **nunca** entre subconjunto e conjunto.

h) V, pois todo elemento de $\{3, 5\}$ também é elemento de $\{3, 5, 2\}$.

R.4 Dados os conjuntos $A_1 = \{a, b, c\}$ e $A_2 = \{d, e\}$, de quantas maneiras diferentes podemos escolher um elemento de A_1 e um de A_2?

Resolução

Vamos construir uma tabela descrevendo todas as possibilidades de escolha:



Essa tabela possui três linhas por duas colunas; logo, possui $3 \cdot 2 = 6$ elementos. Assim, podemos escolher um elemento de A_1 e um de A_2 de:

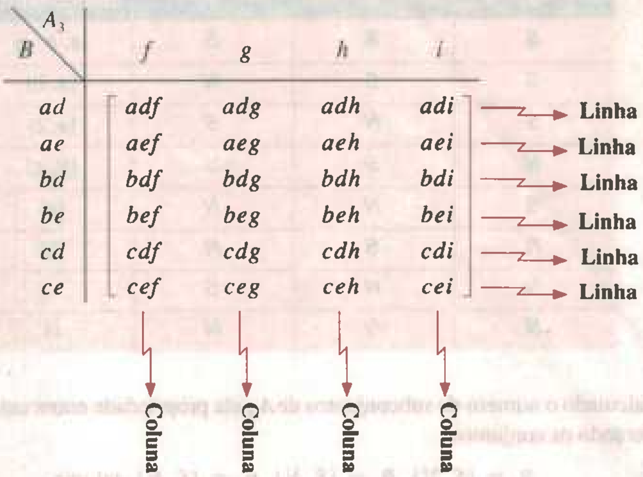
$$\underset{\text{Número de elementos de } A_1}{3} \cdot \underset{\text{Número de elementos de } A_2}{2} = 6 \text{ maneiras diferentes.}$$

R.5 Dados os conjuntos $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$ e $A_3 = \{f, g, h, i\}$, de quantas maneiras diferentes podemos escolher um elemento de A_1, um de A_2 e um de A_3?

Resolução

No exercício anterior vimos que o conjunto B das possibilidades de escolha de um elemento de A_1 e um de A_2 é: $B = \{ad, ae, bd, be, cd, ce\}$.

Vamos construir uma tabela descrevendo todas as possibilidades de escolha de um elemento de B e um de A_3:



B \ A_3	f	g	h	i
ad	adf	adg	adh	adi
ae	aef	aeg	aeh	aei
bd	bdf	bdg	bdh	bdi
be	bef	beg	beh	bei
cd	cdf	cdg	cdh	cdi
ce	cef	ceg	ceh	cei

Linha
Linha
Linha
Linha
Linha
Linha
Coluna
Coluna
Coluna
Coluna

Essa tabela possui seis linhas por quatro colunas, logo, possui $6 \cdot 4 = 24$ elementos. Assim, podemos escolher um elemento de A_1, um de A_2 e um de A_3 de: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ maneiras diferentes.

$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ maneiras diferentes.

Número de elementos de A_3

Número de elementos de A_2

Número de elementos de A_1

Raciocinando de maneira análoga aos exercícios R.4 e R.5, prova-se o seguinte:

> Dados os conjuntos não-vazios $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$, pode-se escolher um elemento de A_1, um de A_2, um de A_3, ... e um de A_k de $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot \ldots \cdot n(A_k)$ maneiras diferentes, onde o símbolo $n(A_i)$, $1 \leq i \leq k$, representa o número de elementos do conjunto A_i.

R.6 Dados os conjuntos $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$, $A_3 = \{f, g, h, i\}$, $A_4 = \{j, k, l, m, n\}$ e $A_5 = \{o\}$, de quantas maneiras diferentes podemos escolher um elemento de A_1, um de A_2, um de A_3, um de A_4 e um de A_5?

Resolução

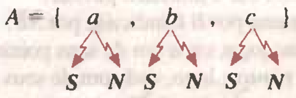
Pela propriedade anterior, temos que o número de escolhas possíveis é:

$$n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot n(A_4) \cdot n(A_5) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 = 120.$$

R.7 Quantos subconjuntos o conjunto $A = \{a, b, c\}$ possui?

Resolução

Na formação de um subconjunto de A, para cada um dos elementos a, b e c há duas possibilidades: ou o elemento considerado pertencerá ao subconjunto a ser formado ou não. Assim, um subconjunto estará determinado quando escolhermos para cada elemento de A uma das possibilidades, **sim** (S) ou **não** (N):



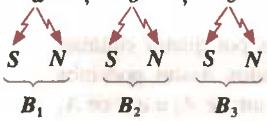
Escolhida a alternativa S, o elemento fará parte do subconjunto a ser formado. Escolhida a alternativa N, o elemento não fará parte do subconjunto. Teremos então os seguintes subconjuntos:

a	*b*	*c*	Subconjunto
S	*S*	*S*	$\{a, b, c\}$
S	*S*	*N*	$\{a, b\}$
S	*N*	*S*	$\{a, c\}$
N	*S*	*S*	$\{b, c\}$
S	*N*	*N*	$\{a\}$
N	*S*	*N*	$\{b\}$
N	*N*	*S*	$\{c\}$
N	*N*	*N*	$\varnothing$

Poderíamos ter calculado o número de subconjuntos de A pela propriedade enunciada na resolução do exercício R.5, considerando os conjuntos

$$B_1 = \{S, N\},\ B_2 = \{S, N\},\ B_3 = \{S, N\},\ \text{tal que}$$

$$A = \{\ a\ ,\ b\ ,\ c\ \}.$$



Podemos escolher um elemento de B_1, um de B_2 e um de B_3 de:

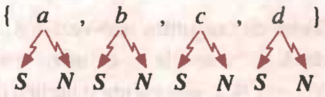
$$n(B_1) \cdot n(B_2) \cdot n(B_3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8 \text{ maneiras diferentes.}$$

Logo, o conjunto A possui oito subconjuntos.

R.8 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Resolução

Raciocinando do mesmo modo que no exercício R.7, temos, para cada elemento do conjunto A, duas possibilidades, S ou N.



Assim, o número de possibilidades de escolha para os quatro elementos é: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

Logo, A possui dezesseis subconjuntos.

R.9 Quantos subconjuntos possui um conjunto com n elementos?

Resolução

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$ um conjunto com n elementos. Para cada elemento de A, temos duas possibilidades: S ou N. Portanto o número de possibilidades de escolha para os n elementos é:

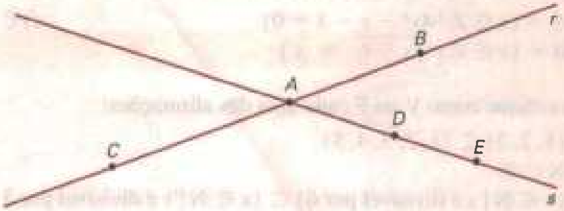
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n.$$

Logo, A possui 2^n subconjuntos.

R.10 Recordemos algumas notações e alguns conceitos da geometria.

- Pontos são nomeados por letras latinas maiúsculas e de fôrma ($A, B, C, D, \ldots$).
- Retas são nomeadas por letras latinas minúsculas ($a, b, c, \ldots r, s, t, \ldots$).
- Um segmento de reta de extremos A e B é indicado por $\overline{AB}$.
- Uma semi-reta de origem A que passa por B é indicada por $\overrightarrow{AB}$.
- Uma reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é um elemento da reta.
- Uma semi-reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento da semi-reta.
- Um segmento de reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é um elemento do segmento de reta.

De acordo com a figura, classificar como V ou F cada uma das afirmações:



a) $A \in r$
b) $A \subset r$
c) $\{A\} \subset r$
d) $\overrightarrow{AB} \in r$
e) $\overrightarrow{AB} \subset r$
f) $\overrightarrow{DE} \subset \overrightarrow{AE}$
g) $A \in \overline{AC}$
h) $A \subset \overline{AC}$

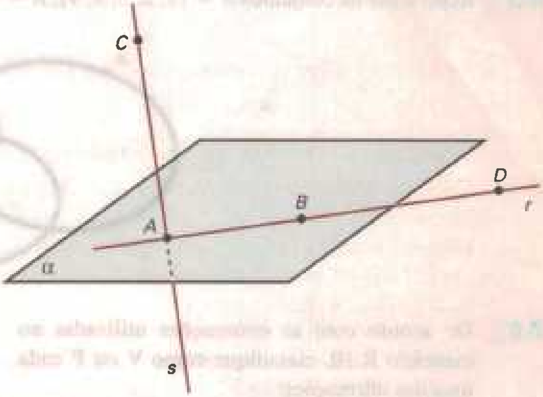
Resolução

a) V, pois A é ponto de r.
b) F, pois a relação $\subset$ só é usada entre subconjunto e conjunto, e não entre elemento e conjunto.
c) V, pois o ponto A é elemento da reta r.
d) F, pois $\overrightarrow{AB}$ não é elemento de r, mas sim subconjunto de r.
e) V, pois todo ponto da semi-reta $\overrightarrow{AB}$ é elemento de r.
f) V, pois todo ponto de $\overrightarrow{DE}$ também é ponto de $\overrightarrow{AE}$. Logo a relação $\subset$ está correta.
g) V, pois A é o ponto de $\overline{AC}$.
h) F, pois a relação $\subset$ só é usada entre subconjunto e conjunto, e não entre elemento e conjunto.

R.11 A superfície da lousa de sua classe é uma superfície plana. Por isso dizemos que ela **está contida** num plano. Esse plano é infinito, isto é, não se limita às margens da lousa. Um plano é constituído por infinitos pontos; e toda reta que passa por dois de seus pontos (distintos) **está contida** nesse plano.

Em geometria, pode-se representar um plano por um paralelogramo e usa-se uma letra grega minúscula (α, β, γ, ...) para denominá-lo.

Sabendo que os pontos A e B pertencem ao plano α (figura ao lado) e que C não pertence a α, classificar cada uma das afirmações como V ou F:



a) $D \in \alpha$
b) $D \subset \alpha$
c) $r \in \alpha$
d) $\overline{AB} \subset \alpha$
e) $\overline{AB} \in \alpha$
f) $s \subset \alpha$

Resolução

a) V, pois $D \in r$ e $r \subset \alpha$; logo, $D \in \alpha$.
b) F, pois D é elemento de α; logo, a relação $\subset$ não pode ser usada; o correto é $D \in \alpha$.
c) F, pois r é subconjunto de α; logo, a relação $\in$ não pode ser usada; o correto é $r \subset \alpha$.
d) V, pois todo ponto de $\overline{AB}$ também é ponto de α; logo, $\overline{AB}$ é subconjunto de α.
e) F, pois $\overline{AB}$ é subconjunto de α; logo, a relação $\in$ não pode ser usada. O correto é $\overline{AB} \subset \alpha$.
f) F, pois nem todo ponto de s pertence a α.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.6, B.9, B.10.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.7, B.8, C.1, C.2, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Represente na forma tabular os conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 4 < 2x + 1\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 3\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x + 5 > 7x + 9\}$

B.2 Represente na forma tabular os conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4x^2 - x - 3 = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x + 6} = x\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$

B.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisível por } 6\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisível por } 3\}$;

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\} \subset \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$;

e) $3 \subset \{1, 2, 3\}$

f) $3 \in \{1, 2, 3\}$

g) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant 8\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$

B.4 Considere os conjuntos A e B e classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $3 \in A$,

b) $3 \in A$ e $3 \in B$,

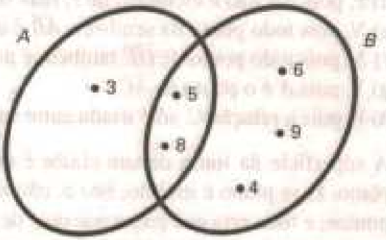
c) $3 \in A$ ou $3 \in B$,

d) $5 \in A$ e $5 \in B$,

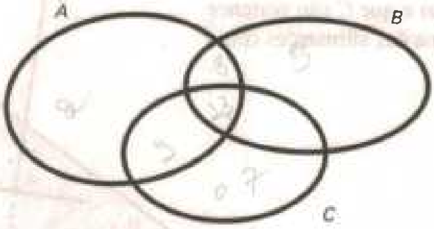
e) $5 \in A$ ou $5 \in B$

f) $3 \in A$ e $3 \notin B$,

g) $5 \in A$ e $5 \notin B$.



B.5 Represente os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$ e $C = \{0, 1, 3, 7, 9\}$ no diagrama:



B.6 De acordo com as convenções utilizadas no exercício R.10, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $A \in r$

b) $E \notin s$

c) $\overline{AB} \subset r$ V

d) $\overline{BE} \subset r$ F

e) $\overrightarrow{AB} \subset r$ V

f) $A \in r$ e $A \in s$; V

g) $A \in r$ ou $A \in s$; V

h) $D \in r$ e $D \in s$; V

i) $D \in r$ ou $D \in s$;

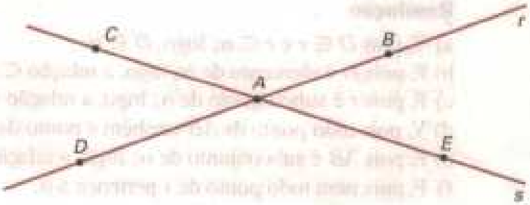
j) $A \notin \overline{AB}$ F

k) $B \notin \overline{AD}$ V

l) $s \supset \overline{AE}$ V

m) $\{A\} \subset r$ V

n) $A \subset r$ V



B.7 Indicando, respectivamente, por C e r a circunferência e a reta, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $P \in r$ e $P \in C$.

b) $P \in r$ ou $P \in C$.

c) $M \in r$ e $M \in C$.

d) $M \in r$ ou $M \in C$.

e) $N \in C$ e $N \in r$.

f) $N \in C$ ou $N \in r$.

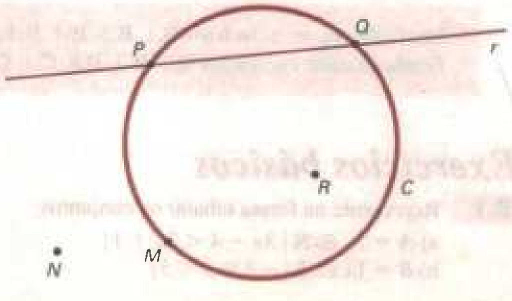
g) $M \in C$ e $M \notin r$.

h) $P \in C$ e $P \notin r$.

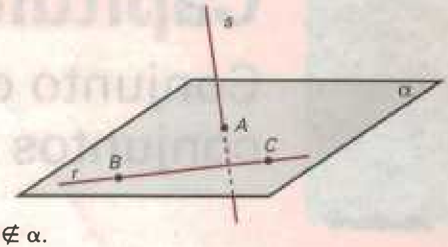
i) $P \in C$ ou $P \notin r$.

j) $R \in C$.

k) $\overline{PQ} \subset r$.



B.8 Considere um plano α, uma reta r contida em α e uma reta s que possui um único ponto A em comum com o plano α e não é concorrente com r:



Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $s \subset \alpha$
b) $A \in \alpha$
c) $A \subset \alpha$
d) $r \in \alpha$
e) $r \subset \alpha$
f) $\overline{BC} \in \alpha$
g) $\overline{BC} \subset \alpha$
h) $s \not\subset \alpha$
i) $A \in \alpha$ e $A \in s$.
j) Se $M \in s$ e M é distinto de A, então $M \notin \alpha$.
k) Se $N \in r$, então $N \in \alpha$.
l) Se $P \in \alpha$, então $P \notin r$.

B.9 Determine todos os subconjuntos de $A = \{1, 2, 3\}$. $2^3 = 8$

B.10 Quantos subconjuntos possui um conjunto de dez elementos?

$2^{10} = 1024$

Exercícios complementares

C.1 Represente na forma tabular os conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 0\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{1}{x} = 0\right\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{x}{x} = 1\right\}$ **(Cuidado!)**

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x + 7} = x + 1\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = x\}$ **(Cuidado!)**

C.2 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $2 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é primo$\}$.

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é primo$\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar$\}$.

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é quadrado perfeito$\} \subset \mathbb{N}$.

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é divisor de $8\} \supset \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é divisor de $12\}$.

e) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{2}\right\} \subset \mathbb{N}$.

C.3 Um conjunto A possui exatamente 512 subconjuntos. Determine o número de elementos de A.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) A e B são dois conjuntos não-vazios, de modo que $A \subset B$; então:

a) sempre existe x, $x \in A$, tal que $x \notin B$.
b) sempre existe x, $x \in B$, tal que $x \notin A$.
c) se $x \in B$, então $x \in A$.
d) se $x \notin B$, então $x \notin A$.
e) A e B não têm elementos em comum.

V.2 (Cescem-SP) Sejam A e B dois conjuntos tais que "se x pertence a A, então x pertence a B". Pode-se afirmar que:

a) se $5 \in B$, então $5 \in A$.
b) se $8 \notin A$, então $8 \notin B$.
c) se $7 \notin B$, então $7 \notin A$.
d) se $9 \in B$, então $9 \notin A$.
e) se $10 \notin B$, então $10 \in A$.

V.3 (PUC-SP) Qual dos conjuntos a seguir é infinito?

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 8\}$
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é divisor de $8\}$.
d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é múltiplo de $3\}$.
e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é primo e x é par$\}$.

Capítulo 2

Conjunto cujos elementos são conjuntos

1. Introdução

Consideremos o conjunto B cujos elementos são os times de futebol que disputam o campeonato brasileiro. Assim, temos, por exemplo:

- o time do Corinthians é um elemento do conjunto B;
- o time do Flamengo é um elemento do conjunto B.

Por outro lado, cada time é um conjunto de atletas.

Perceba que o conjunto B é um conjunto cujos elementos são conjuntos.

Através desse exemplo, percebemos que é perfeitamente possível um conjunto possuir como elementos outros conjuntos. Isso vai nos ajudar a entender a definição seguinte.

JUCA MARTINS/PULSAR

2. Conjunto das partes de um conjunto

Chama-se "conjunto das partes de um conjunto A", e indica-se por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.

Exemplo

Sendo $A = \{a, b, c\}$, temos que os subconjuntos de A são:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \text{ e } \{a, b, c\}.$$

Logo, o conjunto das partes do conjunto A é:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Note que $\mathcal{P}(A)$ possui $2^3 = 8$ elementos.

Os exercícios resolvidos R.7, R.8 e R.9 do capítulo anterior mostram que o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n. Logo, temos:

Se um conjunto A possui n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.

Exemplos

a) O conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ possui cinco elementos; logo, $\mathcal{P}(A)$ possui $2^5 = 32$ elementos.
b) O conjunto $B = \{a\}$ possui 1 elemento; logo, $\mathcal{P}(B)$ possui $2^1 = 2$ elementos.
c) O conjunto $C = \{\ \}$ possui 0 elemento; logo, $\mathcal{P}(C)$ possui $2^0 = 1$ elemento.

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo $A = \{2, 5\}$, determinar $\mathcal{P}(A)$.

Resolução

$\mathcal{P}(A)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A, e somente eles. Logo, temos:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}.$$

R.2 Sendo $A = \{7\}$, determinar $\mathcal{P}(A)$.

Resolução

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{7\}\}.$$

R.3 Sendo $A = \varnothing$, determinar $\mathcal{P}(A)$.

Resolução

O conjunto A possui um único subconjunto, que é o próprio $\varnothing$ (vazio); logo, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$.

Cuidado! O conjunto $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$ é um conjunto unitário, isto é, $\mathcal{P}(A)$ possui um único elemento, que é o $\varnothing$.

R.4 Sendo $A = \{1, 2\}$, temos que $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Classificar como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$
b) $1 \in A$
c) $1 \in \mathcal{P}(A)$
d) $\{1\} \subset \mathcal{P}(A)$
e) $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(A)$
f) $\{1, 2\} \in A$
g) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$
h) $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$
i) $A \in \mathcal{P}(A)$
j) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
k) $\varnothing \subset \mathcal{P}(A)$

Resolução

a) V, pois o conjunto $\{1\}$ é subconjunto de A, e todo subconjunto de A é elemento de $\mathcal{P}(A)$;
b) V, pois 1 é elemento de A;
c) F, pois 1 não é subconjunto de A; logo, não pode ser elemento de $\mathcal{P}(A)$;
d) F, pois $\{1\}$ é subconjunto de A; logo, é elemento de $\mathcal{P}(A)$. O correto é $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$;
e) V, pois, sendo $\{1\}$ um elemento de $\mathcal{P}(A)$, temos que o conjunto formado por esse elemento, isto é, $\{\{1\}\}$, é subconjunto de $\mathcal{P}(A)$;
f) F, pois os únicos elementos de A são 1 e 2; logo, o conjunto $\{1, 2\}$ não é elemento de A;
g) V, pois o conjunto $\{1, 2\}$ é subconjunto de A; logo, é elemento de $\mathcal{P}(A)$;
h) F, pois $\{1, 2\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(A)$; logo, o conjunto formado por esse elemento, isto é, $\{\{1, 2\}\}$, é um subconjunto de $\mathcal{P}(A)$; o correto é $\{\{1, 2\}\} \subset \mathcal{P}(A)$;
i) V, pois A é subconjunto de A; logo, A é elemento de $\mathcal{P}(A)$;
j) V, pois o conjunto vazio é subconjunto de A; logo, é elemento de $\mathcal{P}(A)$;
k) V, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

R.5 Num programa de tevê um espectador participa de um jogo onde deve responder a cinco perguntas. As perguntas, por apresentarem dificuldades em níveis diferentes, correspondem a prêmios diferentes: um relógio, um rádio, um fogão, um televisor e uma geladeira. Para cada resposta certa, o espectador ganha o prêmio correspondente à pergunta. De quantas maneiras diferentes pode ser premiado (ou não) esse espectador?

Resolução

Seja $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ o conjunto formado pelas cinco perguntas. O espectador pode errar todas as respostas ou acertar apenas uma, ou acertar somente duas, ou somente três, ou somente quatro, ou, ainda, acertar as cinco respostas. Assim, o total de resultados possíveis do jogo é igual ao número de subconjuntos de A, isto é, $2^5 = 32$.

R.6 Um artista plástico deve pintar um painel com pelo menos duas cores, escolhidas entre quatro cores distintas. Quantos conjuntos de cores diferentes o artista pode escolher para pintar o painel?

Resolução

Seja $A = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ o conjunto das cores de que o artista dispõe.

O painel deve ter pelo menos duas cores escolhidas entre c_1, c_2, c_3 e c_4. Portanto o número de conjuntos de cores diferentes que o artista pode escolher é o número de subconjuntos de A, exceto os subconjuntos unitários e o vazio:

$$\underbrace{2^4}_{\substack{\textbf{Total de}\\ \textbf{subconjuntos}\\ \textbf{de } A}} - \underbrace{4}_{\substack{\textbf{Subconjuntos}\\ \textbf{unitários}\\ \textbf{de } A}} - \underbrace{1}_{\substack{\textbf{Subconjunto}\\ \textbf{vazio}\\ \textbf{de } A}} = 11.$$

Curiosidade

Conforme prometemos no capítulo 1, vamos provar agora que **não existe o conjunto** que possui **qualquer elemento.**

Demonstração

Consideremos um conjunto arbitrário U, cujos elementos são conjuntos. Seja B tal que:

$$B = \{X \mid X \text{ é conjunto, } \underbrace{X \in U}_{(\mathrm{I})} \text{ e } \underbrace{X \notin X}_{(\mathrm{II})}\}.$$

Vamos provar que $B \notin U$. Para isso, admitiremos que $B \in U$ e provaremos que essa suposição nos levará a contradições.

De fato, admitindo que $B \in U$, temos duas e apenas duas alternativas:

$B \in B$ (1^{a} alternativa) ou $B \notin B$ (2^{a}). Analisemos cada uma delas.

1^{a}) $B \in U$ e $B \in B$.

Por (I) e (II), concluímos que $B \notin B$. Ora, $B \in B$ e $B \notin B$ é uma contradição; logo, a alternativa $B \in U$ e $B \in B$ é impossível.

2^{a}) $B \in U$ e $B \notin B$.

Por (I) e (II), concluímos que $B \in B$. Ora, $B \notin B$ e $B \in B$ é uma contradição; logo, a alternativa $B \in U$ e $B \notin B$ é impossível.

Assim, a proposição $B \in U$ nos leva a contradições. Temos então: é falso que $B \in U$. Logo, $B \notin U$.

Como o conjunto U foi tomado arbitrariamente e provamos que existe pelo menos um elemento B que não pertence a U, concluímos não existir um conjunto que possui qualquer elemento.

(c.q.d.)

Nota

A palavra "arbitrariamente" significa "independente de lei ou regra", "que não aceita restrição".

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.6, C.4, C.6, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.5, C.1, C.2, C.3, C.5, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Sendo $A = \{7, 8, 9\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

B.2 Sendo $A = \{6, 7, 8, 9\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

B.3 Sendo $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, quantos elementos possui $\mathcal{P}(A)$?

B.4 Um conjunto A possui n elementos; quantos elementos possui $\mathcal{P}(A)$?

B.5 O conjunto das partes de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, possui exatamente 256 elementos. Qual é o número de elementos de A?

B.6 Sendo $A = \{a, b, c\}$, temos que: $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $a \in A$
b) $a \subset A$
c) $\{a\} \subset A$
d) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$
e) $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$
f) $\{\{a\}\} \subset \mathcal{P}(A)$
g) $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$
h) $\{\{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A)$
i) $\{\{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(A)$
j) $\varnothing \in A$
k) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
l) $\varnothing \subset \mathcal{P}(A)$

Exercícios complementares

C.1 Seja A o conjunto dos pontos de uma reta. Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) uma semi-reta contida nessa reta é um elemento de A;

b) uma semi-reta contida nessa reta é elemento de $\mathcal{P}(A)$;

c) se Q é um ponto pertencente a essa reta, então $Q \in \mathcal{P}(A)$;

d) se Q é um ponto pertencente a essa reta, então $\{Q\} \in \mathcal{P}(A)$;

e) se um segmento de reta está contido nessa reta, então esse segmento é elemento de A;

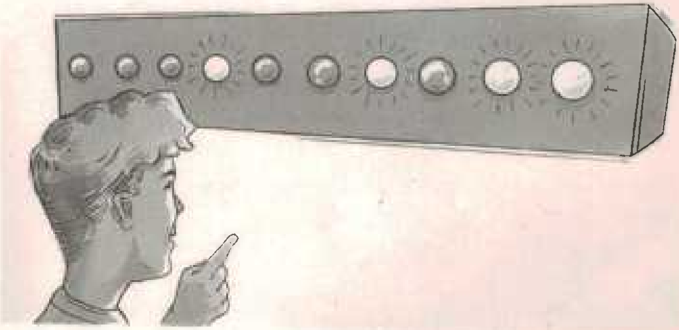
f) se um segmento de reta está contido nessa reta, então esse segmento é elemento de $\mathcal{P}(A)$.

C.2 Seja A um conjunto. Sabendo que $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$, $\{b\} \in \mathcal{P}(A)$, $\{a, c\} \in \mathcal{P}(A)$ e que $\mathcal{P}(A)$ possui exatamente oito elementos, determine o conjunto A.

C.3 Seja A um conjunto. Sabendo que o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é maior que 32, qual é o menor número possível de elementos de A?

C.4 Cada uma das quatro comportas de uma represa é acionada por um dentre quatro registros. As comportas têm vazões diferentes entre si. Pode-se dar vazão apenas por uma comporta, ou por duas quaisquer, ou por três quaisquer, ou pelas quatro simultaneamente. De quantas maneiras diferentes pode-se dar vazão à água dessa represa?

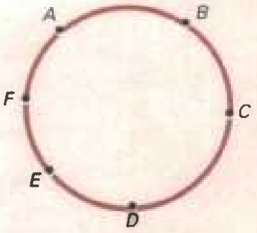
C.5 Um painel é composto por dez lâmpadas de cores diferentes. Esse painel transmite uma mensagem em código para cada conjunto de lâmpadas acesas, sendo também uma mensagem o painel totalmente apagado. Por exemplo, na figura ao lado, o painel está transmitindo uma mensagem.



Quantas mensagens diferentes podem ser representadas por essas dez lâmpadas?

C.6 Quantos subconjuntos com pelo menos três elementos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

C.7 Considere seis pontos distintos de uma circunferência. Quantos polígonos podem ser construídos com vértices em pelo menos três desses seis pontos?



C.8 Um fabricante de perfumes dispõe de oito essências diferentes para a fabricação de perfumes. Sabendo que cada mistura de pelo menos duas essências resulta numa fragrância diferente, calcule o número de fragrâncias que podem ser obtidas.

Questões dos vestibulares

V.1 (F. C. Chagas-SP) Se $A = \{\varnothing, 3, \{3\}, \{2, 3\}\}$, então:

a) $\{2, 3\} \subset A$ b) $2 \in A$ c) $\varnothing \notin A$ d) $3 \subset A$ e) $\{3\} \in A$

V.2 (F. M. Santa Casa-SP) Um conjunto A possui n elementos, e um conjunto B possui um elemento a mais do que A. Sendo x e y os números de subconjuntos de A e B, respectivamente, tem-se que:

a) y é o dobro de x.

b) y é o triplo de x.

c) $y = \frac{x}{2} + 1$.

d) $y = x + 1$.

e) y pode ser igual a x.

V.3 (UFCE) Se um conjunto A possui n elementos, então o conjunto $\mathcal{P}(A)$, das partes de A, possui 2^n elementos. Qual é o número de elementos do conjunto das partes de $\mathcal{P}(A)$?

a) 2^n b) 4^n c) 2^{2^n} d) 8^n e) 16^n

Capítulo 3

União e intersecção de conjuntos

1. Introdução

Considere os seguintes conjuntos: A é o conjunto das alunas do colégio que jogam voleibol e B é o conjunto das alunas do colégio que jogam basquetebol.

O professor de educação física marcou dois treinos: para o primeiro, foram convocadas as alunas que jogam voleibol **ou** basquetebol e, para o segundo, foram convocadas as alunas que jogam voleibol **e** basquetebol.

Três amigas, Regina, Cristina e Rita, são jogadoras. Regina joga só voleibol, Cristina joga só basquetebol e Rita joga voleibol e basquetebol. Quem, dentre elas, deve comparecer ao primeiro treino? E quem deve comparecer ao segundo?

Claro que as três devem comparecer ao primeiro treino e apenas Rita, dentre as três, deve participar do segundo.

Esse exemplo nos ajudará a entender as definições seguintes.

2. União (ou reunião) de conjuntos

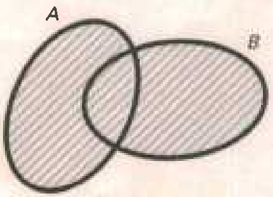
A união (ou reunião) de dois conjuntos A e B, que indicaremos por $A \cup B$ (lê-se "A união B"), é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A **ou** a B. Em símbolos, temos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

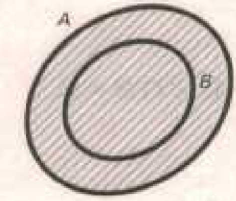
Exemplos

a) Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{6, 7\}$, temos que: $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.
b) Sendo $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, temos que: $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
c) Sendo $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, temos que: $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

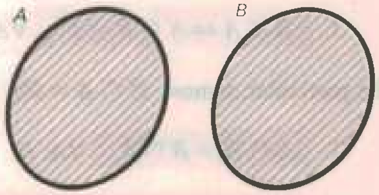
2.1. Representação em diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $A \cup B$



Toda a região hachurada representa $A \cup B$.



Toda a região hachurada representa $A \cup B$.

2.2. Propriedades da união de conjuntos

I. $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A, \quad \forall A, B.$

Em particular, temos: $\varnothing \cup A = A$; $A \cup A = A$; $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

II. $A \cup B = B \cup A, \quad \forall A, B.$

III. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad \forall A, B, C.$

Conseqüentemente, temos: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou} \ldots x \in A_n\}$.

3. Intersecção de conjuntos

A intersecção de dois conjuntos A e B, que indicaremos por $A \cap B$ (lê-se "A intersecção B"), é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e a B. Em símbolos,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

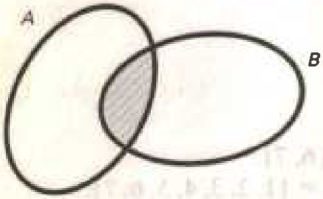
Exemplos

a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, temos $A \cap B = \{3, 4\}$.
b) Sendo $C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{7, 8, 9, 10\}$, temos $C \cap D = \varnothing$.

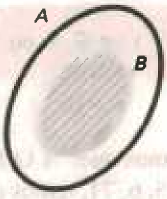
Dizemos que dois conjuntos são **disjuntos** se, e somente se, a intersecção entre eles for o conjunto vazio. Note, no exemplo (b), que C e D são disjuntos.

c) Sendo $E = \{4, 5, 6\}$ e $F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, temos $E \cap F = \{4, 5, 6\}$.
Note que $E \cap F = E$. Isso se deve ao fato de $E \subset F$.

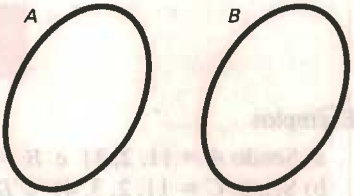
3.1. Representação em diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $A \cap B$.



Toda a região hachurada representa $A \cap B$.



Os conjuntos A e B são disjuntos, pois $A \cap B = \varnothing$.

3.2. Propriedades da intersecção de conjuntos

I. $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B, \quad \forall A, B.$

Em particular, temos: $\varnothing \cap A = \varnothing$; $A \cap A = A$; $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$.

II. $A \cap B = B \cap A, \quad \forall A, B.$

III. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad \forall A, B, C.$

Conseqüentemente, temos: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } x \in A_3 \text{ e} \ldots x \in A_n\}$.

Exercícios resolvidos

R.1 São dados os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leqslant x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leqslant x < 8\}$.
Determinar $A \cup B$ e $A \cap B$.

Resolução

Temos:

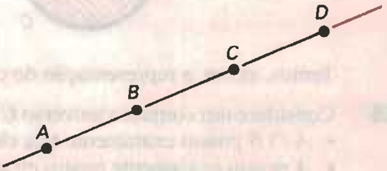
$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Logo,

$$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{2, 3, 4\}.$$

R.2 Observando a figura, lembre-se das convenções:

- $\overleftrightarrow{AB}$ representa a reta que passa pelos pontos A e B;
- $\overrightarrow{AB}$ representa a semi-reta de origem A e que passa por B;
- $\overline{AB}$ representa o segmento de reta de extremos A e B.



Assinalar V ou F em cada uma das afirmações:

a) $\overline{AB} \cup \overline{BD} = \overline{AD}$
b) $\overline{AB} \cup \overline{CD} = \overline{AD}$
c) $\overline{AD} \cap \overrightarrow{BD} = \overline{BD}$
d) $\overline{AD} \cap \overrightarrow{DB} = \overline{BD}$
e) $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \overline{AD}$
f) $\overline{AD} \cap \overline{CD} = \overline{CD}$
g) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \varnothing$
h) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

Resolução

a) V, pois $\overline{AD}$ é o conjunto dos pontos que pertencem a $\overline{AB}$ ou a $\overline{BD}$;
b) F, pois existe ponto em $\overline{AD}$ que não pertence a $\overline{AB}$ e não pertence a $\overline{CD}$; por exemplo, um ponto entre B e C;
c) V, pois $\overline{BD}$ é o conjunto dos pontos que pertencem a $\overline{AD}$ e a $\overrightarrow{BD}$;
d) F, pois o ponto A, por exemplo, pertence a $\overline{AD}$ e a $\overrightarrow{DB}$, e não pertence a $\overline{BD}$;
e) F, pois o ponto A, por exemplo, pertence a $\overline{AD}$ e não pertence a $\overline{BC}$; logo, A não pode pertencer a $\overline{AD} \cap \overline{BC}$;
f) V, pois $\overline{CD} \subset \overline{AD}$, assim $\overline{CD}$ é o conjunto dos pontos que pertencem a $\overline{CD}$ e a $\overline{AD}$;
g) F, pois o conjunto dos pontos que pertencem a $\overrightarrow{AB}$ e a $\overrightarrow{BA}$ é o conjunto $\overline{AB}$;
h) V, pois $\overleftrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos que pertencem a $\overrightarrow{AB}$ ou a $\overrightarrow{BA}$.

R.3 São dados os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}; \quad C = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}; \quad D = \{10, 11\}.$$

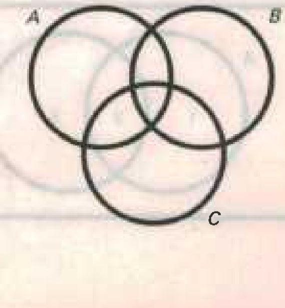
Determinar:

a) $A \cup B \cup C \cup D$
b) $A \cap B \cap C$
c) $A \cap B \cap C \cap D$
d) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

Resolução

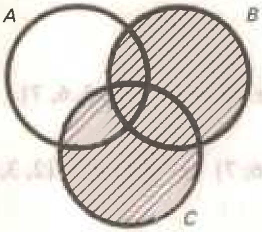
a) $A \cup B \cup C \cup D = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C \text{ ou } x \in D\}$.
Logo, $A \cup B \cup C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
b) $A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\}$.
Logo, $A \cap B \cap C = \{3, 4, 5\}$.
c) $A \cap B \cap C \cap D = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C \text{ e } x \in D\}$.
Logo, $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$.
d) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$; $C \cap D = \{\ \}$.
Logo, $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{3, 4, 5\}$.

R.4 O diagrama representa os conjuntos A, B e C.
Hachurar a região que representa o conjunto $A \cap (B \cup C)$:

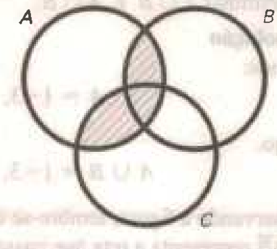


Resolução

Inicialmente, vamos hachurar a região que corresponde a $B \cup C$:



Agora, vamos hachurar a intersecção do conjunto A com a região anterior:



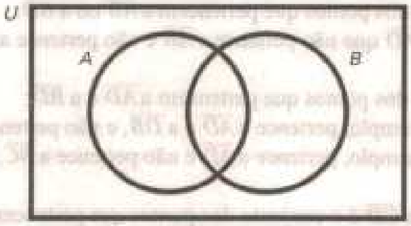
Temos, assim, a representação do conjunto $A \cap (B \cup C)$.

R.5 Considere um conjunto universo U com dez elementos. Sejam A e B dois subconjuntos de U tais que:

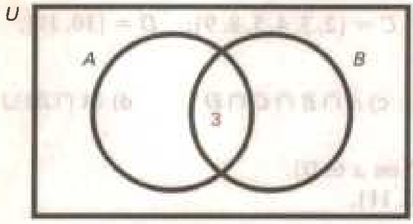
- $A \cap B$ possui exatamente três elementos;
- A possui exatamente quatro elementos;
- B possui exatamente oito elementos.

Quantos elementos pertencem a U e não pertencem a $A \cup B$?

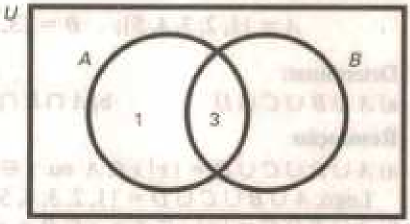
Resolução



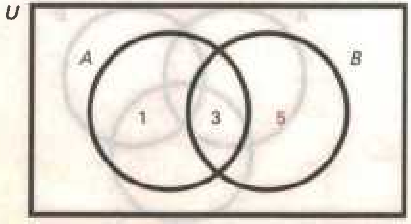
I. $A \cap B$ possui três elementos. Indiquemos esse fato escrevendo o número 3 na região $A \cap B$:



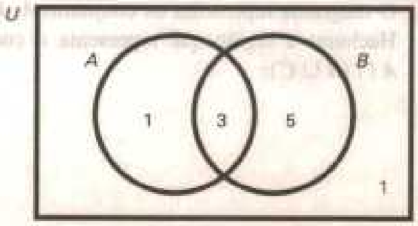
II. A possui quatro elementos. Já indicamos três elementos em A; falta, portanto, apenas um elemento:



III. B possui oito elementos. Como já indicamos três elementos em B, faltam, portanto, cinco elementos:



IV. Como U possui dez elementos e já foram indicados nove elementos em $A \cup B$, temos que existe apenas um elemento que pertence a U e não pertence a $A \cup B$:



R.6 Resolver, no conjunto universo $U = \mathbb{Z}$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 4x - 9 \leqslant 2x + 3 & \text{(I)} \\ 5x + 3 > 4x + 5. & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolução

Resolver esse sistema em $\mathbb{Z}$ significa determinar o conjunto S de números inteiros que satisfaçam as inequações (I) e (II) simultaneamente. Inicialmente, determinamos o conjunto solução S_1 da inequação (I):

$$4x - 9 \leqslant 2x + 3 \Rightarrow 4x - 2x \leqslant 3 + 9 \therefore 2x \leqslant 12 \therefore x \leqslant 6.$$

Logo, $S_1 = \{..., -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A seguir determinamos o conjunto solução S_2 da inequação (II):

$$5x + 3 > 4x + 5 \Rightarrow 5x - 4x > 5 - 3 \therefore x > 2.$$

Logo, $S_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, ...\}$.

O conjunto solução S do sistema é formado pelos elementos que pertencem a S_1 e S_2, ou seja, $S = S_1 \cap S_2$:

$$S = \{..., -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, ...\}.$$

Logo, $S = \{3, 4, 5, 6\}$.

R.7 Resolver a equação $(3x - 1)(2x^2 - x - 1) = 0$ no conjunto universo $U = \mathbb{Z}$.

Resolução

Para resolver essa equação, vamos usar a **propriedade do produto nulo**, ou seja,

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Assim, temos:

$$(3x - 1)(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ (I) ou } 2x^2 - x - 1 = 0 \text{ (II)}.$$

Determinando o conjunto solução S_1 da equação (I), temos: $3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \therefore x = \frac{1}{3}$.

Logo, $S_1 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Determinando o conjunto solução S_2 da equação (II), temos: $2x^2 - x - 1 = 0$.

Da fórmula resolutiva da equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, isto é,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac, \text{ temos:}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

Logo, $S_2 = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

O conjunto solução S da equação proposta é formado pelos elementos que pertencem a S_1 **ou** S_2, isto é, $S = S_1 \cup S_2$:

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, C.2, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.2, C.1, C.3, C.4, C.5, C.7.

Exercícios básicos

B.1 São dados os conjuntos:

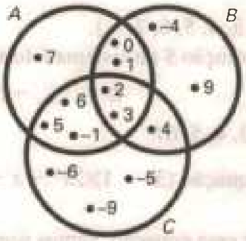
$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leqslant 2\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 3\}; \qquad D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leqslant x \leqslant 8\}.$$

Determine:

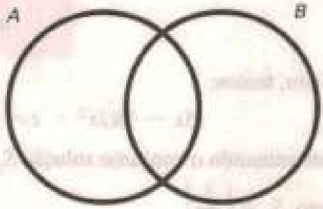
a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cup D$
d) $A \cap D$
e) $A \cup B \cup D$
f) $A \cap B \cap C$
g) $A \cap B \cap C \cap D$
h) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$
i) $(A \cap D) \cup (B \cap C)$

B.2 Dados os conjuntos A, B, C determine:

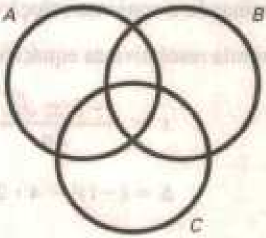
a) $A \cup B$;
b) $A \cap B$;
c) $A \cap C$;
d) $B \cap C$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $A \cup B \cup C$.



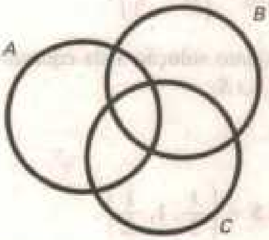
B.3 Sabendo que $A \cap B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 5, 9\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, represente no diagrama ao lado os conjuntos A e B.



B.4 Sabendo que $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, represente os conjuntos A, B e C no diagrama ao lado.



B.5 Sabendo que $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap C = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \cap C = \{1, 2, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 6, 10\}$, $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$ e $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, represente os conjuntos A, B e C no diagrama ao lado.



B.6 Considere um conjunto universo U com doze elementos. Sejam A e B dois subconjuntos de U tais que:

- $A \cap B$ possui três elementos, exatamente;
- A possui cinco elementos, exatamente;
- B possui sete elementos, exatamente.

Quantos elementos pertencem a U e não pertencem a $A \cup B$?

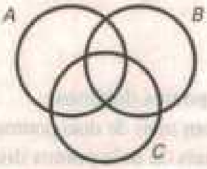
B.7 Um conjunto U possui precisamente 23 elementos. Dois subconjuntos A e B de U são tais que:

- A possui doze elementos, precisamente;
- B possui nove elementos, precisamente;
- Existem exatamente cinco elementos de U que não pertencem a $A \cup B$.

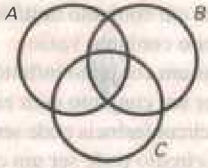
Determine o número de elementos de $A \cap B$.

B.8 Hachure nos diagramas a região que corresponde aos seguintes conjuntos:

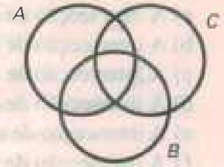
a) $A \cup B \cup C$



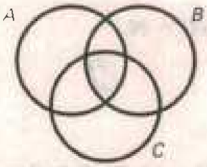
c) $(A \cap B) \cup C$



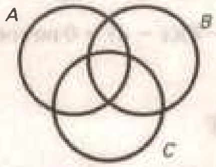
e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$



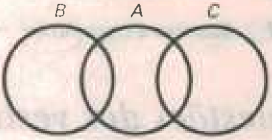
b) $A \cap B \cap C$



d) $A \cap (B \cup C)$

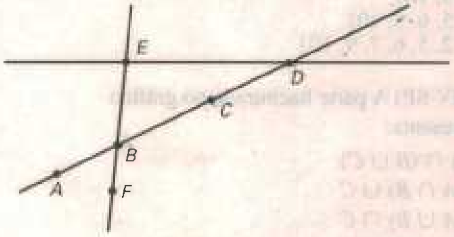


f) $A \cap (B \cup C)$



B.9 Observando a figura, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{BC}$
b) $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AD}$
c) $\overline{EF} \cap \overline{AC} = \{B\}$
d) $\overrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \varnothing$
e) $\overrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \overline{CD}$
f) $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{BE} = \{B\}$
g) $\overleftrightarrow{ED} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$
h) $\overleftrightarrow{ED} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{D\}$
i) $\overleftrightarrow{ED} \cap \overleftrightarrow{EB} \cap \overleftrightarrow{BD} = \varnothing$



Exercícios complementares

C.1 São dados os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 0\};\ B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 6 \leqslant x + 2\};\ C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -x > 0\};\ D = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{1}{x}\right\}.$$

Determine:

a) $B \cup D$
b) $B \cap D$
c) $B \cup C$
d) $B \cap C$
e) $A \cup B$
f) $C \cap D$
g) $B \cup C \cup D$
h) $B \cap C \cap D$
i) $(A \cap C) \cup B$
j) $(B \cup C) \cap (A \cup D)$

C.2 Resolva, no conjunto universo $U = \mathbb{Z}$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 5x - 8 < x + 16 \\ 6x - 5 \leqslant 7x + 1. \end{cases}$$

C.3 Resolva, no conjunto universo $U = \mathbb{Z}$, o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} 5x + 6 \leqslant 2x + 24 \\ 2x - 1 \leqslant 3x + 2 \\ 3x - 3 > 2x - 1. \end{cases}$$

C.4 Determine os valores de x, $x \in \mathbb{Z}$, de modo que $x - 3 < 3x - 5 \leq 2x + 4$.

Sugestão: essa dupla desigualdade é equivalente a $x - 3 < 3x - 5$ e $3x - 5 \leq 2x + 4$; logo, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - 3 < 3x - 5 \\ 3x - 5 \leq 2x + 4. \end{cases}$$

C.5 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) A intersecção de duas retas pode ser um conjunto unitário.
b) A intersecção de duas retas pode ser o conjunto vazio.
c) A intersecção de duas retas pode ser um conjunto infinito.
d) A intersecção de duas retas pode ser um conjunto com exatamente dois pontos distintos.
e) A intersecção de uma reta com uma circunferência pode ser um conjunto com mais de dois pontos distintos.
f) A intersecção de uma reta com um círculo pode ser um conjunto com mais de dois pontos distintos.

C.6 Resolva a equação $(x^2 - 9)(x^2 - 6x + 8) = 0$ no conjunto universo $U = \mathbb{Z}$.

C.7 Resolva a equação $(x^2 - 25)(x^2 - x - 6)(x - 4) = 0$ no conjunto universo $U = \mathbb{N}$.

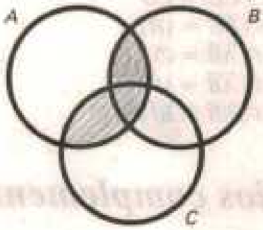
Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 8\}$. O conjunto C é:

a) $\{9, 10\}$
b) $\{5, 6, 9, 10\}$
c) $\{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$
d) $\{2, 5, 6, 7\}$
e) $A \cup B$

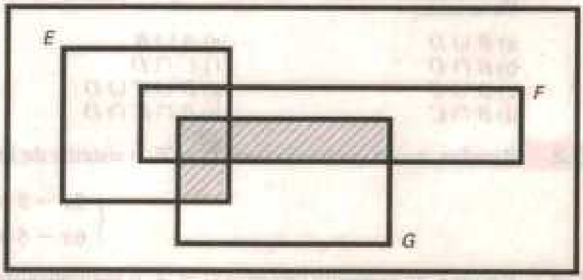
V.2 (FGV-SP) A parte hachurada no gráfico representa:

a) $A \cap (B \cup C)$
b) $(A \cap B) \cup C$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $A \cup (B \cap C)$
e) nenhuma das anteriores.



V.3 (U. Uberaba-MG) No diagrama, a parte hachurada representa:

a) $(E \cap F) \cap G$
b) $E \cap G$
c) $G \cap (E \cup F)$
d) $(E \cap F) \cup (F \cap G)$
e) $(E \cup F) \cup G$



V.4 (Cesgranrio) Se X e Y são conjuntos e $X \cup Y = Y$, pode-se sempre concluir que:

a) $X \subset Y$
b) $X = Y$
c) $X \cap Y = Y$
d) $X = \varnothing$
e) $Y \subset X$

Capítulo 4

Conjunto diferença

1. Conceituação

A idéia de diferença de conjuntos é usada freqüentemente no nosso dia-a-dia. Vejamos.

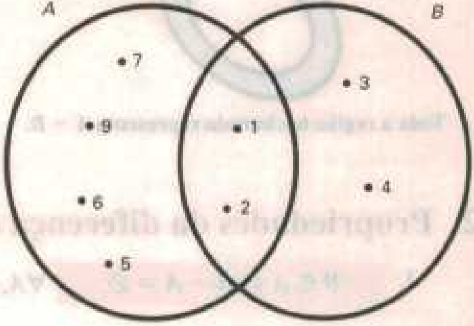
Você vai à escola todos os dias da semana?

Certamente você respondeu: "Todos os dias **menos** sábado e domingo".

Na verdade, você usou para dar essa resposta o conceito de diferença de conjuntos, ou seja, **tirou** do conjunto $A = \{\text{segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado, domingo}\}$ o conjunto $B = \{\text{sábado, domingo}\}$. Essa idéia será formalizada a seguir.

Considere os conjuntos representados no diagrama ao lado. Qual é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B?

Esse conjunto é $\{7, 9, 6, 5\}$ e se chama "**conjunto diferença** de A e B", nessa ordem.



Definição

A diferença de dois conjuntos A e B, nessa ordem, que indicaremos por $A - B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e não pertencem a B.

Em símbolos, temos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplos

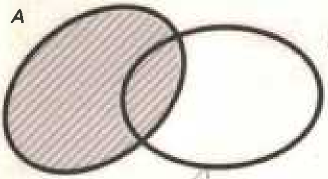
a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos:

$$A - B = \{1, 2, 3\}; \quad B - A = \{6, 7, 8, 9\}.$$

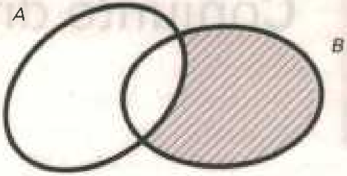
b) Sendo $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $D = \{3, 4, 5\}$, temos:

$$C - D = \{1, 2, 6\}; \quad D - C = \varnothing.$$

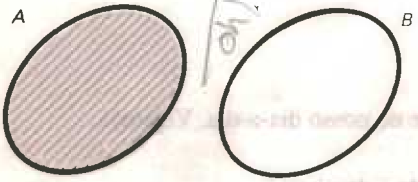
1.1. Representação em diagramas de Venn



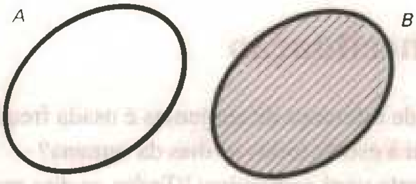
Toda a região hachurada representa $A - B$.



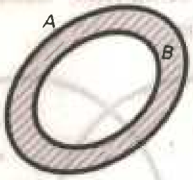
Toda a região hachurada representa $B - A$.



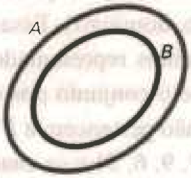
Toda a região hachurada representa $A - B$.



Toda a região hachurada representa $B - A$.



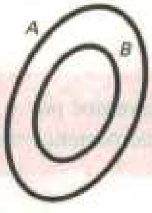
Toda a região hachurada representa $A - B$.



Se $B \subset A$, então $B - A$ é o conjunto vazio, pois todo elemento de B pertence a A.

1.2. Propriedades da diferença de conjuntos

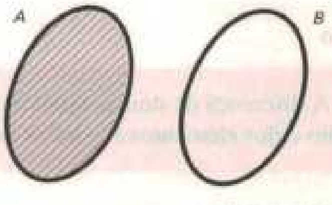
I. $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing, \quad \forall A, B.$



Em particular, temos:

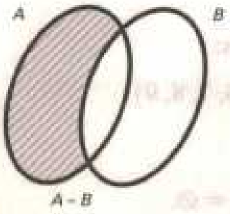
$\varnothing - A = \varnothing; \ \varnothing - \varnothing = \varnothing.$

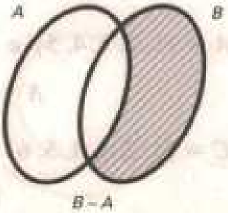
II. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A, \quad \forall A, B.$



Em particular, $A - \varnothing = A$.

III. $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A, \quad \forall A, B.$





2. Conjunto complementar

Qual é o significado da palavra "complemento"?

Complemento é "aquilo que completa", segundo o dicionário de Aurélio Buarque de Holanda. Essa é exatamente a idéia de conjunto complementar: **aquilo que completa.**

Por exemplo, dizemos que o conjunto complementar do conjunto das consoantes em relação ao conjunto das letras do nosso alfabeto é o conjunto das vogais.

Qual é o conjunto complementar do conjunto $A = \{$ janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto$\}$ em relação ao conjunto dos meses do ano? É o conjunto $B = \{$setembro, outubro, novembro, dezembro$\}$, isto é, o conjunto dos meses que faltam em A para **completar** todos os meses do ano.

Definição

> Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subset B$. Chama-se "complementar de A em relação a B", que indicamos por $\complement_{B}^{A}$, o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a B e não pertencem a A.

Em símbolos, temos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_{B}^{A} = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Note que $\{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\} = B - A$. Assim, o $\complement_{B}^{A}$ é o **conjunto diferença** $B - A$.

Logo, $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \complement_{B}^{A} = B - A.}$ Observe que a condição necessária e suficiente para que exista $\complement_{B}^{A}$ é que $A \subset B$. Caso contrário, dizemos que não existe $\complement_{B}^{A}$.

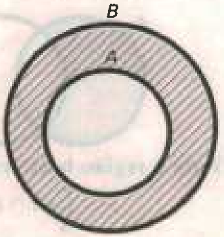
Exemplos

a) Sendo: $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que $A \subset B$; logo, existe $\complement_{B}^{A}$, que é dado por $B - A$, isto é, $\complement_{B}^{A} = B - A = \{4, 5\}$.

b) Sendo: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; logo, existe $\complement_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$ que é dado por $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, isto é, $\complement_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots -4, -3, -2, -1\}$.

c) Sendo $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, temos que $D \not\subset E$; logo, não existe $\complement_{E}^{D}$.

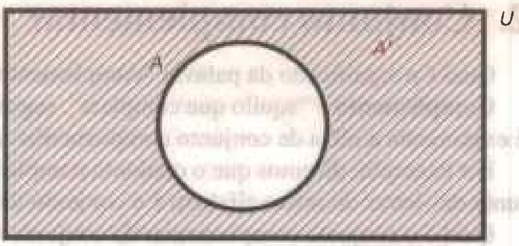
2.1. Representação em diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $\complement_{B}^{A}$.

2.2. Complementar de A em relação a um universo

Quando tivermos um conjunto universo previamente fixado, indicaremos o complementar de A, em relação a U, simplesmente por A' (ou $\bar{A}$) em vez de $\complement_U^A$.



Toda a região hachurada representa $\complement_U^A$, que pode ser indicada por A' (ou $\bar{A}$).

2.3. Propriedades do complementar

I. $\complement_A^A = \varnothing, \quad \forall A.$ II. $\complement_A^{\varnothing} = A, \quad \forall A.$ Particularmente, $\complement_{\varnothing}^{\varnothing} = \varnothing.$

III. $(A \cup B)' = A' \cap B', \quad \forall A, B.$ IV. $(A \cap B)' = A' \cup B', \quad \forall A, B.$

Essas duas últimas propriedades são conhecidas como "leis de De Morgan" (do inglês Augustus de Morgan, 1806-1871, considerado um dos pioneiros da lógica moderna).

Exercícios resolvidos

R.1 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, determinar:

a) $B - A$; b) $A - B$; c) $\complement_B^A$; d) $\complement_A^B$; e) $\complement_A^A$.

Resolução

a) $B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$. Logo, $B - A = \{0, 6, 7\}$.

b) $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Como todo elemento de A é também elemento de B (ou seja, $A \subset B$), temos que $A - B = \varnothing$.

c) Como $A \subset B$, temos garantida a existência de $\complement_B^A = B - A$. Logo, $\complement_B^A = \{0, 6, 7\}$.

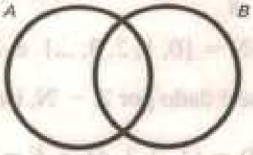
d) Como $B \not\subset A$, temos que não existe $\complement_A^B$.

e) Como $A \subset A$, temos garantida a existência de $\complement_A^A = A - A = \varnothing$.

R.2 Dado o diagrama ao lado, hachurar a região correspondente a:

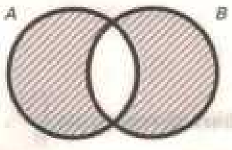
a) $(A - B) \cup (B - A)$;

b) $\complement_A^{(A \cap B)}$.



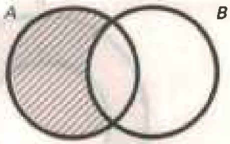
Resolução

a) Hachuramos as regiões $A - B$ e $B - A$, representando-as no diagrama:



Toda a região hachurada representa $(A - B) \cup (B - A)$.

b) Como $A \cap B$ é subconjunto de A, temos garantida a existência de $\complement_A^{(A \cap B)} = A - (A \cap B)$:

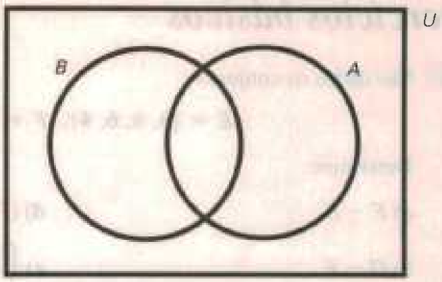


Toda a região hachurada representa $\complement_A^{(A \cap B)}$.

R.3 Fixado o universo U, e sendo A', B' e $(A \cup B)'$, respectivamente, os complementares de A, B e $A \cup B$, em relação a U, hachurar no diagrama as regiões correspondentes a:

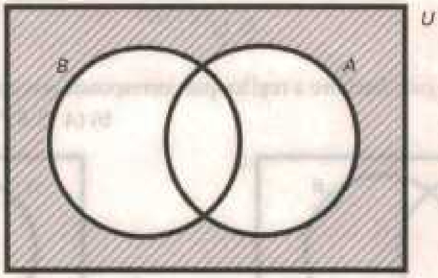
a) $(A \cup B)'$;

b) $A' \cap B'$.



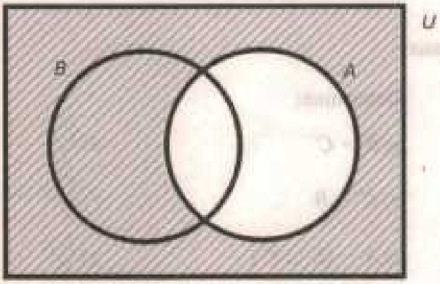
Resolução

a) Temos que $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$:

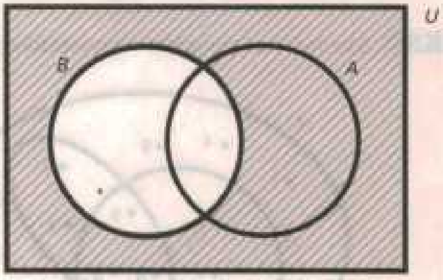


b) Temos que $A' \cap B' = (U - A) \cap (U - B)$. Hachurando por partes:

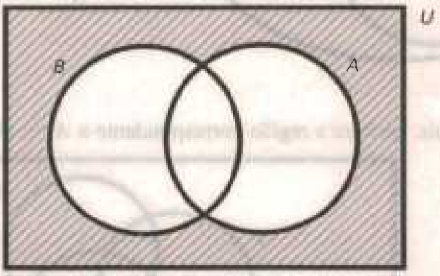
1ª) $A' = U - A$:



2ª) $B' = U - B$:



3ª) Finalmente, $A' \cap B'$:



Note que a região hachurada no item (a) é a mesma do item (b); assim, temos $(A \cup B)' = A' \cap B'$, que é uma das leis de De Morgan.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, C.2, C.4, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, C.1, C.3, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 São dados os conjuntos:

$$E = \{3, 8, 6, 4\},\quad F = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\} \text{ e } G = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Determine:

a) $F - E$

b) $G - E$

c) $(E \cup G) - F$

d) $(F - G) \cup (G - F)$

e) $\complement_F^E$

f) $\complement_F^{(E \cap G)}$

g) $\complement_F^G$

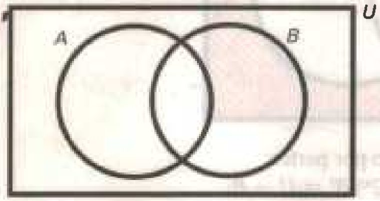
h) $\complement_E^E$

i) $\complement_F^{\varnothing}$

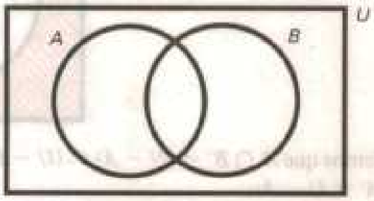
B.2 Nos diagramas a seguir, hachure a região que corresponde aos conjuntos indicados:

Propiedade!

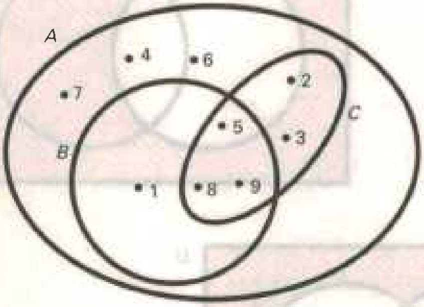
a) $A' \cup B'$



b) $(A \cap B)'$



B.3 São dados os conjuntos representados pelo diagrama:



Determine:

a) $B - C$

b) $C - B$

c) $A - (B \cup C)$

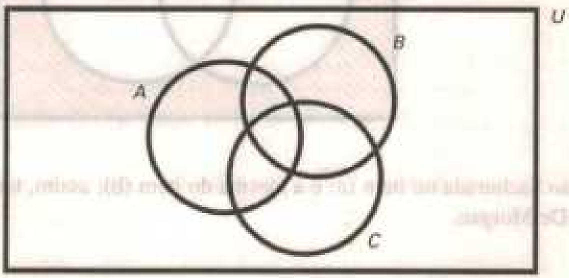
d) $\complement_A^B$

e) $\complement_A^C$

f) $\complement_A^{(B \cup C)}$

g) $\complement_C^B$

B.4 No diagrama a seguir, hachure a região correspondente a $A' - (B \cup C)$.



B.5 Um conjunto universo U é tal que $n(U) = 27$ e os subconjuntos A e B de U são tais que:

- $n(A \cup B) = 24$;
- $n(A') = 10$;
- $n(B') = 12$.

O símbolo $n(X)$ indica o número de elementos do conjunto X.

Determine o número de elementos do conjunto $A \cap B$.

B.6 Um conjunto universo U é tal que $n(U) = 44$. Três subconjuntos A, B e C de U são tais que:

- $n(A) = 18$;
- $n(B) = 22$;
- $n[(A \cup B \cup C)'] = 9$;
- $n(A \cap B \cap C) = 6$;
- $n(A \cap B) = 9$;
- $n(A \cap C) = 8$;
- $n(B \cap C) = 11$.

Determine o número de elementos do conjunto C.

B.7 Um conjunto universo U é tal que $n(U) = 39$. Dois subconjuntos A e B de U são tais que:

$$n[(A \cap B)'] = 32;\quad n(A - B) = 9;\quad n(B - A) = 13.$$

Determine o número de elementos de $(A \cup B)'$.

Exercícios complementares

C.1 Chama-se "**diferença simétrica** entre dois conjuntos A e B" e indica-se por $A \Delta B$ o conjunto $(A - B) \cup (B - A)$, isto é,

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, determine $A \Delta B$.

C.2 Dois conjuntos A e B são tais que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\},\ A \cap B = \{1, 2\},\ A - B = \{3, 5\}.$$

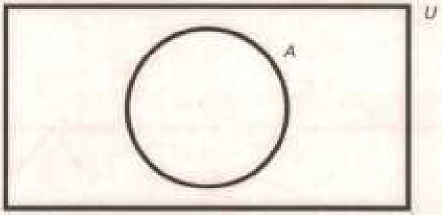
Determine o conjunto B. (**Sugestão:** represente os conjuntos em diagrama.)

C.3 Três conjuntos A, B e C são tais que:

- $A \cap B \cap C = \{a, i\}$;
- $A \cap B = \{a, i, h\}$;
- $A \cap C = \{a, i, e, f\}$;
- $B \cap C = \{a, i, j\}$;
- $B - (A \cup C) = \{b, c\}$;
- $A - (B \cup C) = \{g\}$;
- $C - (A \cup B) = \{d\}$.

Determine os conjuntos A, B e C.

C.4 Represente no diagrama seguinte o conjunto $(A')'$.



C.5 Sendo A um subconjunto de um universo U, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $A' \cap A = \varnothing$;
b) $A' \cup A = U$;
c) $A' - A = A'$;
d) $A' - A = A$;
e) $A - A' = A'$;
f) $U - A' = A$;
g) $U - A = A$.

C.6 Sejam A, B, E e F conjuntos quaisquer tais que $E = \complement_B^A$ e $F = \complement_B^E$. Qual, dentre as alternativas a seguir, é correta?

a) $A = B$
b) $A = E$
c) $E = F$
d) $F = A$
e) $E = B$

C.7 Complete cada proposição com $\subset$ ou $\supset$ onde A e B são subconjuntos quaisquer de um universo U:

a) A .... $A - B$
b) $A - B$ .... B'
c) $A \cap B$ .... $(A')'$
d) $A \cup B$ .... $B - A$
e) $A \cap B$ .... $(B - A)'$
f) $(A \cap B)'$ .... $(A - B) \cup (B - A)$

C.8 Considere um ponto O de um plano α e um número positivo r.
São dados os conjuntos (PO indica a distância de P a O):
$A = \{P \in \alpha \mid PO = r\}$; $B = \{Q \in \alpha \mid QO \leq r\}$; $D = \{T \in \alpha \mid TO < r\}$.
Determine os conjuntos:
a) $\complement_{B}^{D}$ b) $\complement_{B}^{A}$ c) $\complement_{B}^{(A \cup D)}$ d) $\complement_{A}^{(A \cup B)}$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fatec-SP) Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ tais que, simultaneamente,

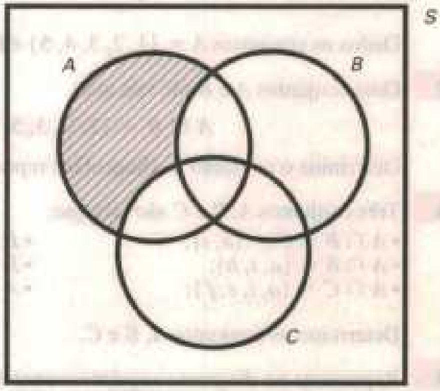
$$A \cap (C - B) = \{1\},\ B \cap (A - C) = \{2\} \text{ e } C \cap (B - A) = \{3\}.$$

Se $Y = A \cap B \cap C$, então:
a) $Y = \varnothing$ b) $Y = \{1\}$ c) $Y = \{2\}$ d) $Y = \{3\}$ e) n. d. a.

V.2 (FGV-RJ) Sendo A e B dois conjuntos tais que $A \cap B = \varnothing$, então $\complement_{A}^{(A \cap B)} \cap \complement_{(B \cup A)}^{B}$ é o conjunto:
a) A b) B c) $\varnothing$ d) $A \cap B$ e) $A \cup B$

V.3 (FGV-RJ) A parte hachurada no diagrama representa:
a) $\overline{(B \cup C)} \cup C$
b) $\overline{(B \cup C)}$
c) $\overline{C} \cap \overline{B} \cap \overline{A}$
d) $A - (B \cup C)$
e) $A - (A \cap B \cap C)$

(**Observação:** $\overline{X}$ é complementar de X em relação a S.)



Capítulo 5

Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos

Estudaremos neste capítulo alguns problemas práticos que envolvem quantidades de elementos de conjuntos finitos. Apresentaremos alguns problemas resolvidos e proporemos outros para você.

Lembremos: o símbolo $n(A)$, que se lê "n de A", indica o número de elementos do conjunto finito A.

Exercícios resolvidos

R.1 Foram entrevistadas cinqüenta donas-de-casa sobre suas preferências em relação a duas marcas A e B de sabão em pó. Os resultados da pesquisa são precisamente:

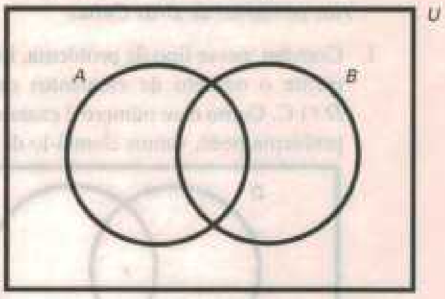
- 21 pessoas responderam que usam a marca A;
- dez pessoas responderam que usam a marca A e a marca B;
- cinco pessoas responderam que não usam nenhuma das duas marcas.

De acordo com esses dados, quantas pessoas usam **somente** a marca B?

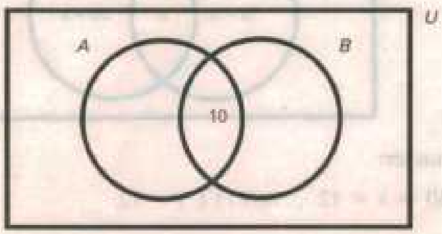
Resolução

Sejam:

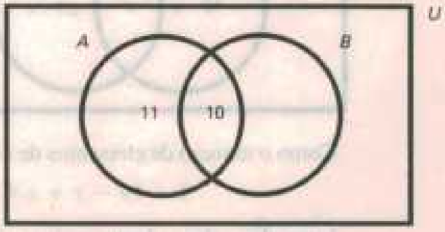
- U o conjunto universo das cinqüenta pessoas entrevistadas;
- A o conjunto das pessoas que usam a marca A;
- B o conjunto das pessoas que usam a marca B.



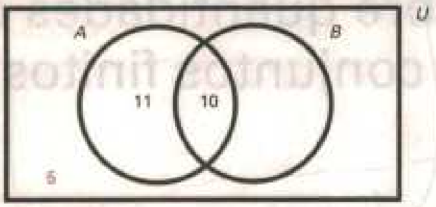
I. Inicialmente, vamos considerar o conjunto $A \cap B$ que é aquele das pessoas que usam as duas marcas, ou seja, usam a marca A e também a marca B. Tal conjunto possui dez elementos. Para nos orientar, vamos escrever o número 10 na região correspondente a $A \cap B$:



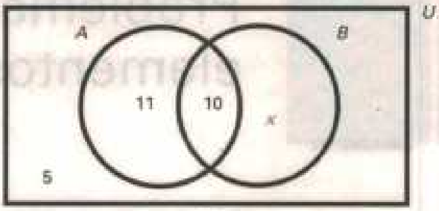
II. O conjunto A é aquele das pessoas que usam a marca A. Tal conjunto possui 21 elementos, porém na parte (I) já foram consideradas dez pessoas que usam a marca A, faltando, portanto, onze pessoas para completar o conjunto A. O número 11 deve ser indicado na região $A - B$:



III. O conjunto $(A \cup B)'$ é aquele das pessoas que não usam nenhuma das duas marcas. O número de elementos desse conjunto é cinco:



IV. O conjunto $B - A$ é aquele das pessoas que usam somente a marca B. Seja x o número de elementos desse conjunto:



Como $n(U) = 50$, devemos ter: $5 + 11 + 10 + x = 50 \Rightarrow x = 24 \quad \therefore \; n(B - A) = 24$.
Logo, 24 pessoas usam somente a marca B.

R.2 Um professor de português passou uma pesquisa numa sala de aula de trinta alunos, perguntando quem havia lido as obras *Dom Casmurro* ou *Memórias póstumas de Brás Cubas*, ambas de Machado de Assis. O resultado da pesquisa foi precisamente:

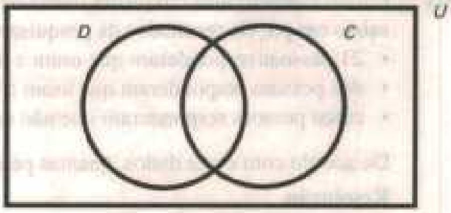
- dezenove alunos leram *Dom Casmurro*;
- vinte alunos leram *Memórias póstumas de Brás Cubas;*
- três alunos não leram nenhum dos dois livros.

Com base nesse resultado, quantos alunos leram as duas obras?

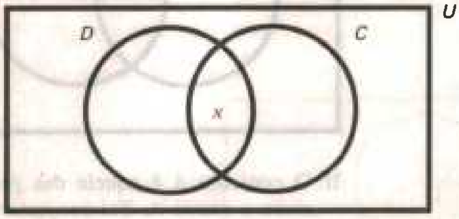
Resolução

Sejam:

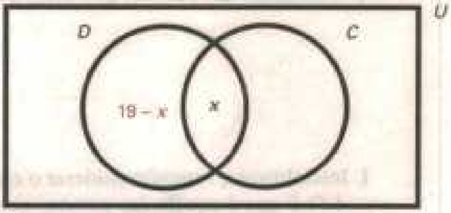
- U o conjunto universo dos trinta alunos entrevistados;
- D o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro*;
- C o conjunto dos alunos que leram *Memórias póstumas de Brás Cubas.*



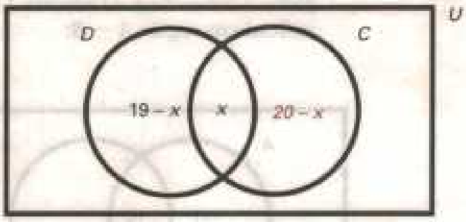
I. Convém, nesse tipo de problema, indicar inicialmente o número de elementos da intersecção $D \cap C$. Como esse número é exatamente o que o problema pede, vamos chamá-lo de x:



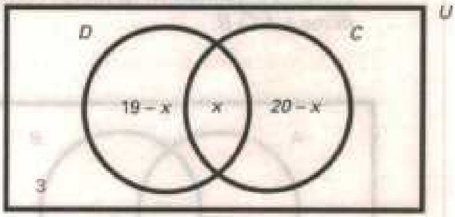
II. O conjunto D tem dezenove elementos. Como já admitimos que x elementos já estão em D, faltam portanto $19 - x$ elementos, que devem ser indicados na região $D - C$:



III. O conjunto C tem vinte elementos. Já admitimos x elementos em C, faltam portanto $20 - x$ elementos, que devem ser indicados na região $C - D$:



IV. Três alunos não leram nenhum dos dois livros. Assim, o conjunto $(D \cup C)'$ deve ter três elementos:



Como o número de elementos de U é 30, devemos ter:

$$3 + 19 - x + x + 20 - x = 30 \Rightarrow x = 12 \quad \therefore \; n(D \cap C) = 12.$$

Logo, doze alunos leram as duas obras.

R.3 Numa pesquisa de mercado foram entrevistadas 61 pessoas sobre suas preferências em relação a três jornais *A*, *B* e *C*. O resultado da pesquisa é precisamente:

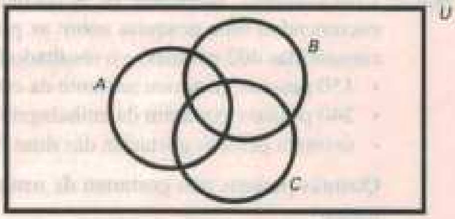
- 44 pessoas lêem o jornal *A*;
- 37 pessoas lêem o jornal *B*;
- 32 pessoas lêem os jornais *A* e *C*;
- 28 pessoas lêem os jornais *A* e *B*;
- 26 pessoas lêem os jornais *B* e *C*;
- vinte pessoas lêem os jornais *A*, *B* e *C*;
- sete pessoas não lêem jornal.

Com base nesse resultado, quantas pessoas lêem o jornal *C*?

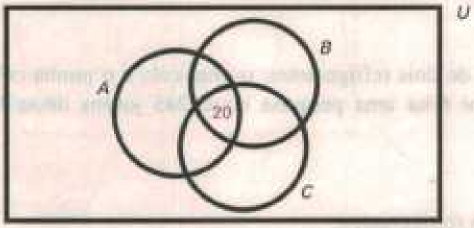
Resolução

Sejam:

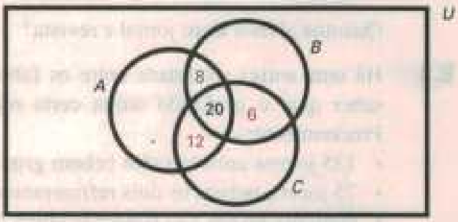
- *U* o conjunto universo das 61 pessoas entrevistadas;
- *A* o conjunto das pessoas que lêem o jornal *A*;
- *B* o conjunto das pessoas que lêem o jornal *B*;
- *C* o conjunto das pessoas que lêem o jornal *C*.



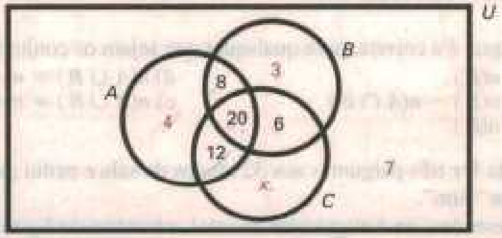
I. Convém indicar inicialmente o número de elementos de $A \cap B \cap C$, isto é, o número de pessoas que lêem os jornais *A*, *B* e *C*:



II. A seguir indicamos o número de elementos de $A \cap B$ (28), $A \cap C$ (32) e $B \cap C$ (26):



III. Indicamos agora o número de elementos de *A* (44), de *B* (37) e de $(A \cup B \cup C)'$ (7); como não conhecemos o número de elementos de *C*, indicamos por *x* o número de elementos de $C - (A \cup B)$:



Como o número de elementos de *U* é 61, devemos ter:

$$7 + x + 12 + 20 + 6 + 3 + 8 + 4 = 61 \Rightarrow x = 1 \;\therefore\; n(C) = 12 + 20 + 6 + 1 = 39.$$

Logo, 39 pessoas lêem o jornal *C*.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Numa festa, 29 pessoas discutiam sobre dois filmes A e B. Precisamente:

- treze dessas pessoas assistiram ao filme A;
- cinco pessoas assistiram aos dois filmes;
- seis pessoas não assistiram a nenhum dos dois filmes.

Quantas pessoas assistiram ao filme B, sabendo que todas as 29 pessoas opinaram?

B.2 Uma empresa, fabricante de achocolatados, pretende lançar um novo produto no mercado. Para isso, encomendou uma pesquisa sobre as preferências dos consumidores entre duas embalagens A e B. Foram consultadas 402 pessoas, e o resultado foi precisamente o seguinte:

- 150 pessoas gostaram somente da embalagem A;
- 240 pessoas gostaram da embalagem B;
- sessenta pessoas gostaram das duas embalagens.

Quantas pessoas não gostaram de nenhuma das duas embalagens, sabendo que todas as 402 pessoas opinaram?

B.3 Quarenta e um alunos de um colégio opinaram numa pesquisa em que eram solicitados a responder se eram leitores de jornal ou revista. Concluiu-se que exatamente:

- 24 alunos lêem jornal;
- trinta alunos lêem revista;
- cinco alunos não lêem jornal nem revista.

Quantos alunos lêem jornal e revista?

B.4 Há uma antiga rivalidade entre os fabricantes de dois refrigerantes: o grud-cola e o pimba-cola. Para se saber qual o preferido numa certa região, foi feita uma pesquisa entre 245 jovens dessa localidade. Precisamente:

- 135 jovens entrevistados bebem grud-cola;
- 75 jovens bebem os dois refrigerantes;
- quarenta jovens não bebem nenhum dos dois refrigerantes.

Sabendo que todos os 245 jovens opinaram, conclua você qual o refrigerante preferido por eles e quantos jovens bebem esse refrigerante.

Exercícios complementares

C.1 Dentre as alternativas, qual é a correta, para quaisquer que sejam os conjuntos A e B?

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

b) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

c) $n(A \cup B) = n(A) - n(B)$

d) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A)$

e) $n(A \cup B) = n(A) \cdot n(B)$

C.2 Um professor de história fez três perguntas aos 32 alunos da sala e pediu para que os alunos levantassem o braço se a resposta fosse "Sim".

1ª pergunta: "Quem já estudou, na Antiguidade oriental, a história do Egito?"
2ª pergunta: "Quem já estudou, na Antiguidade ocidental, a história do mundo grego?"
3ª pergunta: "Quem já estudou, na Antiguidade ocidental, a história do mundo romano?"

O professor observou que exatamente:

- dezessete alunos responderam "Sim" à 1ª pergunta;
- dezenove alunos responderam "Sim" à 2ª pergunta;
- 21 alunos responderam "Sim" à 3ª pergunta;
- onze alunos responderam "Sim" à 1ª e à 2ª pergunta;
- treze alunos responderam "Sim" à 2ª e à 3ª pergunta;
- doze alunos responderam "Sim" à 1ª e à 3ª pergunta;
- dez alunos responderam "Sim" às três perguntas.

Quantos alunos da sala não estudaram nem o Egito, nem o mundo grego, nem o mundo romano?

C.3 Numa prova sobre o corpo humano constavam três questões: a primeira, sobre o sistema circulatório; a segunda, sobre o sistema respiratório; e a terceira, sobre o sistema nervoso. Sabe-se que, dos 29 alunos que fizeram a prova, precisamente:

- quinze alunos acertaram a primeira questão;
- sete alunos acertaram somente a segunda questão;
- um aluno acertou somente a terceira questão;
- onze alunos acertaram a segunda e a terceira questão;
- nenhum aluno errou todas as questões.

Quantos alunos acertaram as três questões?

C.4 Nas favelas, devido às péssimas condições sanitárias, as doenças proliferam com muita rapidez. Em exames de fezes, feitos em 41 crianças faveladas, foi constatada a presença de três tipos de bactéria (A, B e C). Exatamente:

- 23 crianças apresentaram a bactéria A;
- 25 crianças apresentaram a bactéria B;
- 22 crianças apresentaram a bactéria C;
- onze crianças apresentaram as bactérias A e B;
- doze crianças apresentaram as bactérias B e C;
- nove crianças apresentaram as bactérias A e C.

Sabendo que cada uma das 41 crianças apresentou pelo menos uma das bactérias, quantas crianças apresentaram as três bactérias?

C.5 O departamento de seleção de pessoal de uma indústria automobilística aplicou um teste em 44 candidatos. Uma das perguntas foi: você já trabalhou no

a) setor de montagem? b) setor de pintura? c) setor de eletricidade?

Concluiu-se que todos os candidatos têm experiência em pelo menos um dos setores e que exatamente:

- 28 pessoas trabalharam em montagem;
- quatro pessoas trabalharam só em montagem;
- uma pessoa trabalhou só em eletricidade;
- 21 pessoas já trabalharam em montagem e pintura;
- dezesseis pessoas trabalharam em pintura e eletricidade;
- treze pessoas trabalharam em montagem e eletricidade.

I. Quantas pessoas têm experiência nos três setores?
II. Quantas pessoas têm experiência em pintura?
III. Quantas pessoas têm experiência em eletricidade?

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC/Campinas-SP) Numa comunidade constituída de 1 800 pessoas, há três programas de tevê favoritos: esporte (E), novela (N) e humorismo (H). A tabela a seguir indica quantas pessoas assistem a esses programas:

Programas	E	N	H	E e N	N e H	E e H	E, N e H
Número de telespectadores	400	1 220	1 080	220	800	180	100

Através desses dados, verifica-se que o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer dos três programas é:

a) 100 b) 200 c) 900 d) Os dados do problema estão incorretos. e) n.d.a.

V.2 (Cesgranrio) Em uma universidade são lidos dois jornais A e B. Exatamente 80% dos alunos lêem o jornal A; e 60%, o jornal B. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, o percentual de alunos que lêem ambos é:

a) 48% b) 140% c) 60% d) 80% e) 40%

V.3 (Cescem-SP) Um subconjunto X de números naturais contém precisamente doze múltiplos de 4, sete múltiplos de 6, cinco múltiplos de 12 e oito números ímpares. O número de elementos de X é:

a) 32 b) 27 c) 24 d) 22 e) 20

Capítulo 6

Classificação dos números

1. Introdução

Quem poderá dizer em que momento da história surgiu o conceito de número? Talvez tenha surgido com o próprio homem? Ou mesmo antes da própria humanidade?

"Darwin, no *The descent of man* (1871), observou que alguns animais superiores possuem capacidades como memória e imaginação, e hoje é ainda mais claro que as capacidades de distinguir número, tamanho, ordem e forma – rudimentos de um sentido matemático – não são propriedades exclusivas da humanidade. Experiências com corvos, por exemplo, mostram que pelo menos alguns pássaros podem distinguir conjuntos com até quatro elementos." (Carl B. Boyer, em *História da matemática*, editado pela Editora Edgard Blücher e pela Editora da Universidade de São Paulo.)

Ainda que essa discussão filosófica cause polêmicas, não se pode pôr em dúvida a importância do número na história do homem. O conceito de número evoluiu e, provavelmente, irá muito além do que conhecemos hoje.

Para organizarmos o estudo dos números vamos classificá-los em conjuntos:

$\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais);
$\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros);
$\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais);
$\mathbb{Q}'$ (conjunto dos números irracionais);
$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).

2. Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

Admitiremos a existência do conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, denominado "conjunto dos números naturais".

Podemos caracterizar número natural como sendo todo aquele que resulta da **contagem de unidades**; por exemplo, todo número que resulta da contagem de pessoas é um número natural (relatórios recentes da ONU (Organização das Nações Unidas) acusaram que cerca de 1000000000 de pessoas no mundo vivem em estado de miséria absoluta; o número 1000000000 é um número natural – e assustador!).

HULTON DEUTSCH/STOCK PHOTOS

"Todo ser humano tem direito a alimentação, moradia, saúde e educação." É o que está escrito na chamada "Declaração Universal dos Direitos Humanos", de 1948.

Nota

A construção dos números naturais pode ser feita através da teoria dos conjuntos (ver *Teoria ingênua dos conjuntos*, de Paul R. Halmos, publicado pela Editora Polígono, São Paulo), porém tal construção foge às pretensões desta obra.

Indicaremos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto formado por todos os números naturais exceto o zero:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}.$$

Logo, temos: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

2.1. Propriedades

- A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural.

Exemplo

$$\underbrace{8}_{\textbf{Natural}} + \underbrace{12}_{\textbf{Natural}} = \underbrace{20}_{\textbf{Natural}}$$

- O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.

Exemplo

$$\underbrace{6}_{\textbf{Natural}} \cdot \underbrace{5}_{\textbf{Natural}} = \underbrace{30}_{\textbf{Natural}}$$

- Se n é um número natural, então $n + 1$ é um número natural tal que:
  I. n e $n + 1$ são chamados de "números naturais **consecutivos**";
  II. n é o **antecessor** de $n + 1$;
  III. $n + 1$ é o **sucessor** de n.

Exemplo

3 e 4 são consecutivos; 3 é o antecessor de 4; 4 é o sucessor de 3.

3. Conjuntos dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Os números naturais não são suficientes para resolvermos todos os problemas matemáticos que aparecem no dia-a-dia. Por exemplo, em economia, define-se **balança comercial** como a diferença entre o valor total das exportações e o das importações de um país, nessa ordem.

Observe a tabela a seguir, que mostra as exportações, as importações e a balança comercial de um país nos anos 1990, 1991 e 1992 (em milhões de dólares):

	Exportações	Importações	Balança comercial
1990	20.200	18.000	20.200 − 18.000 = 2.200
1991	26.000	23.000	26.000 − 23.000 = 3.000
1992	19.000	21.000	19.000 − 21.000 = ...

Note que não existe nenhum número natural que represente a balança comercial desse país no ano de 1992, pois, para que a diferença $a - b$ exista em $\mathbb{N}$, devemos ter $a \geqslant b$.

Para se representar o resultado de 19.000 − 21.000 é necessário um outro tipo de número, não-natural: o número negativo −2.000. Assim, dizemos que a balança comercial desse país em 1992 foi −2.000 milhões de dólares, ou seja, o país exportou 2.000 milhões de dólares menos do que importou.

Não se sabe exatamente quando se fez uso dos números negativos pela primeira vez. Sabe-se porém que por volta do ano 300 a.C. os chineses já faziam cálculos usando duas coleções de barras de bambu, marfim ou ferro – uma de barras vermelhas para indicar os números positivos e a outra de barras pretas para indicar os números negativos. Provavelmente esses cálculos se referiam a débitos e créditos resultantes do comércio de mercadorias.

Uma parte do conjunto dos números negativos é formada pelos números $-1, -2, -3, -4, \ldots$, que chamamos de "números negativos **inteiros**". Denominamos **conjunto dos números inteiros** o conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que merecem destaque são descritos a seguir.

$\mathbb{Z}^*$ (conjunto dos números inteiros não-nulos):

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z} - \{0\}, \text{ ou, ainda, } \mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0\}.$$

$\mathbb{Z}^*_+$ (conjunto dos números inteiros positivos):

$$\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \text{ ou, ainda, } \mathbb{Z}^*_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}.$$

$\mathbb{Z}_+$ (conjunto dos números inteiros não-negativos):

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \text{ ou, ainda, } \mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 0\}.$$

Nota

Não podemos denominar $\mathbb{Z}_+$ como conjunto dos inteiros positivos porque o **zero** não é positivo.

$\mathbb{Z}^*_-$ (conjunto dos números inteiros negativos):

$$\mathbb{Z}^*_- = \{\ldots -4, -3, -2, -1\}, \text{ ou, ainda, } \mathbb{Z}^*_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}.$$

$\mathbb{Z}_-$ (conjunto dos números inteiros não-positivos):

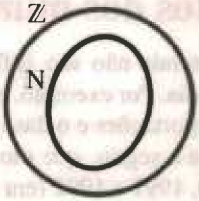
$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0\}, \text{ ou, ainda, } \mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 0\}.$$

Nota

Não podemos denominar $\mathbb{Z}_-$ como conjunto dos números inteiros negativos porque o **zero** não é negativo.

3.1. Propriedades

- Todo número natural é inteiro, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



Exemplo

Temos que $4 \in \mathbb{N}$; logo, $4 \in \mathbb{Z}$.

- A soma de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

Exemplo

$$\underbrace{-18}_{\textbf{Inteiro}} + \underbrace{20}_{\textbf{Inteiro}} = \underbrace{2}_{\textbf{Inteiro}}$$

- A diferença entre dois inteiros quaisquer é um número inteiro.

Exemplo

$$\underbrace{(-12)}_{\textbf{Inteiro}} - \underbrace{(-7)}_{\textbf{Inteiro}} = \underbrace{-5}_{\textbf{Inteiro}}$$

- O produto de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

Exemplo

$$\underbrace{(-3)}_{\textbf{Inteiro}} \cdot \underbrace{2}_{\textbf{Inteiro}} = \underbrace{-6}_{\textbf{Inteiro}}$$

- Se n é um número inteiro, então $n + 1$ é um número inteiro tal que:

I. n e $n + 1$ são chamados de "números inteiros **consecutivos**";
II. n é o **antecessor** de $n + 1$;
III. $n + 1$ é o **sucessor** de n.

Exemplo

-5 e -4 são consecutivos; -5 é o antecessor de -4; -4 é o sucessor de -5.

- Todo número inteiro possui sucessor e antecessor.
- Para todo número inteiro x existe o inteiro y, denominado "**oposto** de x", tal que: $y + x = x + y = 0$.

Indicaremos o oposto de x por $-x$.

Exemplos

a) O oposto de 5 é -5. b) O oposto de -8 é $-(-8) = 8$. c) O oposto de 0 é $-0 = 0$.

4. O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

As necessidades de cada época têm exigido o surgimento de novos números.

Os números **racionais** foram criados a partir da necessidade de dividir dois números inteiros (por exemplo, 1 : 4). Essa divisão, tão freqüente em nosso cotidiano, é fundamental para resolver muitos problemas práticos, tais como: um homem deseja dividir, em partes iguais, sua fazenda entre seus quatro filhos. Que parte da fazenda caberá a cada filho? Hoje em dia esse problema é trivial: sabemos que a cada filho caberá $\frac{1}{4}$ ou 0,25 da fazenda. Porém, se você estivesse vivendo numa época em que ainda não existissem as frações, sentiria necessidade delas para responder ao problema.

Segundo Carl B. Boyer, em *História da matemática*, acredita-se que já na Idade do Bronze tenha surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações.

4.1. Número racional

Número racional é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números **inteiros**:

$$\frac{a}{b},\ \{a, b\} \subset \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0.$$

Exemplos

a) 0,25 é número racional, pois pode ser representado por uma razão entre dois números **inteiros** $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \text{etc.}\right)$.

b) 3 é número racional, pois pode ser representado por uma razão entre dois **inteiros** $\left(\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \text{etc.}\right)$.

Outros exemplos de números racionais: 0, $\frac{3}{8}$, $-\frac{4}{3}$, 3,26, etc.

Indicamos o conjunto de todos os números racionais pela letra $\mathbb{Q}$.

Assim sendo, temos: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$,

isto é, $\mathbb{Q}$ é o conjunto de todos os números da forma $\dfrac{a}{b}$, com a inteiro e b inteiro não-nulo.

Alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que merecem destaque são:

$\mathbb{Q}^*$ (conjunto dos números racionais não-nulos): $\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$.

$\mathbb{Q}_+^*$ (conjunto dos números racionais positivos): $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

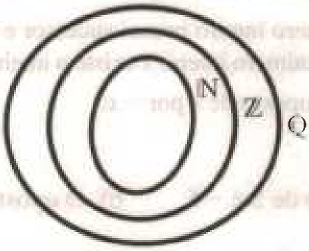
$\mathbb{Q}_+$ (conjunto dos números racionais não-negativos): $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0\}$.

$\mathbb{Q}_-^*$ (conjunto dos números racionais negativos): $\mathbb{Q}_-^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{Q}_-$ (conjunto dos números racionais não-positivos): $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\}$.

Vale a pena observar que todo número inteiro é racional, pois todo inteiro x pode ser escrito sob forma de razão entre inteiros: $\dfrac{x}{1}$. Já sabemos também que todo número natural é inteiro; logo, todo número natural também é racional.

Assim sendo, podemos representar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ no diagrama ao lado.



4.2. Propriedades

- A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.

Exemplo

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{\textbf{Racional}} + \underbrace{5}_{\textbf{Racional}} = \underbrace{\frac{17}{3}}_{\textbf{Racional}}$$

- A diferença entre dois números racionais quaisquer é um número racional.

Exemplo

$$\underbrace{3}_{\textbf{Racional}} - \underbrace{0,8}_{\textbf{Racional}} = \underbrace{2{,}2}_{\textbf{Racional}}$$

- O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

Exemplo

$$\underbrace{\frac{3}{2}}_{\textbf{Racional}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\textbf{Racional}} = \underbrace{\frac{3}{10}}_{\textbf{Racional}}$$

- O quociente de dois números racionais, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

Exemplo

$$\underbrace{-\frac{4}{3}}_{\textbf{Racional}} : \underbrace{2}_{\textbf{Racional}} = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{\textbf{Racional}}$$

- Dados dois números racionais p e q, com $p < q$, existe um número racional m tal que:

$$p < m < q.$$

Exemplo

Dados 0,7 e 0,8, existe o número 0,75 tal que $0{,}7 < 0{,}75 < 0{,}8$. Essa propriedade nos garante que entre dois números racionais distintos **sempre** existe um outro número racional. Podemos então entender que entre dois números racionais diferentes existem infinitos números racionais.

- Para todo número racional r, existe o racional s, denominado "**oposto de** r", tal que:

$$s + r = r + s = 0.$$

Indicaremos o oposto de r por $-r$.

Exemplos

a) O oposto de $\frac{3}{5}$ é $-\frac{3}{5}$.

b) O oposto de $-0{,}6$ é $-(-0{,}6) = 0{,}6$.

- Para todo número racional r, $r \neq 0$, existe o racional s, denominado "**inverso ou recíproco de** r", tal que:

$$rs = sr = 1.$$

Indicaremos o inverso (recíproco) de r por $\frac{1}{r}$.

Exemplos

a) O inverso (ou recíproco) de 5 é $\frac{1}{5}$.

b) O inverso (ou recíproco) de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$.

c) O inverso (ou recíproco) de $-\frac{2}{9}$ é $-\frac{9}{2}$.

Exercícios resolvidos

R.1 Classificar cada uma das afirmações como V ou F:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^*$
c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
d) $0 \in \mathbb{Z}_-$
e) $3 \in \mathbb{Z}_-$
f) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$
g) $0{,}8 \in \mathbb{Q}$
h) $0{,}86 \in \mathbb{Z}$
i) $-3{,}4 \in \mathbb{Q}$

Resolução

a) V, pois todo número natural é, também, inteiro;
b) F, pois zero pertence a $\mathbb{N}$ e não pertence a $\mathbb{Q}^*$;
c) V, pois todo número inteiro x pode ser escrito como uma razão entre dois inteiros: $\frac{x}{1}$; logo, todo inteiro é racional.
d) V, pois $\mathbb{Z}_-$ é o conjunto dos inteiros não-positivos e como zero é inteiro e não-positivo, temos que $0 \in \mathbb{Z}_-$.
e) F, pois $\mathbb{Z}_-$ é o conjunto dos inteiros não-positivos e como 3 é inteiro positivo, temos que $3 \notin \mathbb{Z}_-$.
f) V, pois $\frac{3}{4}$ é uma razão entre dois inteiros (com o denominador diferente de zero); logo, $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.
g) V, pois 0,8 pode ser representado por uma razão entre dois inteiros: $\frac{8}{10}$; logo, $0{,}8 \in \mathbb{Q}$.
h) F, pois 0,86 não é número inteiro.
i) V, pois $-3{,}4$ pode ser representado por uma razão entre dois inteiros: $\frac{-34}{10}$; logo, $-3{,}4 \in \mathbb{Q}$.

R.2 Sabendo que a soma e o produto de dois números inteiros são, também, números inteiros, provar que a soma de dois números racionais é também um número racional.

Resolução

Se p e q são dois números racionais, então existem números inteiros a, b, c e d ($b \neq 0$ e $d \neq 0$) tais que:

$$p = \frac{a}{b} \text{ e } q = \frac{c}{d}.$$

Devemos provar que $p + q$ é racional. De fato, temos: $p + q = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Ora, $ad + bc$ é inteiro e bd é inteiro diferente de zero; logo, como $p + q$ é igual à razão entre esses dois **inteiros**, temos que $p + q$ é racional.

R.3 Mostrar que a média aritmética entre os números racionais 0,6 e 0,8 é maior que 0,6 e menor que 0,8.

Resolução

A média aritmética entre 0,6 e 0,8 é: $\frac{0,6 + 0,8}{2} = 0,7$.

Logo, temos $0,6 < 0,7 < 0,8$.

R.4 Mostrar que a média aritmética entre dois números **racionais** a e b, com $a < b$, é maior que a e menor que b.

Resolução

A média aritmética entre a e b é $\frac{a + b}{2}$.

I. é dado que $a < b$. Somando a a ambos os membros dessa desigualdade:

$$a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \quad \therefore a < \frac{a + b}{2}.$$

II. é dado que $a < b$. Somando b a ambos os membros dessa desigualdade:

$$a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \quad \therefore \frac{a + b}{2} < b.$$

Por (I) e (II), temos $a < \frac{a + b}{2} < b$. (c.q.d.)

Nota

Observe que, como a e b são racionais, temos que $\frac{a + b}{2}$ também é um número racional. Assim sendo, acabamos de provar que entre dois números racionais diferentes sempre existe um outro número racional.

R.5 Mostrar que a dízima periódica 6,8888... é um número racional.

Resolução

Devemos provar que a dízima periódica 6,8888... pode ser representada como a razão entre dois números inteiros. Para tal, consideremos a igualdade: $p = 6,8888...$ (I)

e multipliquemos ambos os membros dessa igualdade por 10: $10p = 68,888...$ (II)

Agora, subtraímos as igualdades (II) e (I) membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & 10p = 68,888... \\ - & p = 6,888... \\ \hline & 9p = 62,000... \end{array}$$

Logo, $9p = 62 \therefore p = \frac{62}{9}$. Assim mostramos que p é um número racional.

Nota

A fração $\frac{62}{9}$ é chamada de "fração geratriz" da dízima periódica 6,888... . Isso porque, dividindo-se 62 por 9, obtém-se a dízima periódica 6,888...

R.6 Determinar a fração geratriz da dízima periódica 5,42222...

Resolução

Seja: $p = 5{,}42222...$ **(I)**

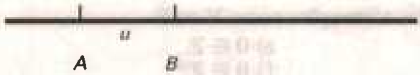
Multiplicando por 10 ambos os membros da igualdade (I), temos: $10p = 54{,}2222...$ **(II)**

Multiplicando por 100 ambos os membros da igualdade (I), temos: $100p = 542{,}2222...$ **(III)**

Subtraindo membro a membro (III) − (II), temos:

$$\begin{array}{rl} & 100p = 542{,}222... \\ - & \ \ 10p = \ \ 54{,}222... \\ \hline & \ \ 90p = 488 \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{488}{90} \ \therefore \ p = \dfrac{244}{45}. \end{array}$$

R.7 Considerar o segmento de reta $\overline{AB}$ de medida u.

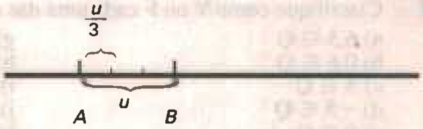


Descrever um processo para obter o ponto C da semi-reta $\overrightarrow{AB}$, tal que $AC = \frac{7}{3}\,u$.

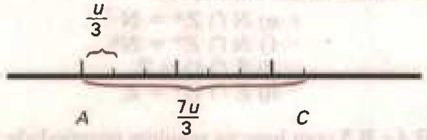
Resolução

Processo:

1. Divide-se a unidade u em três partes iguais a $\frac{u}{3}$.



2. A partir de A medem-se, sobre a semi-reta $\overrightarrow{AB}$, sete partes iguais a $\frac{u}{3}$, obtendo-se assim o ponto C.



R.8 **Definição 1:** número par é todo número que pode ser expresso sob a forma $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2: número ímpar é todo número que pode ser expresso sob a forma $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Prove que:

a) se k é um número par, então k^2 é um número par;
b) se k é um número ímpar, então k^2 é ímpar;
c) se $k \in \mathbb{Z}$ e k^2 é par, então k é par;
d) se $k \in \mathbb{Z}$ e k^2 é ímpar, então k é ímpar.

Demonstrações

a) Sendo k um número par, então $k = 2n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos: $k^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.

Como $n \in \mathbb{Z}$, concluímos que $2n^2 \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $k = 2(2n^2)$ é número par. (c.q.d.)

b) Sendo k um número ímpar, então $k = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos:

$$k^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, concluímos que $2n^2 + 2n \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $k = 2(2n^2 + 2n) + 1$ é número ímpar. (c.q.d.)

c) Sendo k um número inteiro, temos que k é par ou ímpar. Porém, como k^2 é par, k não pode ser ímpar, pois no item (b) provamos que o quadrado de um número ímpar é ímpar. Logo, k é par. (c.q.d.)

d) Sendo k um número inteiro, temos que k é par ou ímpar. Porém, como k^2 é ímpar, k não pode ser par, pois no item (a) provamos que o quadrado de um número par é par. Logo, k é ímpar. (c.q.d.)

Notas

1. As propriedades (a) e (c) podem ser enunciadas assim: um número inteiro k é par se, e somente se, k^2 é par.

2. As propriedades (b) e (d) podem ser enunciadas assim: um número inteiro k é ímpar se, e somente se, k^2 é ímpar.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.8, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.9, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $5 \in \mathbb{N}$
b) $5 \in \mathbb{Z}$
c) $-3 \in \mathbb{N}$
d) $-3 \in \mathbb{Z}$
e) $0 \in \mathbb{Z}_-$
f) $0 \in \mathbb{Z}^*_-$
g) $3 \in \mathbb{Z}_+$
h) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \{0\}$
i) $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}$
j) $\mathbb{Z}^*_- \cup \mathbb{Z}^*_+ = \mathbb{Z}$

B.2 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $6{,}5 \in \mathbb{Q}$
b) $0{,}6 \in \mathbb{Q}$
c) $5 \in \mathbb{Q}$
d) $-5 \in \mathbb{Q}$
e) $0 \in \mathbb{Q}$
f) $-0{,}8 \in \mathbb{Q}_-$
g) $0 \in \mathbb{Q}_-$
h) $0 \in \mathbb{Q}^*_-$
i) $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{Q}$
j) $\mathbb{Q}_- \subset \mathbb{Q}$
k) $\mathbb{Q}_- \subset \mathbb{Q}^*_-$
l) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{Q}$
m) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{Q}^*$
n) $\mathbb{Q}_- \cap \mathbb{Q}_+ = \{0\}$
o) $\mathbb{Q}^*_- \cap \mathbb{Q}^*_+ = \varnothing$
p) $\mathbb{Q}^*_- \cup \mathbb{Q}^*_+ = \mathbb{Q}$

B.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^*$
d) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$
e) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}$
f) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$
g) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$
h) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}^* = \mathbb{Z}$
i) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+$
j) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}^*_+$
k) $\mathbb{Z}^*_+ \subset \mathbb{Q}_+$
l) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$

Resolva os exercícios B.4 e B.5 com base na seguinte propriedade:

O produto de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

B.4 Prove que o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

B.5 Prove que o quociente de dois números racionais quaisquer, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

B.6 Mostre que a dízima periódica 5,666... é um número racional.

B.7 Determine a geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

a) 12,444...
b) 22,555...
c) 0,333...
d) 4,252525... (**Sugestão:** considere a igualdade $p = 4{,}252525...$ e, a seguir, multiplique ambos os membros por 100.)
e) 3,421421421...

B.8 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) O oposto de um número inteiro é inteiro.
b) O oposto de um número racional é racional.
c) O oposto de zero é o próprio zero.
d) O inverso de um número racional não-nulo é um número racional.
e) O inverso de um número inteiro não-nulo é inteiro.
f) O inverso de zero é o próprio zero.
g) O oposto do inverso de $\frac{3}{4}$ é $-\frac{4}{3}$.
h) O oposto do oposto de 5 é $\frac{1}{5}$.
i) O inverso do inverso de 3 é 3.
j) Todo número racional tem inverso.
k) Todo número racional tem oposto.

B.9 O número positivo r é oposto de s e é inverso de $-s$. Determine r.

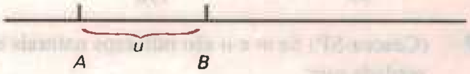
B.10 Prove que o produto de dois números pares é um número par.

B.11 Prove que o produto de dois números ímpares é um número ímpar.

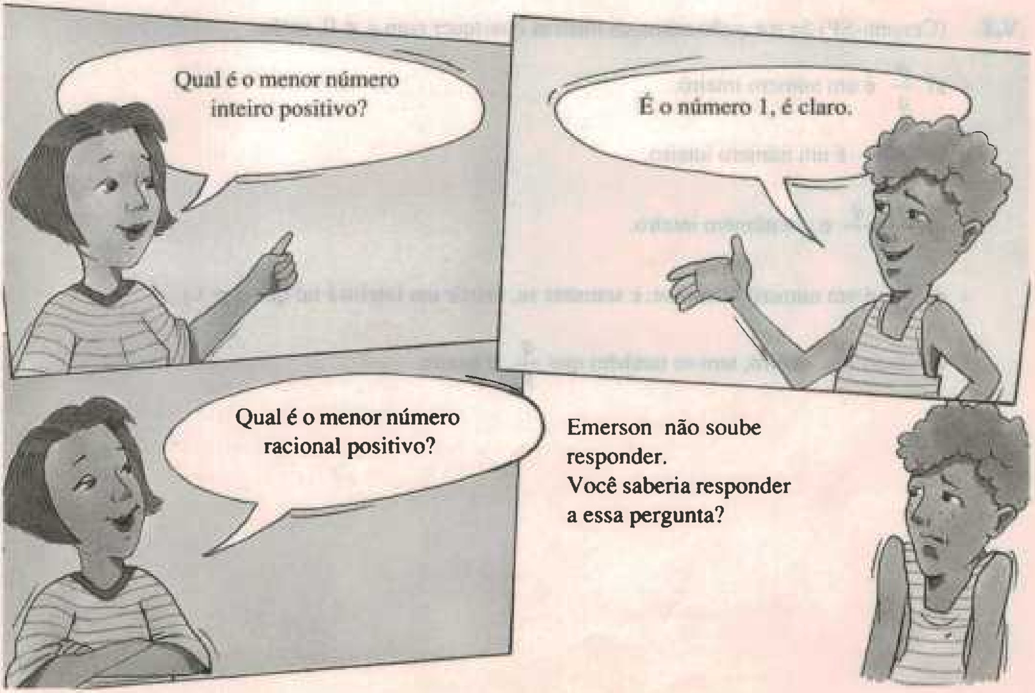
B.12 Prove que a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar.

Exercícios complementares

C.1 Considere o segmento $\overline{AB}$ de medida u:
Descreva um processo para obter o ponto C da semi-reta $\overrightarrow{AB}$, tal que $AC = \frac{17}{5}u$.



C.2 Priscilla e Emerson conversavam:


Qual é o menor número inteiro positivo?
É o número 1, é claro.
Qual é o menor número racional positivo?

Emerson não soube responder.
Você saberia responder a essa pergunta?

C.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) Se a e b são números naturais, com $b \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ é um número racional.

b) Se a e b são números inteiros, então $\frac{a}{b}$ é um número racional.

c) Se a e b são números inteiros e $a - b \neq 0$, então $\frac{a+b}{a-b}$ é um número racional.

d) Se a e b são números inteiros, então $\frac{a+b}{1+a^2}$ é um número racional.

e) Se a e b são números inteiros, então $\frac{a+b}{1+a}$ é um número racional.

f) Se a é um número inteiro, então a^{58} é um número inteiro.

g) Se p e q são números racionais, então pq é um número racional.

h) Se p e q são números racionais, então $\frac{p}{q}$ é um número racional.

C.4 Mostre que a dízima periódica 4,52222... é um número racional.

C.5 Determine a geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

a) 6,254444...

b) 13,82434343...

Questões dos vestibulares

V.1 (Fatec-SP) Se $a = 0{,}666...$, $b = 1{,}333...$ e $c = 0{,}141414...$, então $ab^{-1} + c$ é igual a:

a) $-\frac{74}{99}$

b) $\frac{127}{198}$

c) $\frac{80}{99}$

d) $\frac{187}{30}$

e) $\frac{67}{30}$

V.2 (Cescea-SP) Se m e n são números naturais e se $n \leq m \leq s(n)$, onde $s(n)$ é o sucessor de n, então é sempre verdade que:

a) $m = n$ ou $m = s(n)$.

b) $n < m$

c) $m < n$

F d) $m > n + 1$

F e) $m = n$ e $m = s(n)$.

V.3 (Cescem-SP) Se p e q são números inteiros quaisquer com $q \neq 0$, então:

F a) $\frac{p}{q}$ é um número inteiro.

F b) $\frac{p}{p+q}$ é um número inteiro.

F c) $\frac{p+q}{q}$ é um número inteiro.

V d) $\frac{p}{q}$ é um número inteiro se, e somente se, existir um inteiro k tal que $p = kq$.

F e) sendo $\frac{p}{q}$ inteiro, tem-se também que $\frac{q}{p}$ é inteiro.

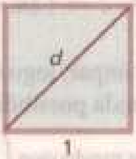
Capítulo 7

Os números reais

1. Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{Q}'$)

Durante muitos séculos acreditou-se que os números racionais fossem suficientes para resolver qualquer problema numérico que pudesse surgir. Admitia-se que a medida de uma grandeza, em qualquer unidade, podia sempre ser expressa através de um número racional. Não se sabe ao certo, mas supõe-se que da escola pitagórica surgiu um problema que lançou por terra a suficiência dos números racionais.

Qual a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade?



Pelo teorema de Pitágoras tem-se que:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2.$$

Esse problema certamente causou polêmica entre os matemáticos da época. Qual é o número d cuja segunda potência é igual a 2?

Provou-se que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2. Uma demonstração dessa afirmação é feita a seguir, como curiosidade.

Pitágoras (século VI a.C.). Segundo a escola pitagórica, a ordem do universo está numericamente determinada.

Demonstração

Suponhamos que exista um número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{p}{q}$ seja fração irredutível, isto é, o máximo divisor comum entre p e q é igual a 1.

Temos duas, e apenas duas, possibilidades a considerar: p é par ou p é ímpar.

Primeira possibilidade: admitamos que p é par, ou seja, $p = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Assim, temos:

$$\left(\frac{2n}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2 \therefore 2n^2 = q^2.$$

Note que q^2 é par, pois $2n^2$ é par. Ora, o quadrado de um inteiro é par se, e somente se, esse inteiro for par; logo, q é par.

Essa conclusão é absurda, pois, sendo p e q números pares, a fração $\frac{p}{q}$ não será irredutível.

Logo, a primeira possibilidade não pode ocorrer.

Segunda possibilidade: admitamos que p é ímpar, $p = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Assim, temos:

$$\left(\frac{2n+1}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow (2n+1)^2 = 2q^2.$$

O quadrado de um número ímpar é sempre ímpar; logo $(2n + 1)^2$ é ímpar. Como $2q^2$ é par, temos que essa última igualdade é absurda. Logo, a segunda possibilidade não pode ocorrer.

Ora, se não existe p inteiro, par ou ímpar, de modo que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, segue-se que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2. (c.q.d.)

Surgiu assim a necessidade de novos números, que não pudessem ser representados como uma razão entre dois inteiros. Convencionou-se chamá-los de **números irracionais.**

1.1. Número irracional

Número irracional é toda dízima não-periódica, ou seja, é todo número com infinitas casas decimais e **não**-periódico.

Exemplos

a) $\pi = 3{,}14159265...$ (dízima não-periódica).

b) $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$ (dízima não-periódica).

Um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois inteiros.

Indicamos o conjunto de todos os números irracionais pelo símbolo $\mathbb{Q}'$:

$$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é dízima } \textbf{não}\text{-periódica}\}.$$

1.2. Propriedades

- Se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, não é inteiro, então é irracional.

Exemplos

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

b) $\sqrt[6]{5} \in \mathbb{Q}'$

c) $\sqrt[5]{3} \in \mathbb{Q}'$

d) $\sqrt[7]{1} \notin \mathbb{Q}'$, pois $\sqrt[7]{1} = 1$ é inteiro.

e) $\sqrt[3]{8} \notin \mathbb{Q}'$, pois $\sqrt[3]{8} = 2$ é inteiro.

- A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{1}_{\textbf{Racional}} + \underbrace{3,14159265...}_{\textbf{(}\pi\textbf{) Irracional}} = \underbrace{4,14159265...}_{\textbf{Irracional}}$$

- A diferença entre um número racional e um número irracional, em qualquer ordem, é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{1}_{\textbf{Racional}} - \underbrace{3,14159265...}_{\textbf{(}\pi\textbf{) Irracional}} = \underbrace{-2,14159265...}_{\textbf{Irracional}}$$

- O produto de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{2}_{\textbf{Racional}} \cdot \underbrace{\sqrt{3}}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{\sqrt{12}}_{\textbf{Irracional}}$$

- O quociente de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{12}_{\textbf{Racional}} : \underbrace{\sqrt{6}}_{\textbf{Irracional}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{12}\sqrt{6}}{\cancel{6}} = 2\sqrt{6} = \underbrace{\sqrt{24}}_{\textbf{Irracional}}$$

2. Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Número real é qualquer número racional ou irracional.

O conjunto de todos os números reais será indicado por $\mathbb{R}$. Assim sendo, temos:

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$, ou, ainda, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

Exemplos

a) $3 \in \mathbb{R}$

b) $-3,8 \in \mathbb{R}$

c) $\pi \in \mathbb{R}$

d) $-4 \in \mathbb{R}$

e) $\frac{4}{5} \in \mathbb{R}$

f) $-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

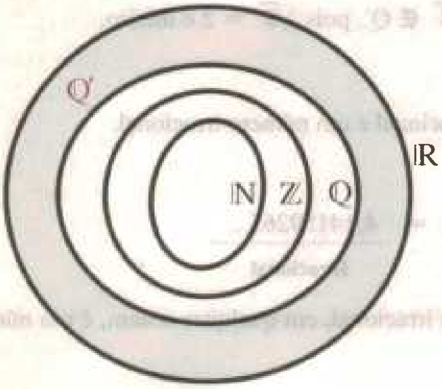
g) $0 \in \mathbb{R}$

h) $-\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$

i) $0,7 \in \mathbb{R}$

j) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Podemos representar os conjuntos numéricos no seguinte diagrama:



Note que o conjunto dos irracionais ($\mathbb{Q}'$) é o complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

2.1. Propriedades

- A soma de dois números reais quaisquer é um número real.
- A diferença entre dois números reais quaisquer é um número real.
- O produto de dois números reais quaisquer é um número real.
- O quociente entre dois números reais quaisquer, com o divisor diferente de zero, é um número real.
- Para todo número real x, existe o real y, denominado "**oposto** de x", tal que:

$$y + x = x + y = 0.$$

Indicamos o oposto de x por $-x$.

Exemplos

a) O oposto de $\sqrt{2}$ é $-\sqrt{2}$.   b) O oposto de $-\pi$ é $-(-\pi) = \pi$.

- Para todo número real não-nulo r, existe o número real s, denominado **inverso** ou **recíproco de** r, tal que: $sr = rs = 1$.

Indicamos o inverso ou recíproco de r por $\frac{1}{r}$.

Exemplos

a) O inverso de $\sqrt{2}$ é $\frac{1}{\sqrt{2}}$.   b) O inverso de π é $\frac{1}{\pi}$.

- Se n é natural ímpar e $a \in \mathbb{R}$, então $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $\sqrt[5]{7} \in \mathbb{R}$ b) $\sqrt[3]{-8} \in \mathbb{R}$

- Sendo n um número natural par diferente de zero e a um número real, tem-se que

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \geqslant 0.$$

Exemplos

a) $\sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}$ b) $\sqrt[6]{0} \in \mathbb{R}$ c) $\sqrt[2]{-1} \notin \mathbb{R}$ d) $\sqrt[8]{-3} \notin \mathbb{R}$

Exercícios resolvidos

R.1 Classificar como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

b) $\sqrt[7]{2} \in \mathbb{Q}'$

c) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

d) $\sqrt{81} \in \mathbb{Q}'$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

g) $-\sqrt{3} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

h) $5\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

i) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}'$

Resolução

Lembremos a seguinte propriedade:

> Se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, não é inteiro, então é irracional.

a) V, pois $\sqrt{3}$ não é inteiro; logo, é irracional;

b) V, pois $\sqrt[7]{2}$ não é inteiro; logo, é irracional;

c) V, pois $\sqrt{2}$ não é inteiro; logo, é irracional;

d) F, pois $\sqrt{81} = 9$ e $9 \in \mathbb{Q}$;

e) V, pois $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$ não é inteiro; logo, é irracional;

f) F, pois $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ e $3 \in \mathbb{Q}$;

g) F, pois $-\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ e $0 \in \mathbb{Q}$;

h) V, pois $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ não é inteiro; logo, é irracional;

i) F, pois $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$ e $3 \in \mathbb{Q}$.

R.2 Classificar como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

b) $8 \notin \mathbb{R}$

c) $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

e) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

f) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \varnothing$

g) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Resolução

a) V, pois $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$ e $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$; logo, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$;

b) F, pois $8 \in \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; logo, $8 \in \mathbb{R}$;

c) V, pois número real é todo número racional ou irracional; logo, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$;

d) V, pois não existe um número que seja racional e irracional ao mesmo tempo;

e) V, pois excluindo do conjunto dos reais os números irracionais restarão todos os racionais e somente eles;

f) F (ver explicação na resposta e);

g) F, pois $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais e no entanto a soma deles é zero, que é racional.

R.3 Provar que a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Resolução

Sejam os números r, racional, e t, irracional.

Seja k a soma de r com t:

$$\underbrace{r}_{\textbf{Racional}} + \underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = k.$$

Analisemos a possibilidade de k ser um número racional:

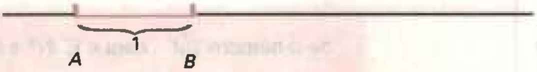
$$\underbrace{r}_{\textbf{Racional}} + \underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{k}_{\textbf{Racional}} \Leftrightarrow \underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{k}_{\textbf{Racional}} - \underbrace{r}_{\textbf{Racional}} .$$

Mas a diferença entre dois racionais é sempre um racional; logo, $k - r$ é racional. Assim, temos:

$$\underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{k - r}_{\textbf{Racional}} .$$

Essa igualdade é absurda, pois não existe número irracional que seja igual a um número racional. Portanto k não pode ser racional; logo, k é irracional.

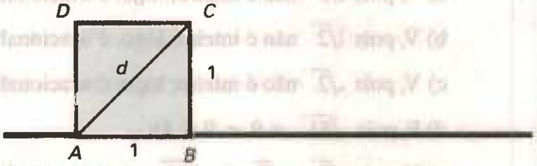
R.4 Considerar o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 1, em uma unidade u. Descrever um processo para obter o ponto E da semi-reta $\overrightarrow{AB}$, tal que o comprimento do segmento $\overline{AE}$ seja $\sqrt{2}$ na unidade u.



Resolução

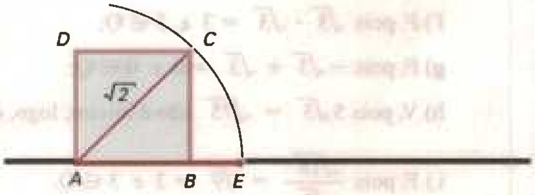
Seja um quadrado em que um dos lados é o segmento $\overline{AB}$. A medida d da diagonal do quadrado é dada por:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} .$$



Com o auxílio de um compasso, com a ponta-seca em A e raio $\overline{AC}$, desenha-se o arco que intercepta a semi-reta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E, conforme figura ao lado.

Assim, temos que o comprimento de $\overline{AE}$ é $\sqrt{2}$ na unidade u.



R.5 Resolver a equação $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ no conjunto universo $U = \mathbb{Q}$.

Resolução

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que a soma (S) e o produto (P) dessas raízes são dados por:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Assim, se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$, temos que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -[-(1 + \sqrt{3})] \\ x_1 x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{3} \\ x_1 x_2 = \sqrt{3} . \end{cases}$$

Logo, as raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = \sqrt{3}$. Como o conjunto universo é $U = \mathbb{Q}$ e $1 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, temos como conjunto solução $S = \{1\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.3, C.5, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, C.2, C.4, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\sqrt[5]{8} \in \mathbb{Q}'$ c) $\sqrt[5]{32} \in \mathbb{Q}'$ e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ g) $5\sqrt{2} - \sqrt{50} \in \mathbb{Q}'$ i) $3\sqrt{2} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

b) $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}'$ d) $4\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$ f) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ h) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}'$

B.2 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) Toda dízima não-periódica é número irracional.
b) Toda dízima é número irracional.
c) Toda dízima periódica é número racional.
d) Todo número que pode ser escrito sob a forma decimal é real.
e) Números reais são somente aqueles que podem ser representados pela razão entre dois números inteiros.
f) $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$
g) $8 \in \mathbb{R}$
h) $6{,}3333... \notin \mathbb{R}$
i) $\dfrac{3}{8} \in \mathbb{R}$
j) $\dfrac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}'$
k) $\dfrac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$
l) $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}'$
m) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$
n) O produto de um número racional por um número irracional é um número irracional.
o) O oposto de um número irracional é irracional.
p) O inverso de um número irracional é irracional.

B.3 Prove que o produto de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional.

B.4 Prove que, se a^2 é um número irracional, então a é número irracional.

B.5 Resolva a equação $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ no conjunto universo $U = \mathbb{Q}$.

B.6 Resolva a equação $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ no conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

Exercícios complementares

C.1 Indiquemos por p e d as medidas do perímetro e do diâmetro de uma circunferência. Sabe-se, da geometria, que a razão $\dfrac{p}{d}$ é igual ao número irracional $\pi = 3{,}141592654...$ Nessas condições, assinale a afirmação verdadeira:

a) p e d são números racionais.
b) Se p for irracional, então d deverá ser, obrigatoriamente, irracional.
c) O produto pd é certamente irracional.
d) A soma $p + d$ pode ser racional.
e) Se p for inteiro, então d deverá ser, obrigatoriamente, inteiro.

C.2 Considere o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 1, em uma unidade u. Descreva um processo para obter o ponto C da semi-reta $\overrightarrow{AB}$ tal que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ seja $\sqrt{5}$ na unidade u.

(**Sugestão:** construa um retângulo cuja base meça 1 unidade u e cuja altura meça 2 unidades u; calcule agora a medida da diagonal do retângulo.)

C.3 Prove que $(\sqrt{2})^n$, com n natural e par, é um número racional. (**Sugestão:** se n é natural par, então n pode ser escrito sob a forma $2k$, $k \in \mathbb{N}$.)

C.4 Prove que $(\sqrt{2})^n$, com n natural e ímpar, é um número irracional. (**Sugestão:** se n é natural ímpar, então n pode ser escrito sob a forma $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.)

C.5 Determine o número de elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 10\sqrt{3}\}$
b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{\pi}{10} \leqslant x < \sqrt{99}\right\}$

C.6 Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se existir o elemento x, $x \in A$, tal que $x \leqslant y$, $\forall y$, $y \in A$, então x é chamado de **mínimo de** A e é indicado por **mín**(A). Determine o mínimo de cada um dos conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

C.7 Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se existe o elemento x, $x \in A$, tal que $x \geqslant y$, $\forall y$, $y \in A$, então x é chamado de **máximo de** A e é indicado por **máx**(A). Determine o máximo de cada um dos conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 50 < x \leqslant 180\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 50 < x \leqslant 180\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 18\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 18\}$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fatec-SP) Sejam a e b números irracionais quaisquer. Das afirmações:

I. ab é um número irracional;
II. $a + b$ é um número irracional;
III. $a - b$ pode ser um número racional;

pode-se concluir que:

a) as três são falsas.
b) as três são verdadeiras.
c) somente (I) e (III) são verdadeiras.
d) somente (I) é verdadeira.
e) somente (I) e (II) são falsas.

V.2 (Cescem-SP) A área de um triângulo é 8 cm². Pode-se afirmar que:

a) se a medida, em centímetros, de um lado desse triângulo é um número natural, então a medida, em centímetros, da altura relativa a esse lado é um número natural.
b) se a medida, em centímetros, de um lado desse triângulo é um número irracional, então a medida, em centímetros, da altura relativa a esse lado é um número racional.
c) nenhum dos lados do triângulo pode ter como medida, em centímetros, um número irracional.
d) se as medidas, em centímetros, dos três lados desse triângulo forem números racionais, então a medida, em centímetros, de cada altura do triângulo é um número racional.
e) se as medidas, em centímetros, dos três lados do triângulo são números irracionais, então a medida, em centímetros, de pelo menos uma das alturas é um número racional.

V.3 (UFPR) Uma das instruções de um exame vestibular afirmava que cada teste que compunha a prova apresentava cinco alternativas, das quais apenas uma era correta. Passados alguns dias da prova, foi divulgado que um dos testes havia sido anulado. O teste anulado apresentava as seguintes alternativas:

a) x é um número natural.
b) x é um número inteiro.
c) x é um número racional.
d) x é um número irracional.
e) x é um número real.

Explique por que o teste foi anulado.

Capítulo 8

O eixo real

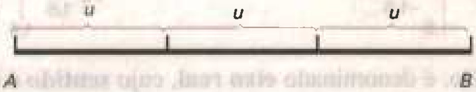
1. Conceituação

Seja u uma unidade de comprimento:

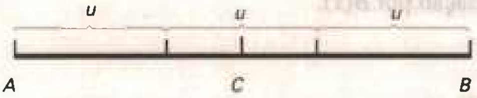
Pode-se indicar a medida de um segmento de reta qualquer, na unidade u, por um único número real.

Exemplos

a) O segmento $\overline{AB}$ abaixo tem comprimento $3u$. Note que $3 \in \mathbb{R}$.



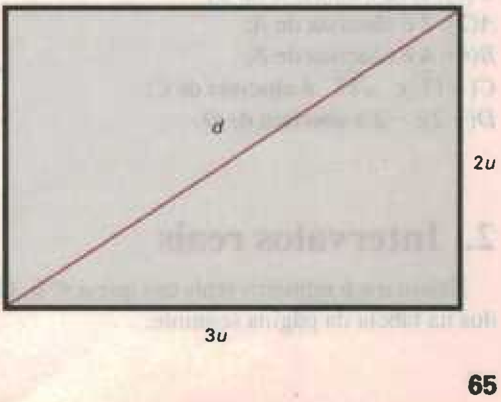
b) Sendo C o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos que $\overline{AC}$ tem comprimento $\frac{3}{2}u$. Note que $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$.



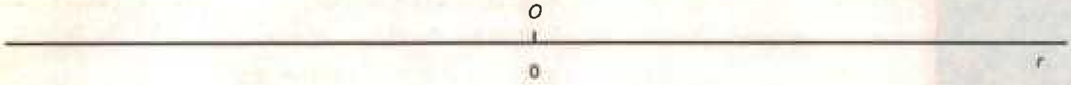
c) O comprimento d da diagonal de um retângulo, cuja base mede $3u$ e cuja altura mede $2u$, pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow d^2 = 13$$
$$\therefore d = \sqrt{13}\ .$$

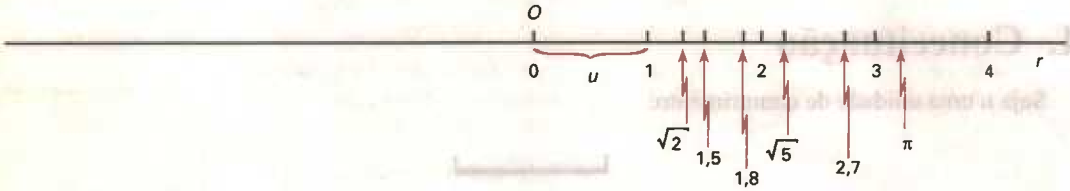
Logo, $d = \sqrt{13}\,u$. Note que $\sqrt{13} \in \mathbb{R}$.



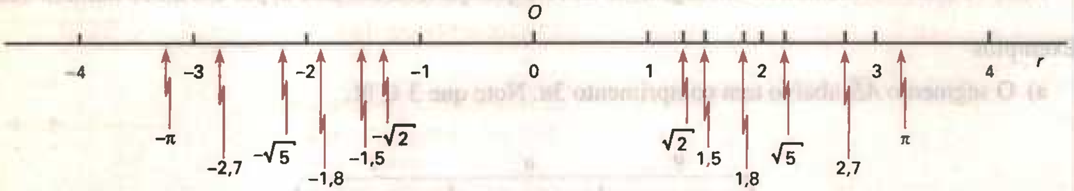
Assim sendo, podemos associar a cada ponto de uma reta r um único número real e a cada número real um único ponto da reta. Para isso, adotamos um ponto O da reta, que será chamado de **origem**, e a ele associamos o número zero:



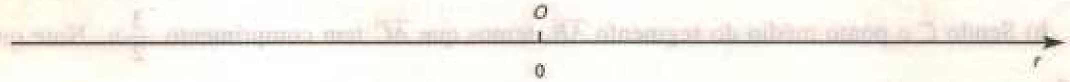
O ponto O é origem de duas semi-retas opostas, contidas em r. A cada ponto P, $P \neq O$, de uma dessas semi-retas, associamos o número real positivo que é a medida do segmento $\overline{PO}$, numa certa unidade u:



Aos pontos da outra semi-reta associamos os números reais negativos, de modo que a dois pontos de r, simétricos em relação a O, estejam associados números reais opostos:



Esse sistema, assim construído, é denominado **eixo real**, cujo **sentido** é o que concorda com o crescimento dos valores dos números. Indicaremos o sentido por:

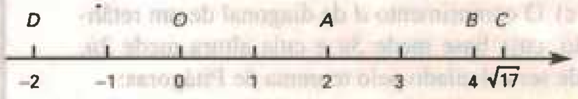


Se um ponto B do eixo real estiver associado a um número real x, então diremos que x é a **abscissa** de B. Indicaremos essa associação por $B(x)$.

Exemplo

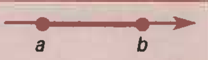
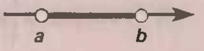
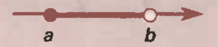
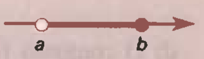
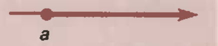
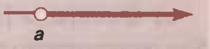
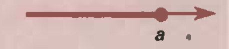
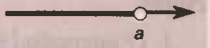
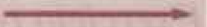
No eixo real ao lado temos:

$O(0)$: zero é abscissa de O;
$A(2)$: 2 é abscissa de A;
$B(4)$: 4 é abscissa de B;
$C(\sqrt{17})$: $\sqrt{17}$ é abscissa de C;
$D(-2)$: -2 é abscissa de D.



2. Intervalos reais

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Chamam-se intervalos reais os subconjuntos de $\mathbb{R}$ mostrados na tabela da página seguinte.

Subconjuntos de $\mathbb{R}$	Símbolo	Nome	Representação no eixo real
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo fechado de extremos *a* e *b*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a, b[$ ou (a, b)	Intervalo aberto de extremos *a* e *b*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b[$ ou $[a, b)$	Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos *a* e *b*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$]a, b]$ ou $(a, b]$	Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos *a* e *b*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty[$ ou $[a, +\infty)$	Intervalo incomensurável fechado à esquerda em *a*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$]a, +\infty[$ ou $(a, +\infty)$	Intervalo incomensurável aberto à esquerda em *a*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$]-\infty, a]$ ou $(-\infty, a]$	Intervalo incomensurável fechado à direita em *a*.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$]-\infty, a[$ ou $(-\infty, a)$	Intervalo incomensurável aberto à direita em *a*.	
$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$ ou $(-\infty, +\infty)$	Intervalo incomensurável de $-\infty$ a $+\infty$.	

Nota

A palavra "incomensurável" significa "que não se pode medir".

Convenções

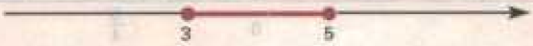
I. A bolinha cheia (●) no extremo de um intervalo indica que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo.

II. A bolinha vazia (○) no extremo de um intervalo indica que o número associado a esse extremo não pertence ao intervalo.

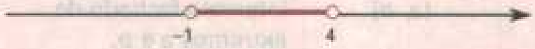
III. Usaremos sempre a denominação "aberto" no $+\infty$ e no $-\infty$.

Exemplos

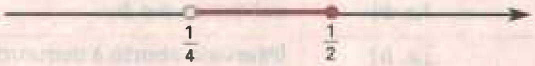
a) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$ é o intervalo fechado de extremos 3 e 5, ou seja, $[3, 5]$. Sua representação no eixo real é:



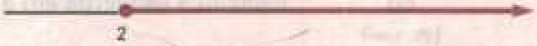
b) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$ é o intervalo aberto de extremos -1 e 4, ou seja, $]-1, 4[$. Sua representação no eixo real é:



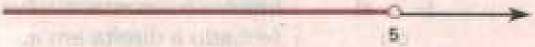
c) O conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}\right\}$ é o intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, de extremos $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, isto é, $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Sua representação no eixo real é:



d) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ é o intervalo incomensurável fechado à esquerda em 2, ou seja, $[2, +\infty[$. Sua representação no eixo real é:



e) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ é o intervalo incomensurável aberto à direita em 5, isto é, $]-\infty, 5[$. Sua representação no eixo real é:



Notas

1. O intervalo $[3, 3]$ é o conjunto $\{3\}$.
2. Os intervalos $]3, 3[$, $]3, 3]$ e $[3, 3[$ são vazios.

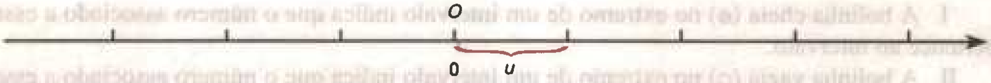
Exercício resolvido

R.1 Descrever um processo para localizar no eixo real cada um dos números:

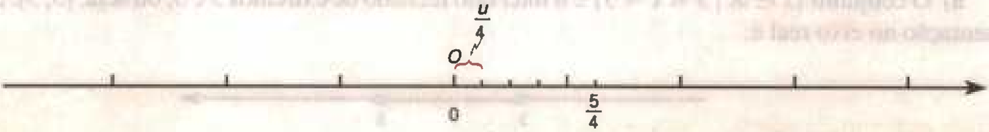
a) $\frac{5}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$

Resolução

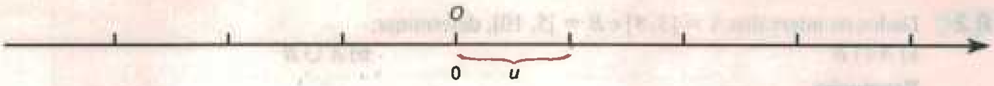
a) Para localizar o número $\frac{5}{4}$ no eixo real:



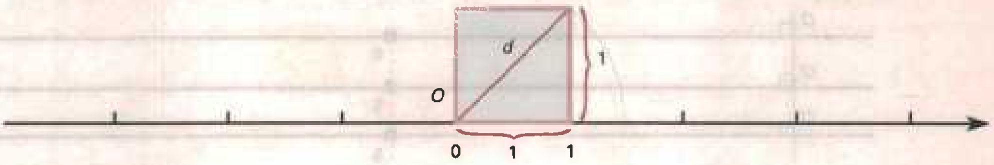
dividimos a unidade u em quatro partes iguais a $\frac{u}{4}$. A partir de O, sobre o semi-eixo positivo, marcamos cinco segmentos de medida igual a $\frac{u}{4}$, obtendo assim o ponto de abscissa $\frac{5}{4}u$:



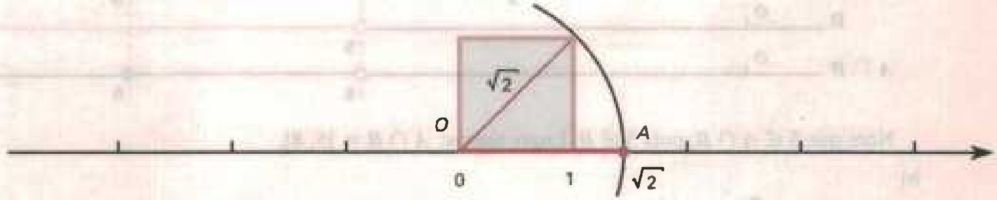
b) Para localizar o número $\sqrt{2}$ no eixo real:



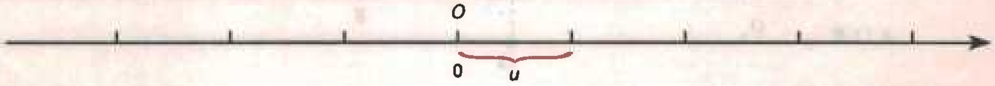
construímos um quadrado em que dois vértices consecutivos tenham abscissas 0 e 1:



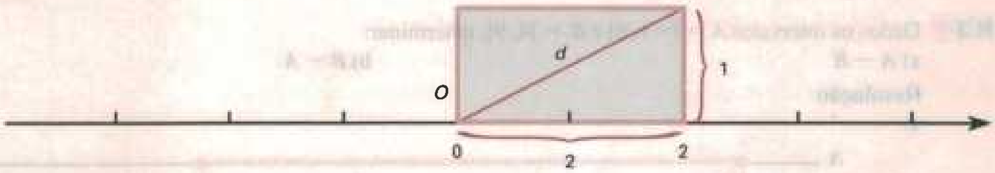
A medida d da diagonal é obtida pelo teorema de Pitágoras: $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$.
Usando um compasso com ponta seca em O e abertura d ($d = \sqrt{2}$), descrevemos um arco que intercepta o eixo real no ponto A. A abscissa de A é $\sqrt{2}$:



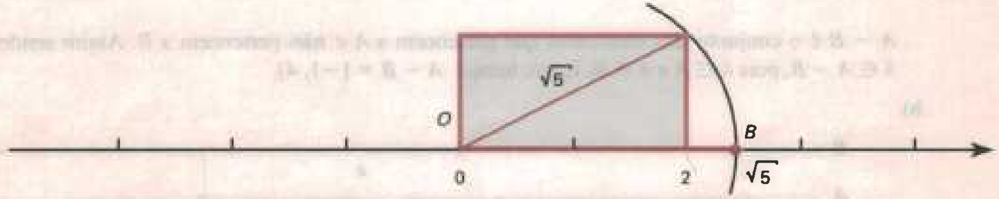
c) Para localizar o número $\sqrt{5}$ no eixo real:



construímos um retângulo de altura 1 u de modo que dois vértices consecutivos tenham abscissas 0 e 2:



A medida d da diagonal é obtida pelo teorema de Pitágoras: $d^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{5}$.
Usando um compasso com ponta seca em O e abertura d ($d = \sqrt{5}$), descrevemos um arco que intercepta o eixo real no ponto B. A abscissa de B é $\sqrt{5}$:



2.1. Operações com intervalos reais

Os intervalos reais são conjuntos e, portanto, podemos efetuar com eles qualquer uma das operações entre conjuntos: união (∪), intersecção (∩), etc.

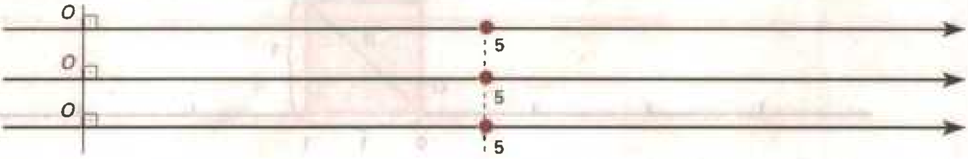
Exercícios resolvidos

R.2 Dados os intervalos $A = [3, 8]$ e $B =]5, 10]$, determinar:

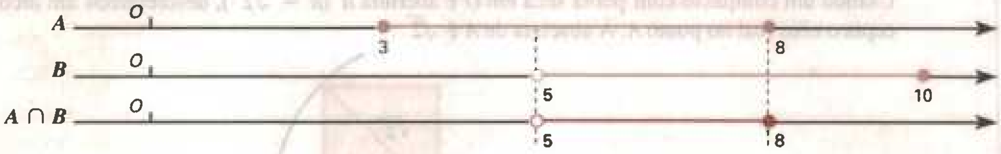
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

Resolução

a) Para visualizarmos a intersecção de A e B, consideremos três eixos reais paralelos de modo que qualquer reta perpendicular aos três os intercepte em pontos de abscissas iguais, isto é:

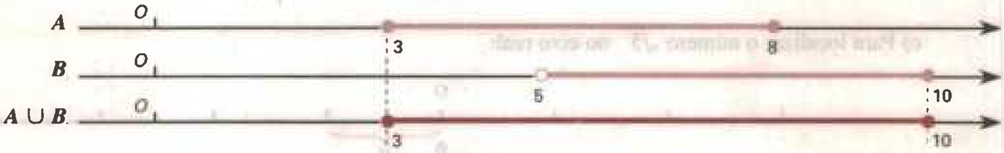


Feito isso, representamos A no primeiro eixo, B no segundo e $A \cap B$ no terceiro (lembre-se de que $A \cap B$ é o conjunto dos elementos comuns a A e B):



Note que $5 \notin A \cap B$, pois $5 \notin B$. Logo, temos: $A \cap B =]5, 8]$.

b)



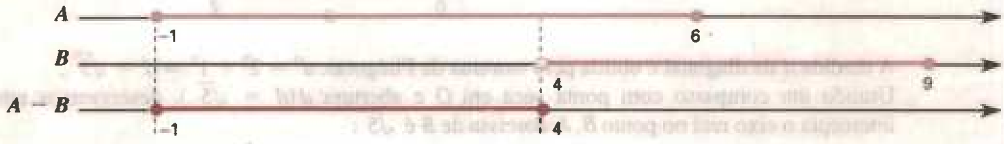
Lembre-se de que $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou B. Logo, temos: $A \cup B = [3, 10]$.

R.3 Dados os intervalos $A = [-1, 6]$ e $B =]4, 9]$, determinar:

a) $A - B$ b) $B - A$

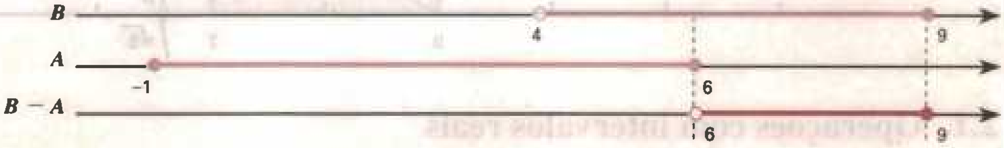
Resolução

a)



$A - B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A e **não** pertencem a B. Assim sendo, note que $4 \in A - B$, pois $4 \in A$ e $4 \notin B$. Logo, temos: $A - B = [-1, 4]$.

b)

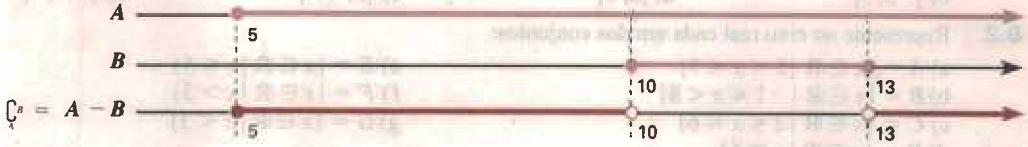


$B - A$ é o conjunto dos elementos que pertencem a B e não pertencem a A. Desse modo, note que $6 \notin B - A$, pois $6 \in B$ e $6 \in A$. Logo, temos: $B - A =]6, 9]$.

R.4 Dados os intervalos $A = [5, +\infty[$ e $B = [10, 13]$, determinar $\complement_A^B$.

Resolução

Note que $B \subset A$; logo, existe $\complement_A^B = A - B$.



Logo, $\complement_A^B = [5, 10[\cup]13, +\infty[$.

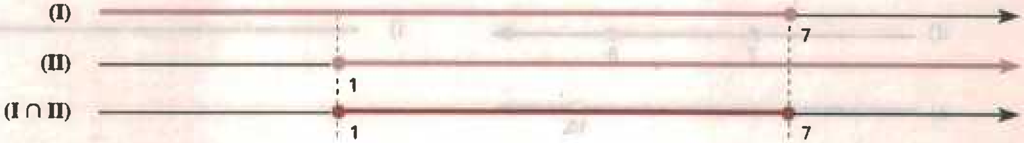
R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ o sistema de inequações $\begin{cases} 6x - 5 \leq 4x + 9 \\ 4x + 9 \geq 3x + 10. \end{cases}$

Resolução

O conjunto solução S do sistema é a intersecção dos conjuntos solução das inequações do sistema:

$$\begin{cases} 6x - 5 \leq 4x + 9 \\ 4x + 9 \geq 3x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4x \leq 9 + 5 \\ 4x - 3x \geq 10 - 9 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x \leq 14 \\ x \geq 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} x \leq 7 & \text{(I)} \\ x \geq 1. & \text{(II)} \end{cases}$$

Representando os conjuntos solução de (I) e (II) no eixo real e efetuando a intersecção, temos:



Logo, $S = [1, 7]$.

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a dupla desigualdade:

$$3x + 10 \leq 5x + 8 < 4x + 20$$

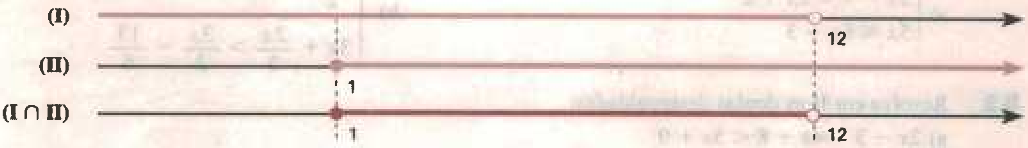
Resolução

Essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema: $\begin{cases} 5x + 8 < 4x + 20 \\ 5x + 8 \geq 3x + 10. \end{cases}$

O conjunto solução S do sistema é a intersecção dos conjuntos solução das inequações do sistema:

$$\begin{cases} 5x + 8 < 4x + 20 \\ 5x + 8 \geq 3x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4x < 20 - 8 \\ 5x - 3x \geq 10 - 8 \end{cases} \therefore \begin{cases} x < 12 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} x < 12 & \text{(I)} \\ x \geq 1. & \text{(II)} \end{cases}$$

Representando os conjuntos solução de (I) e (II) no eixo real e efetuando a intersecção, temos:



Logo, $S = [1, 12[$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.8(a), B.9(a), C.1, C.3, C.4, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.6, B.7, B.8(b), B.9(b), C.2, C.6, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Representar no eixo real cada um dos intervalos:

a) $[5, 9]$ c) $[1, 8[$ e) $[4, +\infty[$ g) $]-\infty, 2]$

b) $]-3, 5[$ d) $]0, 5]$ f) $]3, +\infty[$ h) $]-\infty, 4[$

B.2 Represente no eixo real cada um dos conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 8\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

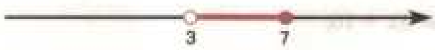
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

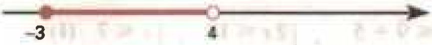
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$

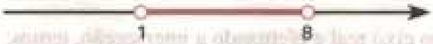
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

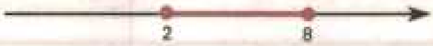
g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

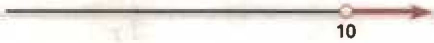
B.3 Usando as notações de intervalos: $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, etc., represente cada um dos intervalos a seguir:

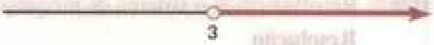
a) 

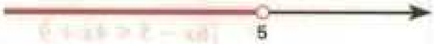
b) 

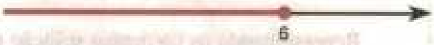
c) 

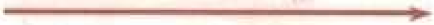
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

B.4 Dados os intervalos $A =]-3, 10]$ e $B = [5, 13]$, determine:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

B.5 Sendo $A = [2, +\infty[$ e $B =]-\infty, 5[$, efetue:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

B.6 Considerando os intervalos $A = [-1, +\infty[$ e $B =]0, 7[$, obtenha:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $\complement_A^B$

B.7 Dados os intervalos $A =]1, 4]$, $B =]2, 8[$ e $C = [4, 10]$, determine:

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $(A \cap B) \cup C$

d) $(A \cup B) \cap C$

e) $(A \cap B) - C$

B.8 Resolva em $\mathbb{R}$ os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3x - 9 < 2x + 2 \\ 5x \leq 6x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2} - x \geq 2x - 1 \\ 3x + \dfrac{2x}{3} > \dfrac{3x}{2} - \dfrac{13}{6} \end{cases}$

B.9 Resolva em $\mathbb{R}$ as duplas desigualdades:

a) $2x - 3 \leq 4x + 8 < 5x + 9$

b) $\dfrac{3x}{2} - 1 \leq 4x - \dfrac{x + 1}{3} \leq 5x$

Exercícios complementares

C.1 Descreva um processo para localizar no eixo real cada um dos seguintes números:

a) $\dfrac{7}{3}$ b) $-\dfrac{5}{2}$ c) $\sqrt{10}$

C.2 Usando régua e compasso, localize no eixo real cada um dos números:

a) $\frac{9}{4}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\sqrt{17}$

C.3 O professor de educação física mediu as estaturas dos alunos do primeiro colegial e separou as medidas em intervalos, os quais chamou de **classes de estaturas**, obtendo assim a tabela:

Classes de estaturas (em metros)	Freqüência (número de elementos da classe)
[1,50; 1,60]	26
]1,60; 1,65]	32
]1,65; 1,70]	30
]1,70; 1,80]	6

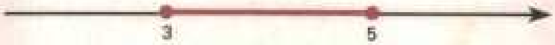
Analisando a tabela construída pelo professor, responda:

a) quantos alunos têm estatura pertencente à classe]1,60; 1,65]?
b) quantos alunos têm estatura menor ou igual a 1,70 m?
c) quantos alunos têm estatura maior que 1,65 m?
d) há algum aluno cuja estatura pertença a mais de uma classe?
e) se o professor tivesse considerado a classe [1,50; 1,65], qual seria a freqüência dessa classe?

C.4 Define-se **comprimento** de cada um dos intervalos $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, ou $[a, b[$ como sendo a diferença $b - a$. Dados os intervalos $A = [3, 8]$ e $B =]6, 10[$, determine:

a) o comprimento do intervalo A;
b) o comprimento do intervalo B;
c) o comprimento do intervalo $A \cup B$;
d) o comprimento do intervalo $A \cap B$;
e) o comprimento do intervalo $A - B$;
f) o comprimento do intervalo $B - A$.

C.5 Considere o intervalo [3, 5], representado a seguir:



Chama-se **ponto médio de um intervalo** (de comprimento finito) o ponto que divide o intervalo em dois intervalos de **mesmo** comprimento. Qual é a abscissa do ponto médio do intervalo [3, 5]?

C.6 Determine a abscissa do ponto médio de cada um dos intervalos.

a)]8, 12[b) [7, 13] c)]5, 11] d) $[a, b]$, sendo $a < b$.

C.7 Considere os infinitos intervalos:

$$A_1 = [0, 1];\ A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right];\ A_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right];\ A_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right];\ \ldots;\ A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right];\ \ldots,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Determine $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.
b) Determine $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.
c) Pode-se estender a definição de intersecção de conjuntos para um número infinito de conjuntos, da seguinte maneira:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } x \in A_3 \text{ e } \ldots\}.$$

Determine a intersecção de **todos** os intervalos do tipo:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

C.8 Considere **todos** os intervalos do tipo $[-a, a]$, onde $a \in \mathbb{R}^*_+$. Determine a intersecção de **todos** esses intervalos.

C.9 Sabendo que $A \cup B = [3, 8]$ e que $A - B = [3, 4[$, determine o intervalo B.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) Sejam a, b e c números reais, com $a < b < c$. O conjunto $]a, c[-]b, c[$ é igual ao conjunto:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant c\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid b \leqslant x < c\}$
[✓ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid b < x \leqslant c\}$]

V.2 (Epusp) O número x não pertence ao intervalo aberto de extremos -1 e 2. Sabe-se que $x < 0$ ou $x > 3$. Pode-se então concluir que:

a) $x \leqslant -1$ ou $x > 3$.
b) $x \geqslant 2$ ou $x < 0$.
c) $x \geqslant 2$ ou $x \leqslant -1$.
d) $x > 3$
e) nenhuma das respostas anteriores está correta.

V.3 (Fatec-SP) Se $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < x < 2\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } -3 \leqslant x \leqslant 1\}$, então o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$ é:

a) $[-3, 0] \cup]1, 2[$
b) $[-3, 0[\cup [1, 2[$
c) $]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[$
d) $]0, 1]$
e) $[-3, 2[$

Capítulo 9

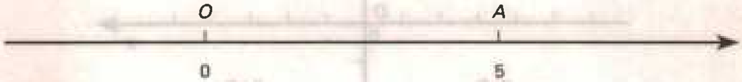
O plano cartesiano

1. Introdução

– Qual é o seu endereço?
– Meu endereço é Rua Purpurina, nº 33, Vila Madalena, São Paulo.

Quando lhe pedem o endereço, você deve dar um conjunto de informações que localize sua residência. Essas informações são as **coordenadas** de sua residência.

Quando estudamos o eixo real, vimos que cada ponto do eixo possui um "endereço", que é a abscissa do ponto. Por exemplo, o ponto do eixo real que possui abscissa 5 é o ponto *A*, representado a seguir:



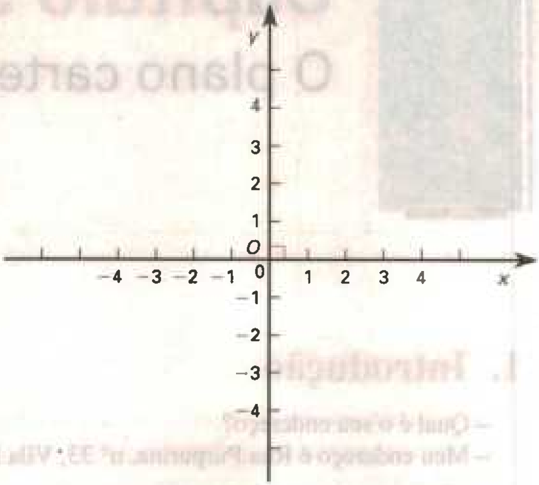
E se quiséssemos dar o "endereço" de um ponto no plano? Como faríamos? É o que mostraremos a seguir.

2. Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Em sua obra *Géométrie* (1637), René Descartes formalizou o conceito de **sistema de coordenadas**. Embora esse conceito esteja associado ao nome de Descartes, outros matemáticos já o haviam utilizado, como Apolônio de Perga (?262-190? a.C.).

SPL/STOCK PHOTOS

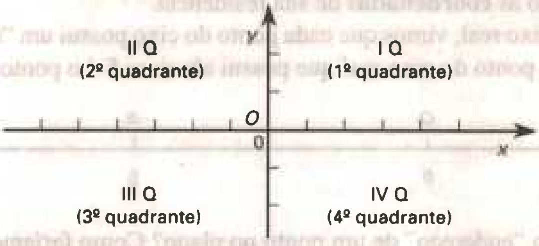
René Descartes (1596-1650).



O principal objetivo de um sistema de coordenadas é determinar um ponto através de um conjunto de informações.

Para se determinar um ponto de um plano, podemos fixar nesse plano dois eixos reais *Ox* e *Oy* perpendiculares entre si no ponto *O*:

- esse sistema de eixos é conhecido como **sistema cartesiano ortogonal** de coordenadas;
- o plano que contém esse sistema é chamado de **plano cartesiano**;
- o ponto *O* é a **origem do sistema**;
- os eixos *Ox* e *Oy*, denominados "eixos coordenados", são respectivamente o **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas**;
- os eixos coordenados separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumerados conforme a figura abaixo:



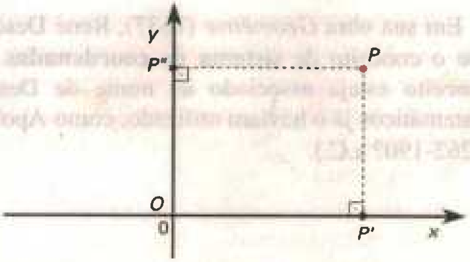
Nota

Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum dos quadrantes.

2.1. Coordenadas de um ponto no plano cartesiano

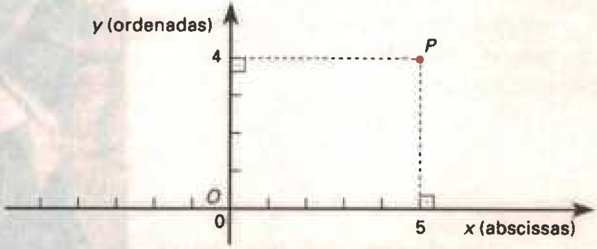
Dado um ponto *P* do plano cartesiano, chamamos de **projeção ortogonal** de *P* sobre um dos eixos *Ox* ou *Oy* a intersecção desse eixo com a perpendicular a ele, traçada por *P*.

- *P'* é a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo *Ox*.
- *P''* é a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo *Oy*.
- Dizemos que as coordenadas do ponto *P* são: a abscissa do ponto *P'* e a ordenada do ponto *P''*.



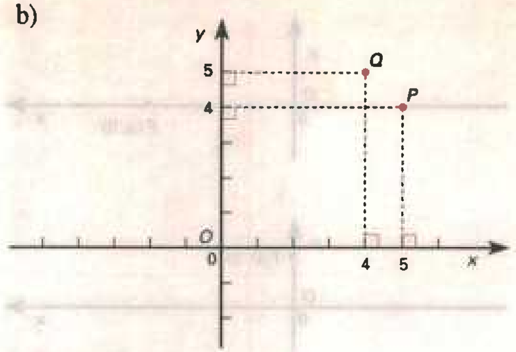
Exemplos

a)



Os números 5 e 4 são as coordenadas do ponto *P*, sendo 5 a abscissa e 4 a ordenada.

b)



Os números 4 e 5 são as coordenadas do ponto *Q*, sendo 4 a abscissa e 5 a ordenada.

Note que os pontos *P* e *Q* são diferentes. Assim sendo, necessitamos de uma notação para diferenciar as coordenadas 5 e 4 das coordenadas 4 e 5. Faremos essa distinção conceituando **par ordenado**.

3. Par ordenado

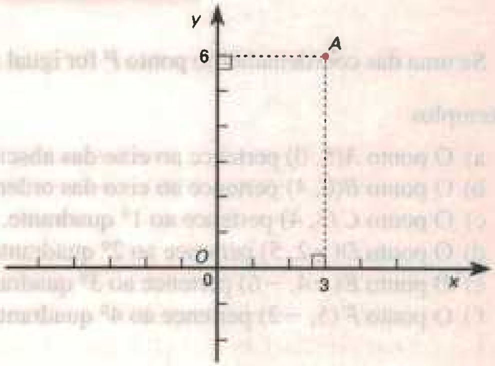
Para indicarmos que um ponto *P* possui abscissa *a* e ordenada *b*, usaremos a notação $P(a, b)$. O símbolo (a, b) é chamado de "par ordenado".

Assim sendo, quando indicamos:

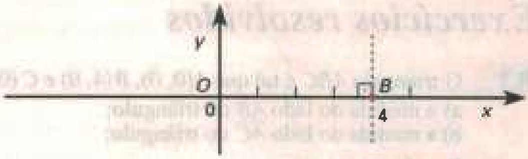
- $P(5, 4)$, estamos dizendo que a abscissa de *P* é 5 e a ordenada é 4;
- $Q(4, 5)$, estamos dizendo que a abscissa de *Q* é 4 e a ordenada é 5.

Exemplos

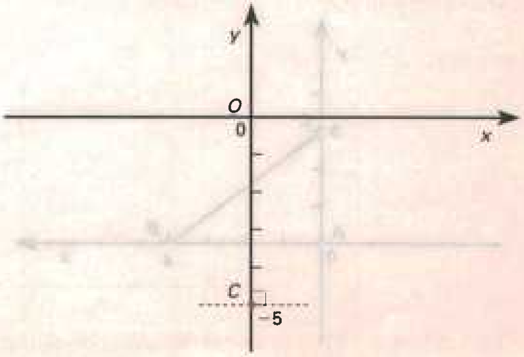
a) Para representarmos no plano cartesiano o ponto $A(3, 6)$, traçamos uma perpendicular ao eixo *Ox* pelo ponto de abscissa 3 e uma perpendicular ao eixo *Oy* pelo ponto de ordenada 6. A intersecção das retas traçadas é o ponto *A*.



b) Para representarmos no plano cartesiano o ponto $B(4, 0)$, traçamos uma perpendicular ao eixo *Ox* pelo ponto de abscissa 4 e uma perpendicular ao eixo *Oy* pelo ponto de ordenada zero (essa reta coincide com o eixo *Ox*). A intersecção das retas traçadas é o ponto *B*.

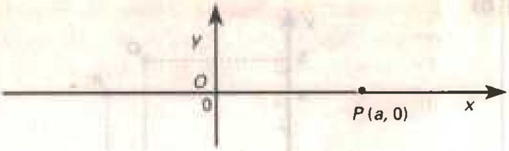


c) Para representarmos o ponto $C(0, -5)$ no plano cartesiano, traçamos uma perpendicular ao eixo *Ox* pelo ponto de abscissa zero (essa reta coincide com o eixo *Oy*) e traçamos uma perpendicular ao eixo *Oy* pelo ponto de ordenada -5. A intersecção das retas traçadas é o ponto *C*.

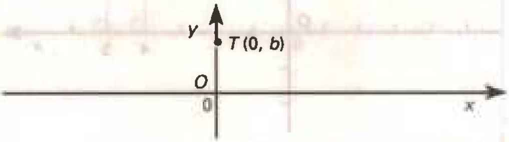


Notas

1. Um ponto P pertence ao eixo das abscissas se, e somente se, sua ordenada for zero.



2. Um ponto T pertence ao eixo das ordenadas se, e somente se, sua abscissa for zero.



3. Indicando os quadrantes 1º, 2º, 3º e 4º, respectivamente, por I Q, II Q, III Q e IV Q, temos:

$$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0;$$
$$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0;$$
$$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0;$$
$$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0.$$

Se uma das coordenadas do ponto P for igual a zero, então P **não** pertence a nenhum dos quadrantes.

Exemplos

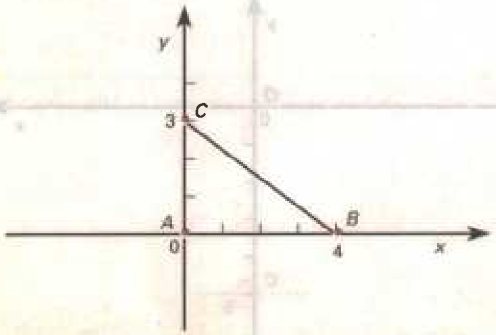
a) O ponto $A(5, 0)$ pertence ao eixo das abscissas.
b) O ponto $B(0, 4)$ pertence ao eixo das ordenadas.
c) O ponto $C(3, 4)$ pertence ao 1º quadrante.
d) O ponto $D(-2, 5)$ pertence ao 2º quadrante.
e) O ponto $E(-4, -6)$ pertence ao 3º quadrante.
f) O ponto $F(5, -2)$ pertence ao 4º quadrante.

Exercícios resolvidos

R.1 O triângulo ABC é tal que $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(0, 3)$. Calcular:
a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo;
b) a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo;
c) a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

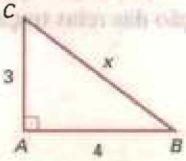
Resolução

Representamos o triângulo ABC no plano cartesiano:



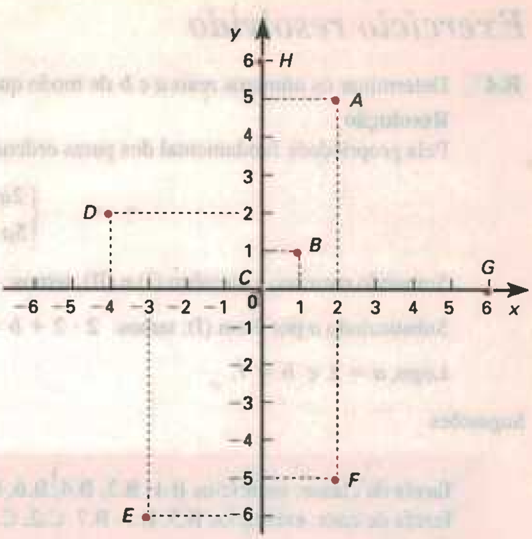
Logo, temos:
a) a medida do lado $\overline{AB}$ é 4;
b) a medida do lado $\overline{AC}$ é 3;
c) a medida x do lado $\overline{BC}$ é obtida pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 3^2 + 4^2$
$\therefore\ x^2 = 25$
$\therefore\ x = 5.$



R.2 Representar no plano cartesiano os seguintes pontos: $A(2, 5)$; $B(1, 1)$; $C(0, 0)$; $D(-4, 2)$; $E(-3, -6)$; $F(2, -5)$; $G(6, 0)$; $H(0, 6)$.

Resolução

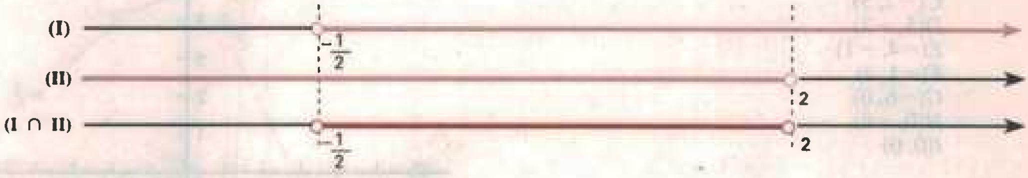


R.3 Determinar x de modo que o ponto $P(2x + 1, 3x - 6)$ pertença ao 4º quadrante.

Resolução

$$P \in \text{IV Q} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 3x - 6 < 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} & \textbf{(I)} \\ x < 2. & \textbf{(II)} \end{cases}$$

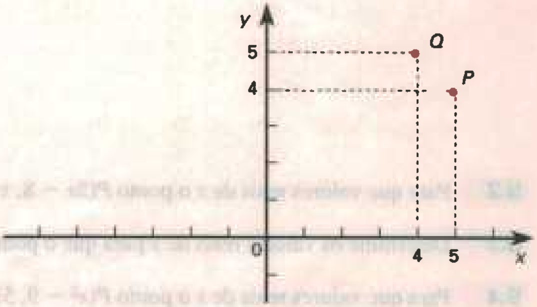
Fazendo a intersecção de (I) e (II), temos que:



Portanto $x \in \mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{2} < x < 2$.

3.1. Propriedade fundamental dos pares ordenados

Observe as representações dos pontos $P(5, 4)$ e $Q(4, 5)$ no plano cartesiano ao lado.



Note que os pares ordenados (5, 4) e (4, 5) estão associados a pontos distintos. Por isso dizemos que esses pares são diferentes, ou seja:

$$(5, 4) \neq (4, 5).$$

Para que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) de números reais sejam iguais, devem estar associados ao mesmo ponto do plano cartesiano. Para que isso ocorra, devemos ter:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

Exemplo

$$(x, 4) = (7, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4. \end{cases}$$

Exercício resolvido

R.4 Determinar os números reais a e b de modo que $(2a + b, 5a - b) = (11, 3)$.

Resolução

Pela propriedade fundamental dos pares ordenados, devemos ter:

$$\begin{cases} 2a + b = 11 & \text{(I)} \\ 5a - b = 3. & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando membro a membro (I) e (II), temos: $7a = 14 \Rightarrow a = 2$.

Substituindo a por 2 em (I), temos: $2 \cdot 2 + b = 11 \Rightarrow b = 7$.

Logo, $a = 2$ e $b = 7$.

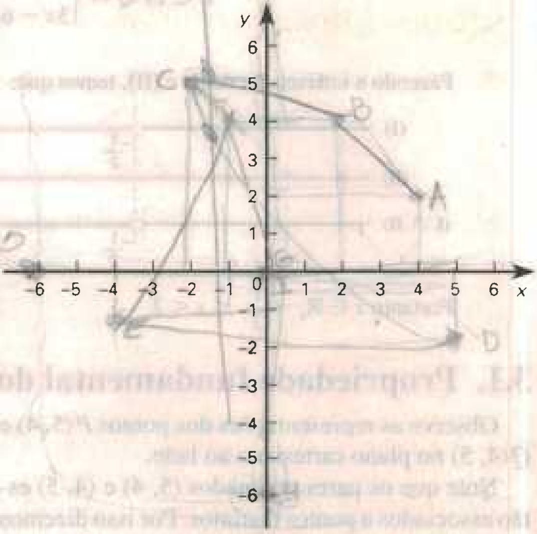
Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, C.2, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Represente no plano cartesiano os seguintes pontos:

$A(4, 2)$
$B(2, 4)$
$C(-2, 5)$
$D(5, -2)$
$E(-4, -1)$
$F(-1, 4)$
$G(-6, 0)$
$H(0, -6)$
$I(0, 0)$



B.2 Para que valores reais de x o ponto $P(5x - 8, x + 2)$ pertence ao 2º quadrante?

B.3 Determine os valores reais de x para que o ponto $P(3x + 6, 2x - 4)$ pertença ao 4º quadrante.

B.4 Para que valores reais de x o ponto $P(x^2 - 9, 5)$ pertence ao eixo das ordenadas?

B.5 Determine os valores reais de x para que o ponto $P(3, x^2 - 5x + 4)$ pertença ao eixo das abscissas.

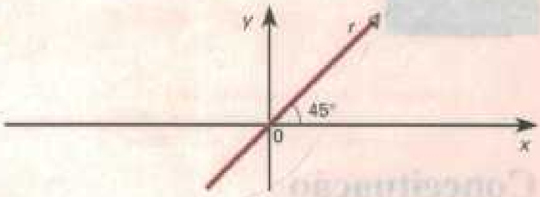
B.6 Determine os números reais a e b de modo que: $(3a - 2b, a + b) = (10, 11)$.

B.7 Sendo a e b números reais tais que $(5a - 1, 2a + 1) = (2b + 4, a - 2b + 7)$, a que quadrante pertence o ponto $P(a, b)$?

Exercícios complementares

C.1 Os pontos $A(2, 1)$, $B(5, 1)$ e $C(2, 5)$ são vértices de um triângulo. Calcule:
a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo;
b) a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo;
c) a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

C.2 Considere a reta r representada no plano cartesiano ao lado. Se o ponto $P(x, y)$ pertence a r, então:



a) $x > y$
b) $x < y$
c) $x = y$
d) $x = -y$
e) $x > 5$

C.3 Para que valores reais de x o ponto $P(3x - 6, 2x + 4)$ pertence ao 4º quadrante?

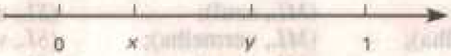
C.4 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o ponto $P(x^2 - 9, x + 3)$ seja a origem do sistema cartesiano.

C.5 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que $(\sqrt{x} + 2, 3) = (x - 4, 3)$.

C.6 Calcule a medida de uma diagonal do quadrado cujos vértices são os pontos $A(3, 2)$, $B(3, 6)$, $C(7, 6)$ e $D(7, 2)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Na figura estão representados geometricamente os números reais $0, x, y$ e 1. Qual a posição do número xy?



a) À esquerda de 0.
b) Entre 0 e x.
c) Entre x e y.
d) Entre y e 1.
e) À direita de 1.

V.2 (Cesgranrio) Em um sistema cartesiano ortogonal, os pontos $A(a, b)$ e $B(c, d)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Assim sendo, tem-se que:
a) $a = -c$ e $b = -d$
[✓ b) $a = -c$ e $b = d$]
c) $a = c$ e $b = -d$
d) $a = c$ e $b = d$
e) $a = d$ e $b = c$

V.3 (UFCE) Os pares ordenados de números reais $(2a - 5, b + 3)$ e $(1 - 4a, 2b - 1)$ são iguais se, e somente se:
a) $a = 1$ e $b = 3$.
b) $a = -1$ e $b = 3$.
c) $a = -1$ e $b = 4$.
d) $a = 0$ e $b = 2$.
e) $a = 1$ e $b = 4$.

V.4 (PUC-SP) Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, o ponto $A(3x + 1, 2x - 5)$ pertence ao 4º quadrante se, e somente se:
a) $-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$
b) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$
c) $x > \frac{5}{2}$
d) $x < -\frac{1}{3}$
e) $1 < x < 2$

Capítulo 10

Produto cartesiano

Conceituação

Uma montadora de automóveis lançou no mercado um novo veículo em três versões: a versão simples, *MS*; a luxuosa, *ML*; e a superluxuosa, *SL*. Cada versão pode ser adquirida em uma dentre quatro cores: azul, vermelha, preta ou branca.

Consideremos que um consumidor escolha em primeiro lugar uma das versões (*MS*, *ML* ou *SL*); e em segundo lugar uma das cores (azul, vermelha, preta ou branca). As possibilidades de escolha são dadas pelos pares ordenados:

(*MS*, azul); (*ML*, azul); (*SL*, azul);
(*MS*, vermelha); (*ML*, vermelha); (*SL*, vermelha);
(*MS*, preta); (*ML*, preta); (*SL*, preta);
(*MS*, branca); (*ML*, branca); (*SL*, branca).

O conjunto formado por todos esses pares ordenados é chamado de "**produto cartesiano** do conjunto $A = \{ML, MS, SL\}$ pelo conjunto $B = \{\text{azul, vermelha, preta, branca}\}$".

Definição

> Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Chama-se "produto cartesiano de A por B", e indica-se por $A \times B$, o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Em símbolos, sendo $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, temos:

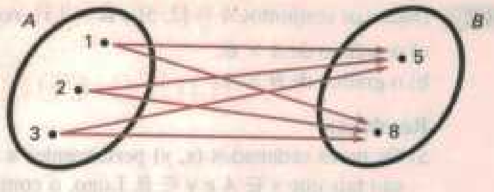
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo

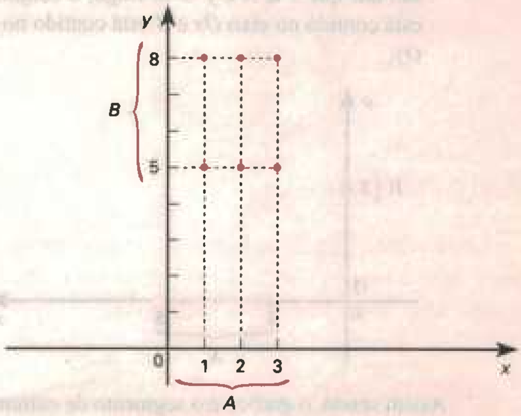
Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 8\}$, temos:

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 8), (2, 5), (2, 8), (3, 5), (3, 8)\}.$$

Tal produto pode ser apresentado sob a forma do diagrama ao lado, chamado de **diagrama de flechas**.



Pode-se ainda representar o produto cartesiano no plano cartesiano. O conjunto de pontos determinado pelos pares ordenados de $A \times B$ é chamado de "**gráfico cartesiano** do produto $A \times B$".



Notas

1. Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, define-se $A \times B = \varnothing$. Por exemplo: $\varnothing \times \{1, 4, 6\} = \varnothing$.
2. O produto cartesiano $A \times A$ será indicado por A^2, ou seja:

$$A \times A = A^2.$$

3. Se A e B são conjuntos tais que $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$.

Exercícios resolvidos

R.1 Dados os conjuntos $A = \{-2, 1, 3, 5\}$ e $B = \{4, 6\}$, determinar:

a) o produto cartesiano $A \times B$, representando-o em diagrama de flechas e no plano cartesiano;

b) o produto $B \times A$.

Resolução

a) $A \times B = \{(-2, 4), (-2, 6), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$.

Diagrama de flechas

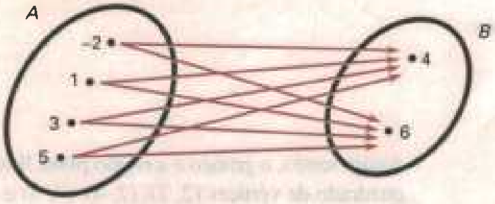
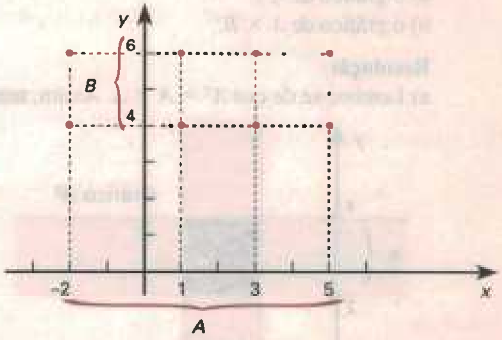


Gráfico cartesiano



b) $B \times A = \{(4, -2), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, -2), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$.

Note que $A \times B \neq B \times A$.

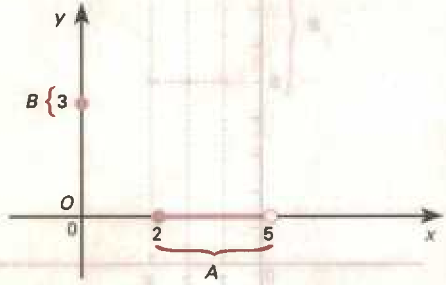
R.2 Dados os conjuntos $A = [2, 5[$ e $B = \{3\}$, representar no plano cartesiano:

a) o gráfico de $A \times B$;

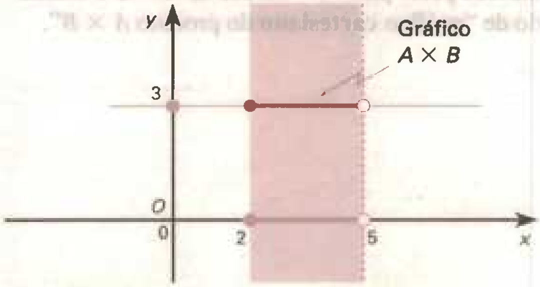
b) o gráfico de $B \times A$.

Resolução

a) Os pares ordenados (x, y) pertencentes a $A \times B$ são tais que $x \in A$ e $y \in B$. Logo, o conjunto A está contido no eixo Ox e B está contido no eixo Oy.



Traçando perpendiculares ao eixo Ox por todos os pontos de A, obteremos uma faixa. Traçando a perpendicular ao eixo Oy pelo ponto de B, percebemos que a intersecção dessa reta com aquela faixa é um segmento de reta:



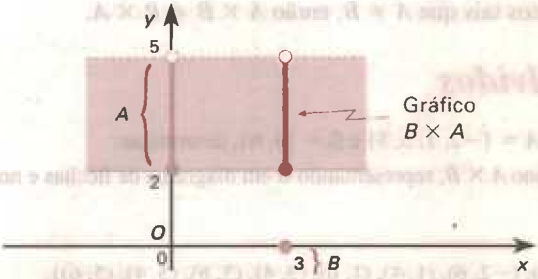
Assim sendo, o gráfico é o segmento de extremos (2, 3) e (5, 3), fechado em (2, 3) e aberto em (5, 3).

Convenções

I. O extremo (2, 3) **pertence** ao gráfico. Indicamos esse fato representando uma bolinha cheia (●) nesse extremo.

II. O extremo (5, 3) **não pertence** ao gráfico. Indicamos esse fato representando uma bolinha vazia (○) nesse extremo.

b) $B \times A$



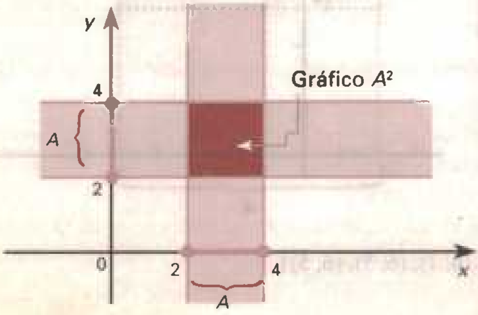
R.3 Dados os conjuntos $A = [2, 4]$ e $B = [3, 6[$, representar no plano cartesiano:

a) o gráfico de A^2;

b) o gráfico de $A \times B$.

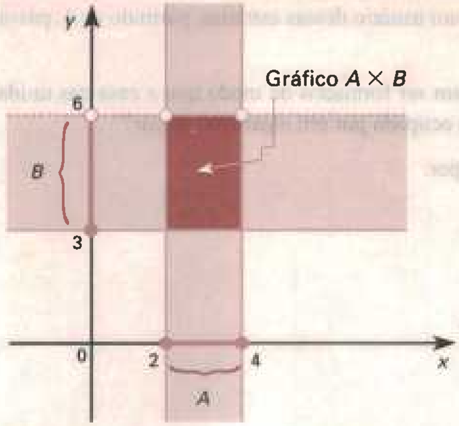
Resolução

a) Lembre-se de que $A^2 = A \times A$. Assim, temos:



Assim sendo, o gráfico é a região plana limitada pelo quadrado de vértices (2, 2), (2, 4), (4, 4) e (4, 2). Os lados do quadrado fazem parte do gráfico.

b)



O gráfico é a região retangular de vértices (2, 3), (2, 6), (4, 6) e (4, 3). Porém, o lado de extremos (2, 6) e (4, 6) não faz parte do gráfico; tal fato será indicado por um segmento tracejado com bolinhas abertas (○) nos extremos.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, C.1, C.3, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.6, C.2, C.4, C.5, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-5, 5\}$, determine:

a) o produto cartesiano $A \times B$, representando-o em diagrama de flechas e no plano cartesiano;
b) o produto cartesiano $B \times A$;
c) o produto cartesiano $A \times A = A^2$.

B.2 Dados os conjuntos $A = \{-1, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1\}$, determine o produto cartesiano $A \times B$, representando-o em diagrama de flechas e no plano cartesiano.

B.3 Dados os conjuntos $A = [-3, 2]$ e $B = \{4\}$, represente no plano cartesiano o gráfico de:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2

B.4 Dados os conjuntos $A =]4, 8]$ e $B =]3, 5]$, represente no plano cartesiano o gráfico de:

a) $A \times B$ b) $B \times A$

B.5 Dados os conjuntos $A = [3, 6[$ e $B = \{1, 2, 3\}$, represente no plano cartesiano o gráfico de:

a) $A \times B$ b) $B \times A$

B.6 Represente no plano cartesiano o gráfico do produto $\mathbb{R} \times \{1\}$.

Exercícios complementares

C.1 Um conjunto A possui exatamente dez elementos e um conjunto B possui exatamente cinco elementos. Qual é o número de elementos do conjunto $A \times B$?

C.2 Um conjunto A possui exatamente n elementos e um conjunto B possui exatamente k elementos. Qual é o número de elementos do conjunto $A \times B$?

C.3 Uma empresa possui 2400 funcionários. Todo funcionário é identificado por um código formado por uma letra do alfabeto de 26 letras e um número natural maior ou igual a 1 e menor ou igual a 100, por exemplo k 86 . Não existem dois funcionários com o mesmo código.

Sabe-se que a empresa admitiu 350 novos funcionários e não demitiu nenhum dos antigos. O sistema continuará suficiente para identificar todos os funcionários? Em caso negativo, que alteração você faria no sistema para que todos os funcionários pudessem ser identificados?

C.4 Existem cinco estradas unindo uma cidade A a uma cidade B e existem seis estradas unindo B a outra cidade C. Quantos caminhos diferentes pode fazer um usuário dessas estradas, partindo de A, passando por B e chegando a C?

C.5 Quantos números naturais de dois algarismos podem ser formados de modo que a casa das unidades seja ocupada por um algarismo par e a das dezenas seja ocupada por um algarismo ímpar?

C.6 O gráfico do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ é formado por:

a) uma faixa.
b) uma reta.
c) infinitas retas paralelas ao eixo Ox.
d) infinitas retas paralelas ao eixo Oy.
e) infinitos segmentos de reta paralelos ao eixo Ox.

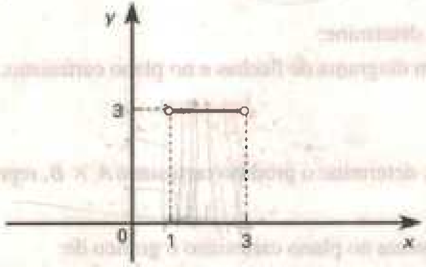
C.7 O gráfico do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ é:

a) uma reta.
b) todo o plano cartesiano.
c) três retas.
d) o conjunto formado pelos dois eixos Ox e Oy.
e) o conjunto formado pelos dois eixos Ox e Oy, exceto a origem.

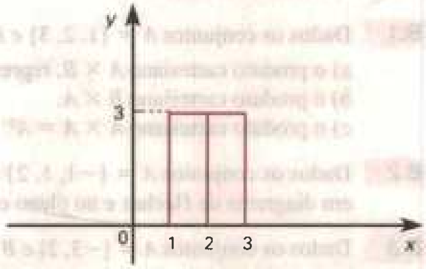
Questões dos vestibulares

V.1 (Faap-SP) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{3\}$, o produto cartesiano $A \times B$ graficamente será:

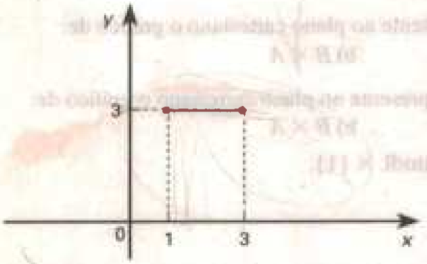
a)



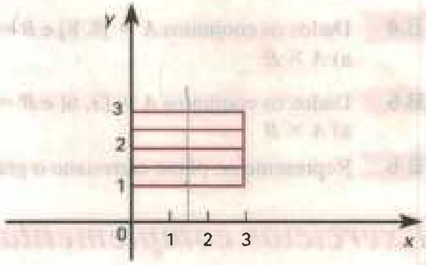
d)



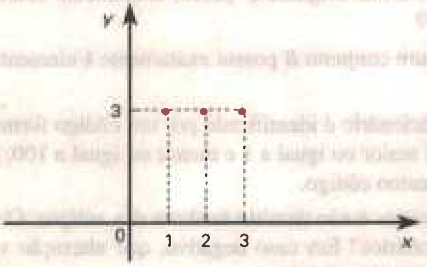
b)



e)

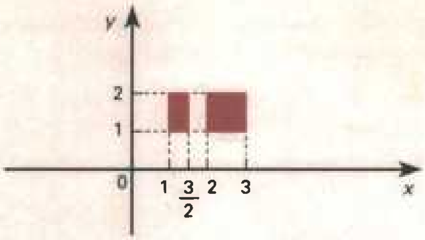


c)

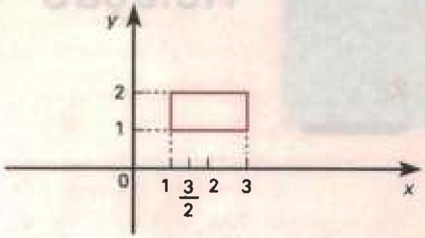


V.2 (Cesgranrio) Dados os conjuntos $A = \left\{1, \frac{3}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, o gráfico de $A \times B$ é representado por:

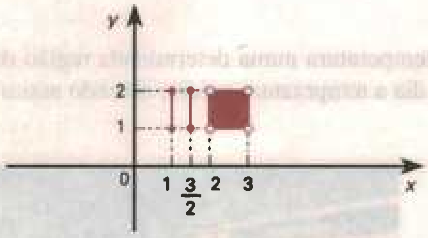
a)



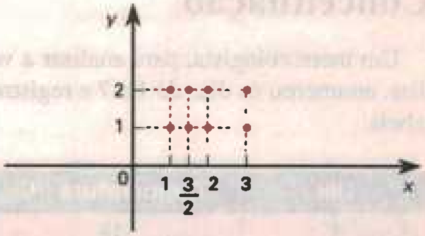
d)



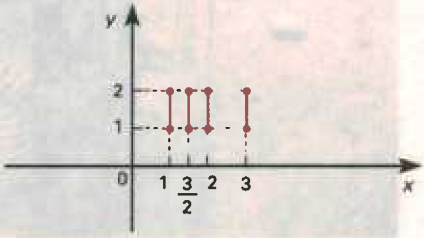
b)



e)



c)



V.3 (UFMT) O gráfico do produto cartesiano $A \times B$ é formado por quinze pontos distintos. Pode-se afirmar que:

a) A não é um conjunto unitário.
b) A possui três elementos e B, cinco elementos.
c) A é um conjunto de números inteiros.
d) $A \neq B$.
e) A possui quinze elementos.

Capítulo 11

Relação

Conceituação

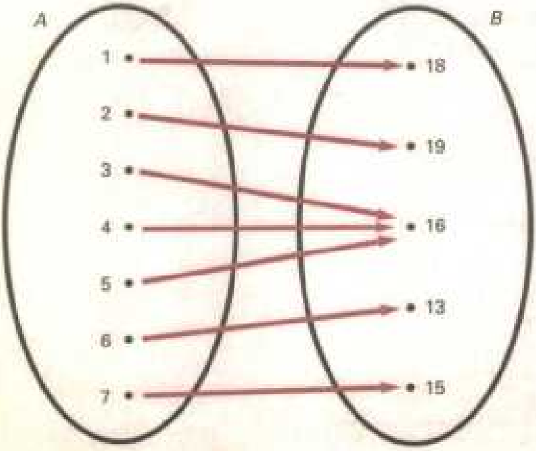
Um meteorologista, para analisar a variação da temperatura numa determinada região durante sete dias, enumerou os dias de 1 a 7 e registrou em cada dia a temperatura média, obtendo assim a seguinte tabela:

Dia	Temperatura (°C)
1	18
2	19
3	16
4	16
5	16
6	13
7	15

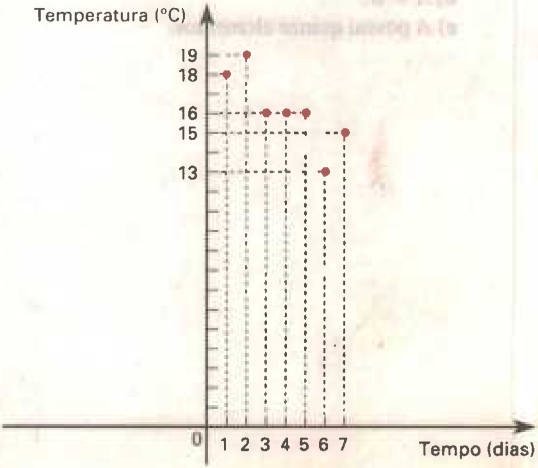
MAURICIO SIMONETTI/PULSAR

Usando a linguagem matemática, podemos dizer que o cientista estabeleceu uma relação do conjunto de dias $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ no conjunto das medidas das temperaturas $B = \{18, 19, 16, 13, 15\}$, associando a cada dia a temperatura média correspondente. Essa relação pode ser representada por um dos três modos apresentados a seguir.

I. Diagrama de flechas:



II. Gráfico cartesiano:



III. **Conjunto de pares ordenados:**

$$R = \{(1, 18), (2, 19), (3, 16), (4, 16), (5, 16), (6, 13), (7, 15)\},$$

em que o primeiro elemento de cada par ordenado pertence ao conjunto A, dos dias, e o segundo elemento pertence ao conjunto B, das medidas de temperatura.

Note que R é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Definição

> Dados dois conjuntos A e B, chama-se "**relação** R de A em B" todo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Se $(x, y) \in R$, então dizemos que x e y estão associados (ou relacionados) através de R.

Exercícios resolvidos

R.1 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4, 6, 10\}$, determinar cada um dos conjuntos seguintes, representando-os em diagramas de flechas e no plano cartesiano.

a) O produto cartesiano $A \times B$.

b) A relação R, de A em B, dada por $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$.

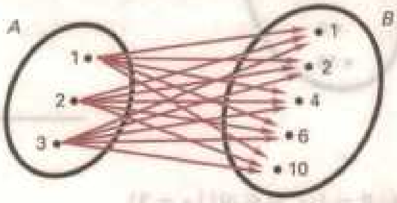
c) A relação R_2 de A em B, dada por $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$.

Resolução

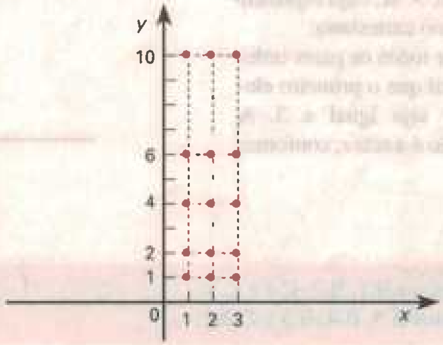
a) O produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tal que $x \in A$ e $y \in B$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 10),\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10),\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 10)\}. \end{aligned}$$

Representando $A \times B$ num diagrama de flechas, temos:



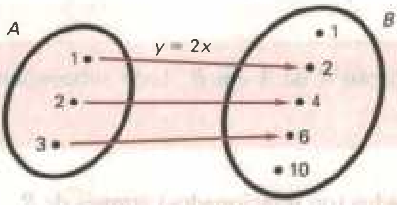
O gráfico cartesiano do produto $A \times B$ é:



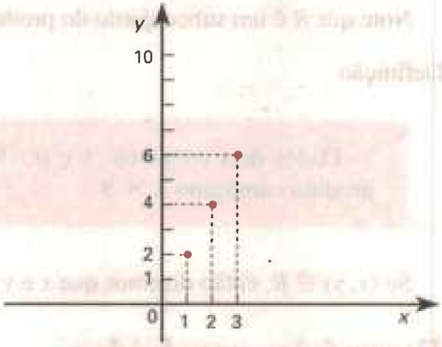
b) A relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ é o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados em que o segundo elemento (y) de cada par é o dobro do primeiro elemento (x). Assim,

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}.$$

Representando R_1 em diagrama de flechas, temos:



Representando R_1 no plano cartesiano, temos:



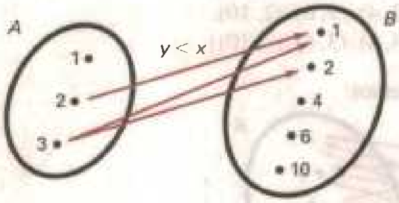
Nota

A representação de uma relação no plano cartesiano é chamada de **gráfico da relação.**

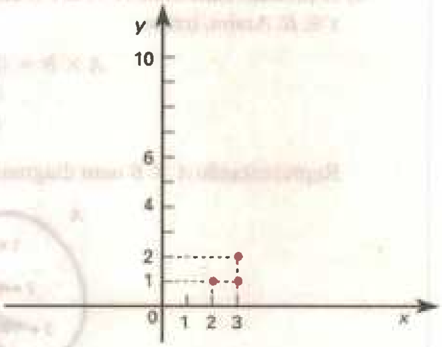
c) A relação $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$ é o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados em que o segundo elemento (y) de cada par é menor que o primeiro elemento (x). Assim, temos:

$$R_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Representando R_2 em diagrama de flechas, temos:



O gráfico de R_2 é:

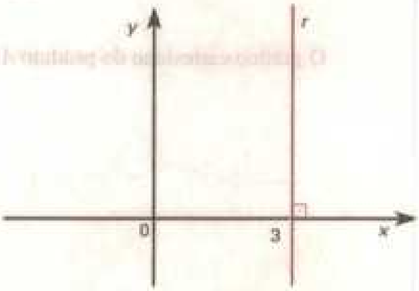


R.2 Construir o gráfico da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3\}$.

Resolução

Lembre-se de que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cuja representação gráfica é **todo** o plano cartesiano.

A relação R é formada por todos os pares ordenados de números reais, tal que o primeiro elemento (x) de cada par seja igual a 3. A representação dessa relação é a reta r, conforme gráfico ao lado.



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, C.1 e C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.5 e C.2.

Exercícios básicos

B.1 Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, determine cada uma das relações seguintes, representando-as em diagrama de flechas e construindo seu gráfico cartesiano:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y > x + 1\}$

B.2 Construa o gráfico da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$.

B.3 Dados os conjuntos $A = \{-4, -3, 3, 4\}$ e $B = \{-4, -3, 3, 4, 5\}$, determine cada uma das relações seguintes, representando-as em diagrama de flechas e construindo seu gráfico:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 + y^2 = 25\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$

B.4 Construa o gráfico da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x\}$. Lembre-se de que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

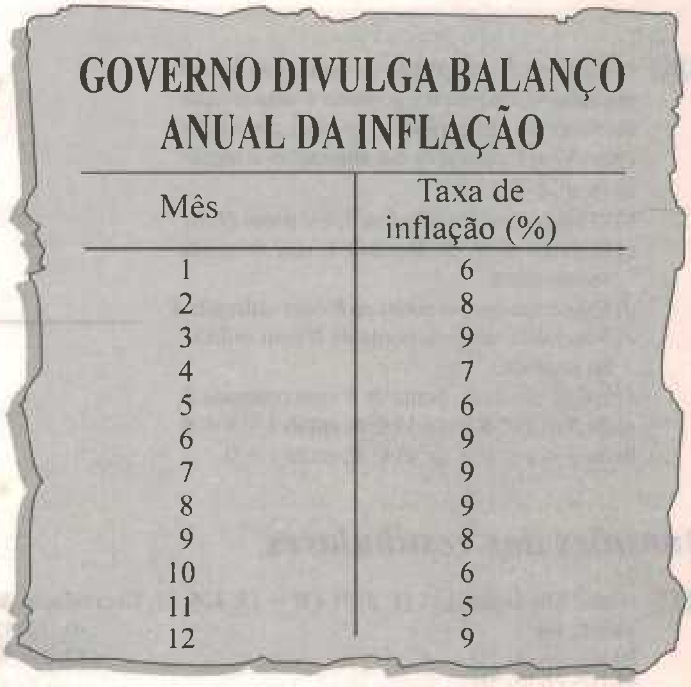
B.5 Construa o gráfico da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$.

Exercícios complementares

C.1 Um economista, para fazer uma análise da variação da taxa de inflação num determinado ano, num determinado país, enumerou os meses de 1 a 12 e associou a cada mês a inflação correspondente, obtendo assim a tabela ao lado.

Considere a relação R do conjunto dos meses $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ no conjunto das taxas, em %, $B = \{6, 8, 9, 7, 5\}$, associando a cada mês a taxa de inflação correspondente.

Construa o gráfico da relação R e, observando o gráfico, responda:



GOVERNO DIVULGA BALANÇO ANUAL DA INFLAÇÃO

Mês	Taxa de inflação (%)
1	6
2	8
3	9
4	7
5	6
6	9
7	9
8	9
9	8
10	6
11	5
12	9

a) do mês 1 ao mês 3, a taxa de inflação foi crescente, decrescente ou constante?

b) do mês 6 ao mês 8, a taxa de inflação foi crescente, decrescente ou constante?

c) do mês 9 ao mês 11, a taxa de inflação foi crescente, decrescente ou constante?

d) qual a variação da taxa de inflação do mês 7 ao mês 8?

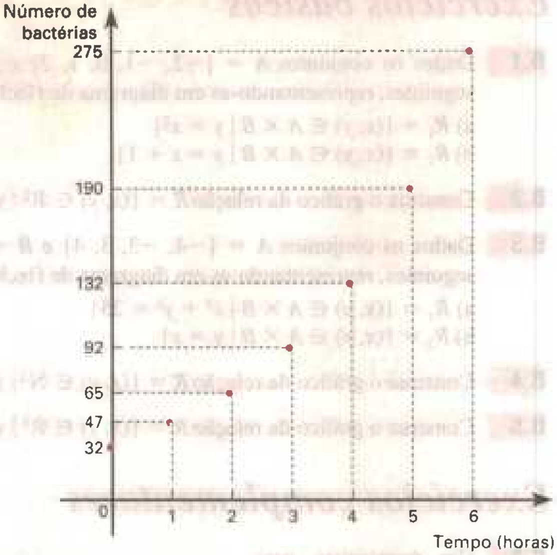
Note pelo gráfico que do mês 1 ao mês 2 a taxa de inflação **cresceu** 2%; por isso dizemos que do mês 1 ao 2 a variação da taxa de inflação foi +2%. Note ainda, pelo gráfico, que do mês 4 ao mês 5 a taxa de inflação **decresceu** 1%; por isso dizemos que a variação da taxa de inflação do mês 4 ao 5 foi de −1%.

C.2 Um biólogo, ao estudar uma cultura bacteriológica, contou o número de bactérias num determinado instante ao qual chamou de instante zero; e ao final de cada uma das seis horas seguintes fez nova contagem das bactérias. Os resultados dessa experiência são descritos pelo gráfico ao lado. Observando o gráfico, responda:

a) qual o número de bactérias no início da contagem, isto é, no instante zero?

b) de quanto aumentou o número de bactérias da quinta para a sexta hora?

c) de quanto aumentou o número de bactérias da terceira para a quinta hora?



C.3 O conjunto R dos pontos do gráfico ao lado é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, portanto é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Observando o gráfico, classifique como V ou F cada uma das afirmações a seguir:

V a) $(5, 8) \in R$.

V b) O ponto de R, de abscissa 7, é o ponto $(7, 0)$.

V c) O ponto de R, de abscissa 4, tem ordenada menor que 8.

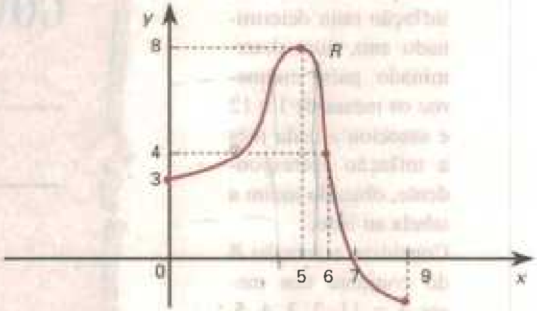
F d) Existe apenas um ponto de R com ordenada 4.

F e) Não existe nenhum ponto de R com ordenada negativa.

V f) Existe um único ponto de R com ordenada 2.

V g) Se $5 < x < 6$ e $(x, y) \in R$, então $4 < y < 8$.

F h) Se $7 < x < 9$ e $(x, y) \in R$, então $y > 0$.



Questões dos vestibulares

V.1 (Fatec-SP) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Uma relação de A em B é:

a) $\{(1, 1)\}$

b) $\{(1, 3), (4, 3)\}$

c) $\{(3, 3), (4, 4)\}$

d) $\{(2, 1), (1, 2)\}$

V e) $\{(2, 4), (3, 3)\}$

V.2 (Cesgranrio) Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Sejam ainda os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Então, se $D = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geq x + 4\}$, tem-se que:

a) $D = A \times B$.

b) D tem um único elemento.

c) D tem apenas dois elementos.

d) D tem apenas três elementos.

e) As quatro afirmativas anteriores são falsas.

V.3 (Fasp) Considere a relação $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + 2b = 6\}$, então R é igual a:

a) $\{(0, 6), (1, 4), (6, 0)\}$

b) $\{(2, 2), (3, 0)\}$

c) $\{(0, 3), (2, 2), (4, 1), (6, 0)\}$

d) $\{(0, 6), (1, 4), (3, 0)\}$

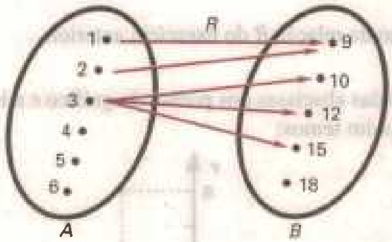
e) $\{(0, 6), (3, 0)\}$

Capítulo 12

Domínio e imagem de uma relação

Conceituação

Considere a relação *R* de *A* em *B*, descrita pelo diagrama a seguir.


R
1
2
3
4
5
6
9
10
12
15
18
A
B

Os conjuntos *A* e *B* são denominados, respectivamente, **conjunto de partida** (CP) e **contradomínio** (CD) **da relação *R***.

Chama-se **domínio da relação *R*** e indica-se por D(*R*) o conjunto:

$$D(R) = \{1, 2, 3\}.$$

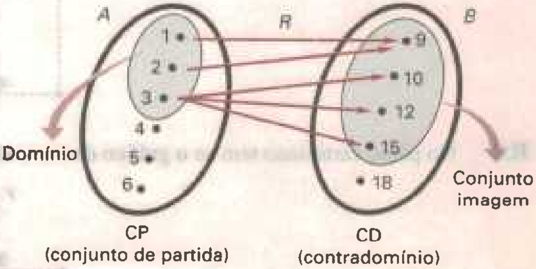
Ou seja, D(*R*) é o conjunto de **todos** os elementos de *A* que estão relacionados com elementos de *B*, através de *R*.

Chama-se **conjunto imagem da relação *R*** e indica-se por Im(*R*) o conjunto:

$$Im(R) = \{9, 10, 12, 15\}.$$

Ou seja, Im(*R*) é o conjunto de todos os elementos de *B* que estão relacionados com elementos de *A* através de *R*.

Assim sendo, temos:


A
R
B
1
2
3
4
5
6
9
10
12
15
18
Domínio
Conjunto imagem
CP
(conjunto de partida)
CD
(contradomínio)

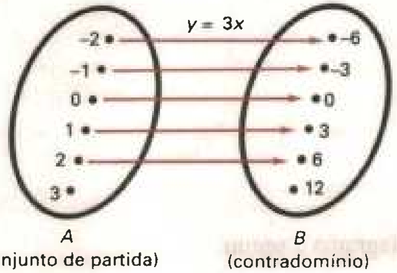
De maneira geral, temos:

Se *R* é uma relação de *A* em *B*, então:
I. *A* é chamado de **conjunto de partida da relação *R***;
II. *B* é chamado de **contradomínio da relação *R***;
III. chama-se **domínio da relação *R*** o conjunto $D(R) = \{x \in A \mid (x, y) \in R\}$;
IV. chama-se **imagem** ou **conjunto imagem da relação *R*** o conjunto $Im(R) = \{y \in B \mid (x, y) \in R\}$.

Exercícios resolvidos

R.1 Sejam $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-6, -3, 0, 3, 6, 12\}$. Representar a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x\}$ em diagrama de flechas e determinar o domínio e a imagem de R.

Resolução



$D(R) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

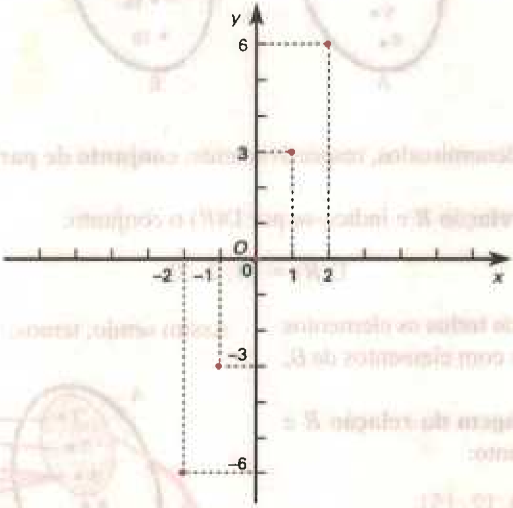
e

$Im(R) = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$.

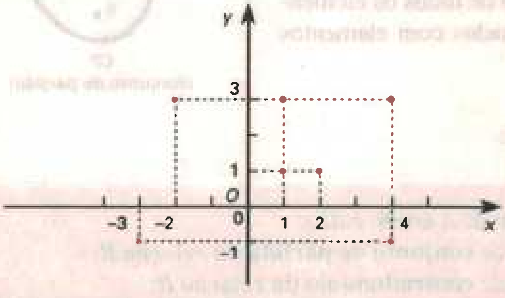
R.2 Construir o gráfico cartesiano da relação R do exercício anterior.

Resolução

O domínio de R é o conjunto das abscissas dos pontos do gráfico e a imagem de R é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico. Assim temos:



R.3 No plano cartesiano tem-se o gráfico de uma relação R:



Determinar o domínio e a imagem da relação R.

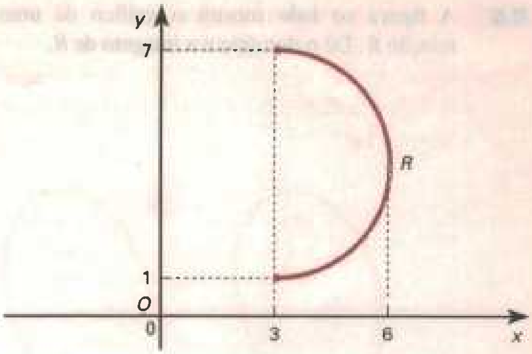
Resolução

O domínio de R é o conjunto das abscissas dos pontos do gráfico; logo, $D(R) = \{-3, -2, 1, 2, 4\}$.
A imagem de R é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico; logo, $Im(R) = \{-1, 1, 3\}$.

R.4 A figura ao lado é o gráfico de uma relação R. Determinar o domínio e a imagem da relação R.

Resolução

O domínio de R é o conjunto das abscissas dos pontos do gráfico, logo,
$D(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$.
A imagem da relação R é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico, logo,
$Im(R) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 7\}$.



Sugestões

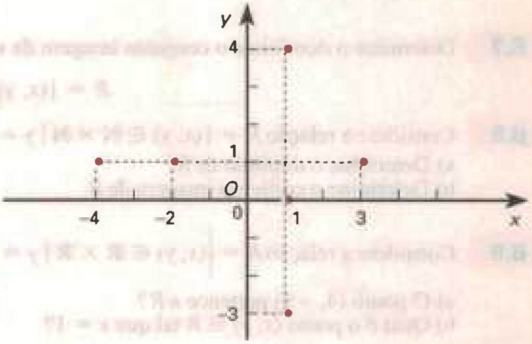
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.8, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.9, C.3, C.4.

Exercícios básicos

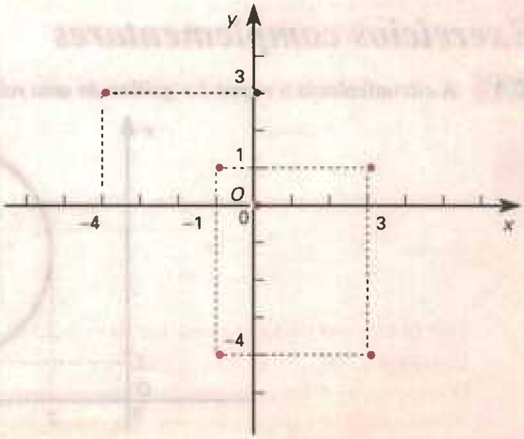
B.1 Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Represente a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$ em diagrama de flechas, determine o domínio e a imagem de R e dê o gráfico da relação.

B.2 Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Represente a relação $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y > 3x\}$ em diagrama de flechas, determine o domínio e a imagem de R e dê o gráfico da relação.

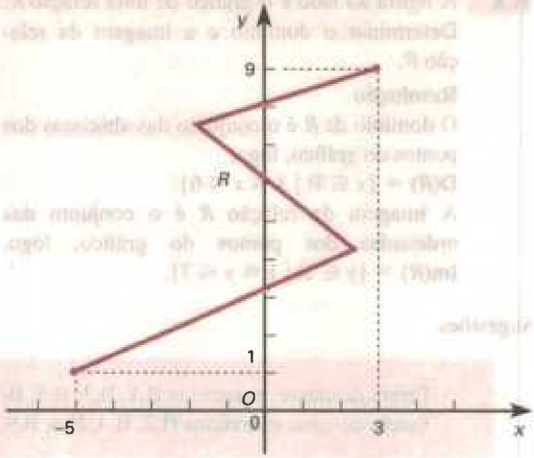
B.3 O gráfico de uma relação R é o conjunto de pontos representados ao lado. Determine o domínio e o conjunto imagem da relação R.



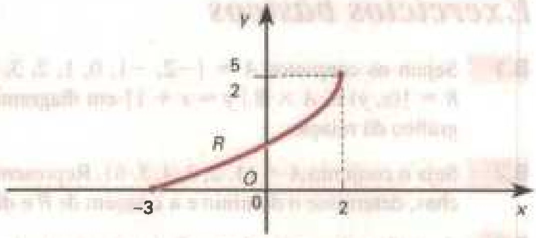
B.4 Os pontos assinalados formam o gráfico de uma relação R. Determine o domínio e o conjunto imagem de R.



B.5 A figura ao lado mostra o gráfico de uma relação R. Dê o domínio e a imagem de R.



B.6 O gráfico de uma relação R é a curva representada ao lado. Dê o domínio e o conjunto imagem de R.



B.7 Determine o domínio e o conjunto imagem da seguinte relação:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x\}.$$

B.8 Considere a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x - 8\}$.

a) Determine o domínio de R.

b) Determine o conjunto imagem de R.

c) Qual é o ponto $(x, y) \in R$ tal que $x = 9$?

d) O ponto $(0, 0)$ pertence à relação R?

B.9 Considere a relação $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \dfrac{3}{1 - x}\right\}$.

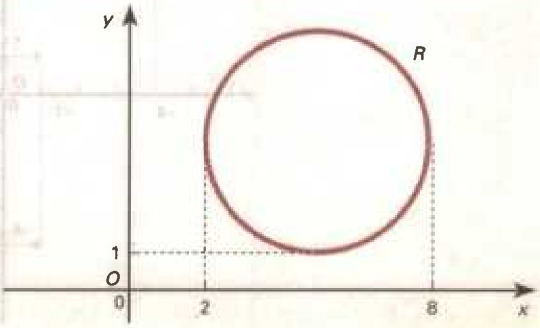
a) O ponto $(4, -1)$ pertence a R?

b) Qual é o ponto $(x, y) \in R$ tal que $x = 1$?

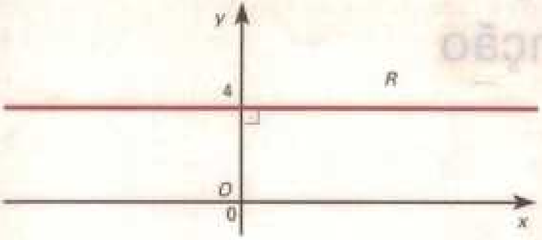
c) Determine o domínio de R.

Exercícios complementares

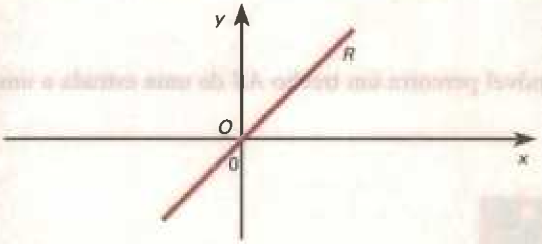
C.1 A circunferência a seguir é o gráfico de uma relação R. Determine o domínio e o conjunto imagem de R.



C.2 Determine o domínio e o conjunto imagem da relação R cujo gráfico é a reta a seguir:



C.3 O gráfico de uma relação R é a reta representada a seguir. Obtenha o domínio e o conjunto imagem de R.



C.4 Construa o gráfico da relação R tal que $D(R) = \{5\}$ e $\text{Im}(R) = \mathbb{R}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Acafe-SC) O domínio e a imagem da relação $R = \{(1, \sqrt{2}), (2, \pi), (2, \sqrt{3}), (3, \pi)\}$ são respectivamente:

a) $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ e $\{1, 2, 3\}$
b) $\{\pi, 2, 3\}$ e $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$
c) $\{1, \pi, 3\}$ e $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$
d) $\{1, 2, 3\}$ e $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$
e) $\{1, 2, \pi\}$ e $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$

V.2 (PUC-SP) O domínio da relação $P = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x - 5\}$ é:

a) $\mathbb{N}$
b) $\mathbb{N}^*$
c) $\mathbb{R}$
d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 6\}$
e) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5\}$

V.3 (PUC/Campinas-SP) O domínio da relação $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \dfrac{2}{4 - x^2}\right\}$ é:

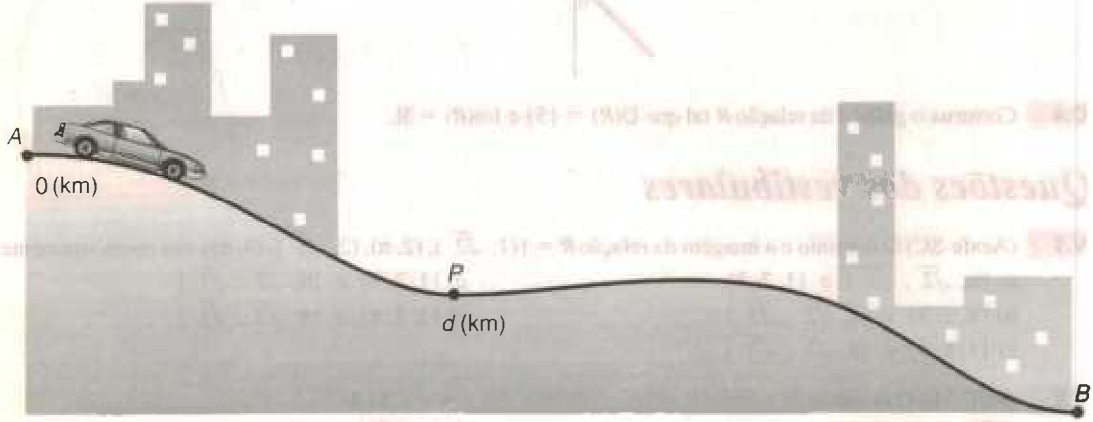
a) $\mathbb{R}_+$
b) $\mathbb{R}^*$
c) $\mathbb{R}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq -2\}$

Capítulo 13

Função

1. Introdução

Suponha que um automóvel percorra um trecho AB de uma estrada a uma velocidade constante de 80 km/h.



Consideremos A como ponto de partida e associemos a ele a marca 0 km. A cada ponto P, do trecho AB, associemos a marca d km, que é a distância de P até A, medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após duas horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, após duas horas a distância d percorrida será:

$$d = 80 \cdot 2 \text{ km} \therefore d = 160 \text{ km}.$$

t (horas)	d (quilômetros)
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Raciocinando de maneira análoga, podemos construir a tabela ao lado, descrevendo a distância d percorrida em vários pontos após t horas da partida.

Note que para cada valor de t se associa um **único** valor de d. Por isso dizemos que a distância d é dada em **função** do tempo t. Podemos expressar a distância em **função** do tempo pela seguinte equação: $d = 80t$. Essa equação substitui, com vantagens, a tabela anterior.

Se quisermos a distância d após 4 horas da partida, basta fazermos $t = 4$ e teremos:

$$d = 80 \cdot 4 \therefore d = 320 \text{ km}.$$

Conhecendo a distância de B até A, 400 km, se quisermos o tempo necessário para o automóvel percorrer o trecho AB, basta fazermos $d = 400$ km e teremos: $400 = 80t \therefore t = 5$ h.

Do mesmo modo como relacionamos as grandezas d e t, podemos relacionar muitas outras grandezas.

Exemplos

a) Em um termômetro, a temperatura é dada em **função** do comprimento da coluna (de mercúrio ou de álcool), ou seja, para cada comprimento ℓ da coluna está associada uma única medida t da temperatura.

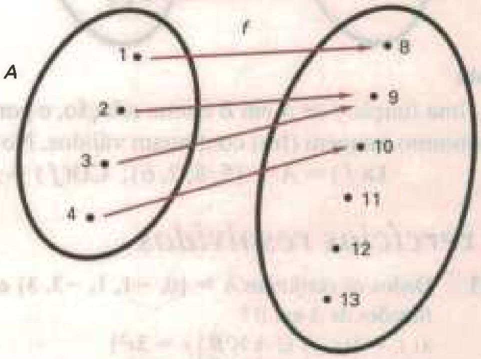
b) O preço de uma peça de tecido é dado em **função** da metragem desse tecido, ou seja, para cada metragem de pano associa-se um **único** preço.

Procure você mesmo outros exemplos em que duas grandezas estejam relacionadas de modo que a cada valor de uma se associa um **único** valor da outra.

2. Formalização do conceito de função

Estudaremos agora um tipo particular de relação entre conjuntos. Esse tipo de relação, por possuir uma propriedade especial, será chamado de **função.**

Consideremos a relação f de A em B, descrita pelo diagrama ao lado.



Note que **todo** elemento de A está associado, através de f, a um **único** elemento de B. Essa propriedade caracteriza uma **função** e por isso dizemos que f é uma função de A em B.

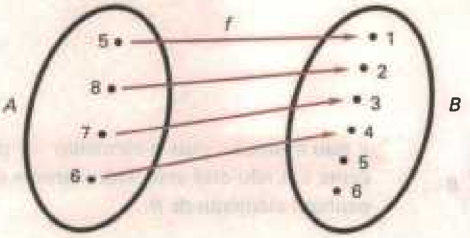
Definição

> Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se, **todo** elemento de A estiver associado, através de f, a um **único** elemento de B.

Usaremos a notação $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é função de A em B.

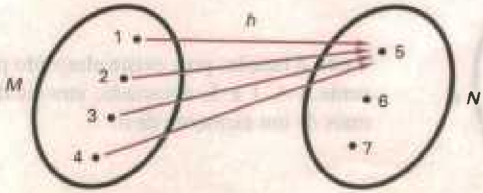
Exemplos

a)



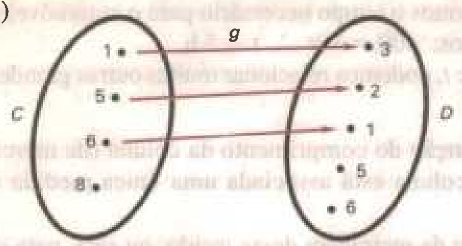
f é função de A em B, pois todo elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.

b)



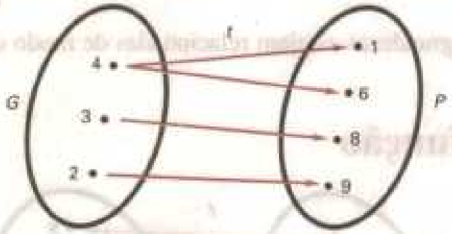
h é função de M em N, pois todo elemento de M está associado, através de h, a um único elemento de N.

c)



g não é função de C em D, pois existe elemento em C (o elemento 8) que não está associado, através de f, a elemento algum de D.

d)



t não é função, pois o elemento 4 está associado, através de t, a mais de um elemento de P.

Nota

Uma função f de A em B é uma relação, e por isso os conceitos de domínio (D), contradomínio (CD) e conjunto imagem (Im) continuam válidos. No exemplo (a) anterior, temos:

$$D(f) = A = \{5, 8, 7, 6\};\ CD(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Dados os conjuntos $A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$ e $B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$, quais das relações seguintes são funções de A em B?

a) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x^2\}$

b) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$

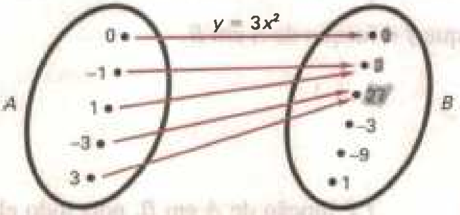
c) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y + 3\}$

d) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3\}$

Resolução

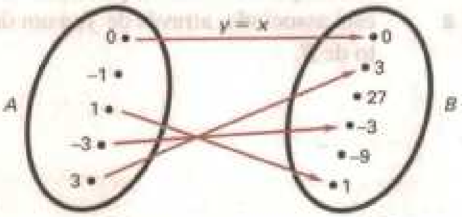
Representando cada uma das relações em diagrama de flechas, temos:

a)



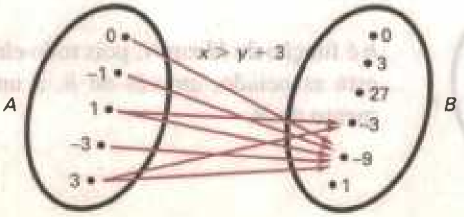
f é função, pois **todo** elemento de A está associado, através de f, a um **único** elemento de B.

b)



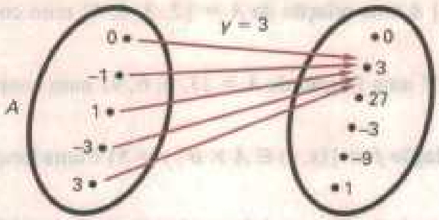
g **não** é função, pois o elemento -1 pertencente a A não está associado, através de g, a nenhum elemento de B.

c)



h **não** é função, pois existe elemento pertencente a A, 1 e 3, associado, através de h, a mais de um elemento de B.

d)

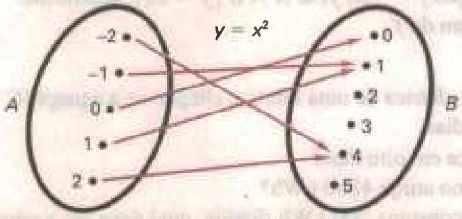


R é função, pois **todo** elemento de *A* está associado, através de *R*, a um único elemento de *B*.

R.2 Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$.

Resolução

Representamos a função em diagrama de flechas:



Assim, temos:

$D(f) = A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

$CD(f) = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

$Im(f) = \{0, 1, 4\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.3, C.4, C.8.

Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, C.2, C.5, C.6, C.7, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, quais das relações seguintes são funções de *A* em *B*?

a) $R = \left\{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{x}\right\}$;

b) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$;

c) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$;

d) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^3\}$.

B.2 Dados os conjuntos $A = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right\}$ e $B = \left\{3, 2, 4, \frac{5}{2}\right\}$, quais das relações seguintes são funções de *A* em *B*?

a) $R = \left\{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{3}{x}\right\}$;

b) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 4 - x\}$;

c) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2\}$;

d) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{N}\}$.

B.3 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 2\}$.

B.4 Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 3, 4, 5, 12\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x^2\}$.

B.5 O conjunto $f = \{(1, 2), (4, 5), (6, 8), (3, 9)\}$ é uma função de *A* em *B*. Determine o domínio e o conjunto imagem da função. É possível determinar o contradomínio dessa função?

B.6 O conjunto $f = \{(3, 2), (8, 5), (6, x)\}$ é uma função cujo domínio é $D(f) = \{3, 8, 6\}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = \{2, 5\}$. Quais são os possíveis valores de *x*?

Exercícios complementares

C.1 O conjunto $f = \{(3, 4), (5, 8), (6, 1), (3, 6)\}$ é uma relação de $A = \{3, 5, 6\}$ num conjunto *B*. Essa relação é função de *A* em *B*? Por quê?

C.2 O conjunto $f = \{(2, 5), (3, 5), (6, 8), (4, 2)\}$ é uma relação de $A = \{2, 3, 6, 4\}$ num conjunto B. Essa relação é função de A em B? Por quê?

C.3 O conjunto $f = \{(1, 2), (x, 3), (5, 8), (6, 4)\}$ é uma função de $A = \{1, 5, 6, 9\}$ num conjunto B. Nessas condições, qual é o valor de x?

C.4 Dados os conjuntos $A = [3, 6]$ e $B = \{8\}$, a relação $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 8\}$ é uma função de A em B? Por quê?

C.5 Dado o conjunto $A = [1, 2]$. A relação $f = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x\}$ é uma função de A em A? Por quê?

C.6 Dados os conjuntos $A = [3, 5]$, $B = [1, 9]$ e a função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f.

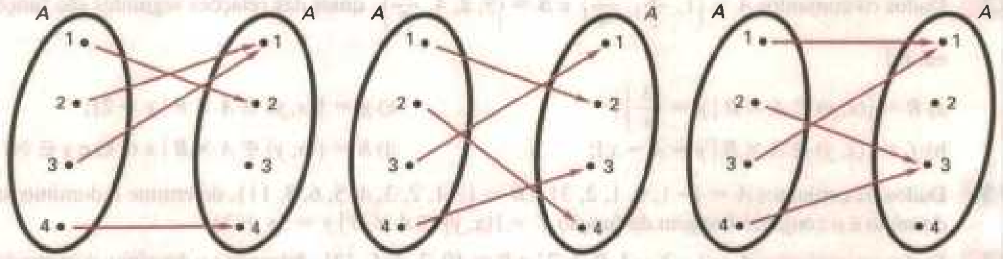
C.7 Dados os conjuntos $A = [1, 3]$, $B = [1, 8]$ e a função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$, determine:
a) o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f;
b) o par $(x, y) \in f$ tal que $x = 5$.

C.8 Através de um estudo sobre o consumo de energia elétrica de uma fábrica, chegou-se à equação $C = 400\,t$, em que C é o consumo em kWh e t é o tempo em dias.
a) Qual o consumo de energia elétrica dessa fábrica em oito dias?
b) Quantos dias são necessários para que o consumo atinja 4800 kWh?
c) Se a empresa adquirir uma nova máquina que consuma 200 kWh diários, qual deve ser a equação que descreva o consumo total da fábrica em função do tempo?

C.9 Um fazendeiro estabelece o preço da saca de café em função da quantidade de sacas adquiridas pelo comprador através da equação $P = 50 + \dfrac{200}{x}$, em que P é o preço em dólares e x é o número de sacas vendidas.
a) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir cem sacas?
b) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir duzentas sacas?
c) Sabendo que um comprador pagou 54 dólares por saca, quantas sacas comprou?

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) Os diagramas seguintes definem as funções f, g e h de A em A, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$.



Sejam M, N e P as imagens das funções f, g e h respectivamente. Então $M' \cup N' \cup P'$, onde X' = complementar de X em relação a A, é o conjunto:
a) A
b) $\{2, 3, 4\}$
c) $\{1\}$
d) $\varnothing$
e) $\{1, 2, 3\}$

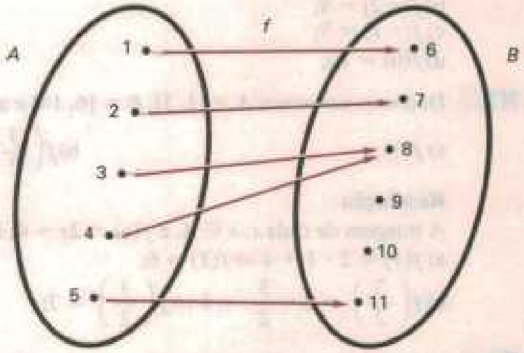
V.2 (FEI-SP) Considere a relação f de $A = \{1, 3, 8\}$ em $\mathbb{R}$: $f = \{(1, 2), (3, 6), (8, 6), (1, x)\}$. Para que valor de x a relação f é uma função?

V.3 (Cescem-SP) Os pares ordenados de números reais (a, b) e (a, a) pertencem a uma função f. Pode-se concluir que:
a) o domínio de f é o conjunto $\{a, b\}$.
b) o conjunto imagem de f é $\{a, b\}$.
c) $a = b$
d) $a = 0$
e) $b = 0$

Capítulo 14

Imagem de um elemento através de uma função

1. Imagem de um elemento através do diagrama de flechas



Consideremos a função descrita pelo diagrama ao lado.

Se um elemento y de B estiver associado a um elemento x de A, através de f, então diremos que y é imagem de x, através de f, e indicaremos esse fato por $y = f(x)$ (lê-se "y é igual a f de x" ou "y é imagem de x através de f"). Assim, temos:

- $6 = f(1)$ (6 é imagem de 1 através de f);
- $7 = f(2)$ (7 é imagem de 2 através de f);
- $8 = f(3)$ (8 é imagem de 3 através de f);
- $8 = f(4)$ (8 é imagem de 4 através de f);
- $11 = f(5)$ (11 é imagem de 5 através de f).

2. Imagem de um elemento através da lei $y = f(x)$

Consideremos os conjuntos $A = [-3, 8]$, $B = [-10, 20]$ e a função $f\colon A \to B$, onde cada x, $x \in A$, é associado a um único $f(x)$, $f(x) \in B$, através da lei $f(x) = 2x + 1$.

A lei $f(x) = 2x + 1$ nos diz que a imagem de cada x do domínio de f é o número $2x + 1$ do contradomínio. Assim, temos, por exemplo:

- a imagem do elemento 4, através de f, é

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 \Rightarrow f(4) = 9;\ \text{logo, } (4, 9) \in f;$$

- a imagem do elemento $\frac{1}{2}$, através de f, é

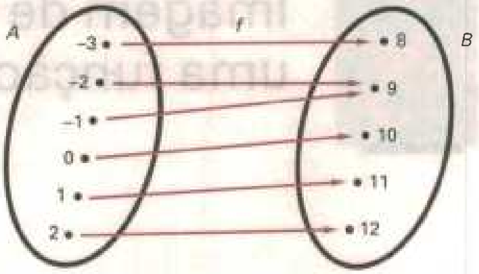
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2;\ \text{logo, } \left(\frac{1}{2}, 2\right) \in f.$$

> Note que o símbolo $f(x)$ representa a ordenada do ponto de abscissa x. Assim, em vez de escrevermos $f(x) = 2x + 1$, podemos escrever $y = 2x + 1$, ou seja, o símbolo $f(x)$ pode ser substituído por y e vice-versa.

Exercícios resolvidos

R.1 Dada a função f de A em B, descrita pelo diagrama ao lado, calcular:

a) $f(-3)$
b) $f(-2)$
c) $f(-1)$
d) $f(0)$
e) $f(1) + f(2)$
f) $\dfrac{2f(-3)}{f(1) + f(2)}$



Resolução
$f(x)$ indica a imagem do elemento x, através da função f. Assim sendo, temos:

a) $f(-3) = 8$;
b) $f(-2) = 9$;
c) $f(-1) = 9$;
d) $f(0) = 10$;
e) $f(1) + f(2) = 11 + 12 = 23$;
f) $\dfrac{2f(-3)}{f(1) + f(2)} = \dfrac{2 \cdot 8}{11 + 12} = \dfrac{16}{23}$.

R.2 Dados os conjuntos $A = [1, 5]$, $B = [6, 14]$ e a função $f = \{(x, f(x)) \in A \times B \mid f(x) = 2x + 4\}$, calcular:

a) $f(1)$
b) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$
c) $f(5)$

Resolução
A imagem de cada x, $x \in A$, é $f(x) = 2x + 4$; logo, temos:

a) $f(1) = 2 \cdot 1 + 4 \Rightarrow f(1) = 6$;
b) $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{3}{2} + 4 \Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 7$;
c) $f(5) = 2 \cdot 5 + 4 \Rightarrow f(5) = 14$.

R.3 Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 3x^2 + 1$, calcular:

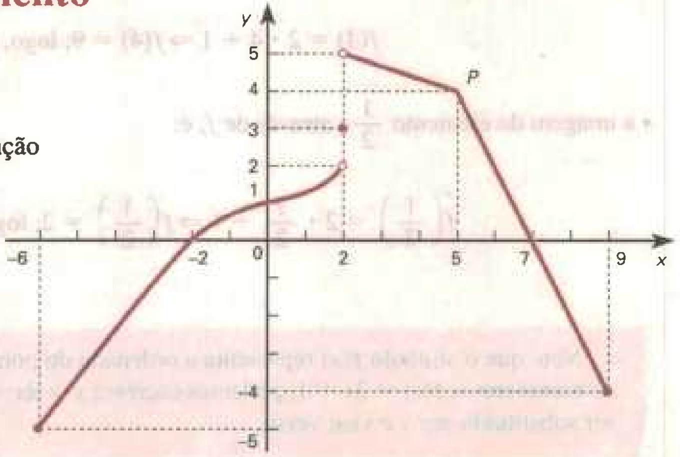
a) $f(-3)$
b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
c) $f(3)$

Resolução
Lembre-se de que y pode ser substituído por $f(x)$.
Então, $f(x) = 3x^2 + 1$; logo, temos:

a) $f(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 1 \Rightarrow f(-3) = 28$;
b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$;
c) $f(3) = 3 \cdot 3^2 + 1 \Rightarrow f(3) = 28$.

3. Imagem de um elemento através do gráfico de uma função

Consideremos o gráfico de uma função $y = f(x)$.



Cada ponto (x, y) do gráfico de f deve ser interpretado como $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Por exemplo, o ponto $P(5, 4)$ pertence ao gráfico, portanto $f(5) = 4$. Analogamente, temos:

- $(-6, -5)$ é ponto do gráfico; logo $f(-6) = -5$;
- $(-2, 0)$ é ponto do gráfico; logo $f(-2) = 0$;
- $(2, 3)$ é ponto do gráfico; logo $f(2) = 3$;
- $(0, 1)$ é ponto do gráfico; logo $f(0) = 1$; etc.

3.1. Estudo do sinal de uma função através do gráfico

Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:

- f é positiva para um elemento x, $x \in D$, se, e somente se, $f(x) > 0$;
- f é negativa para um elemento x, $x \in D$, se, e somente se, $f(x) < 0$;
- f se anula para um elemento x, $x \in D$, se, e somente se, $f(x) = 0$.

Note, portanto, que **o sinal da função para um elemento x, $x \in D$, é o sinal de $f(x)$**, e não o sinal **de x**.

Exemplo

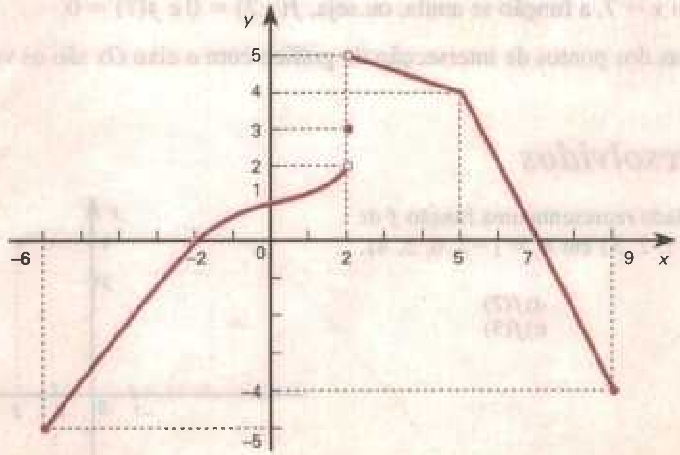
Dada a função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 9$, temos:

- a função é positiva para $x = -4$, pois $f(-4)$ é positivo: $f(-4) = (-4)^2 - 9 = 7$;
- a função é negativa para $x = -2$, pois $f(-2)$ é negativo: $f(-2) = (-2)^2 - 9 = -5$;
- a função se anula para $x = 3$, pois $f(3)$ é zero: $f(3) = 3^2 - 9 = 0$.

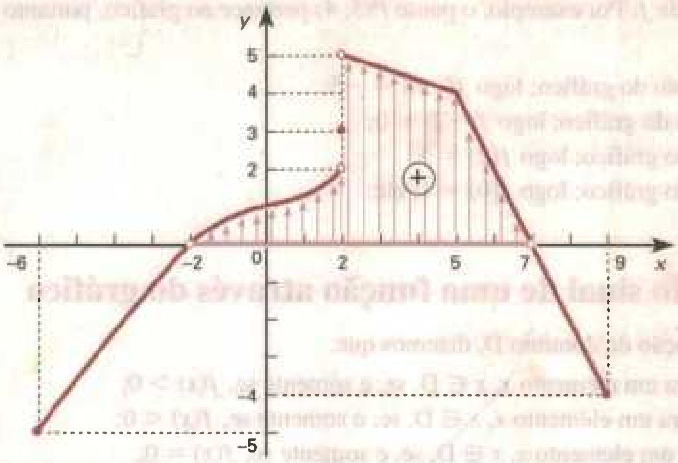
Através do conceito estudado no item 3, podemos discutir a variação de sinal de uma função f através do gráfico.

Exemplo

Seja o gráfico da função $y = f(x)$:

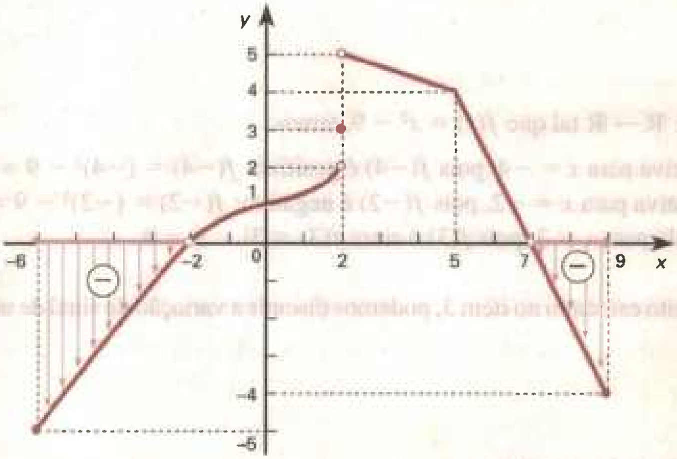


- Para todo x, $-2 < x < 7$, tem-se que $f(x) > 0$:



Por isso dizemos que a função f é positiva para $-2 < x < 7$.

- Para todo x, $-6 \leqslant x < -2$ ou $7 < x \leqslant 9$, tem-se que $f(x) < 0$:



Por isso dizemos que a função f é negativa para $-6 \leqslant x < -2$ ou $7 < x \leqslant 9$.

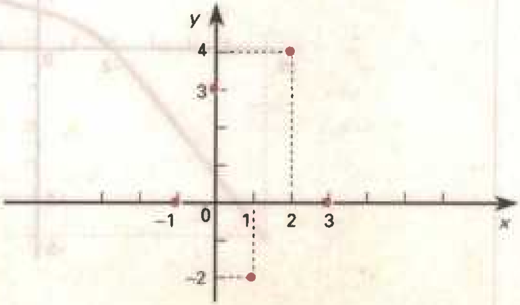
- Para $x = -2$ ou $x = 7$, a função se anula, ou seja, $f(-2) = 0$ e $f(7) = 0$.

Note que as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox são os valores para os quais a função se anula.

Exercícios resolvidos

R.4 O gráfico ao lado representa uma função f de $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{-2, 0, 3, 4\}$.
Calcular:

a) $f(-1)$
b) $f(0)$
c) $f(1)$
d) $f(2)$
e) $f(3)$



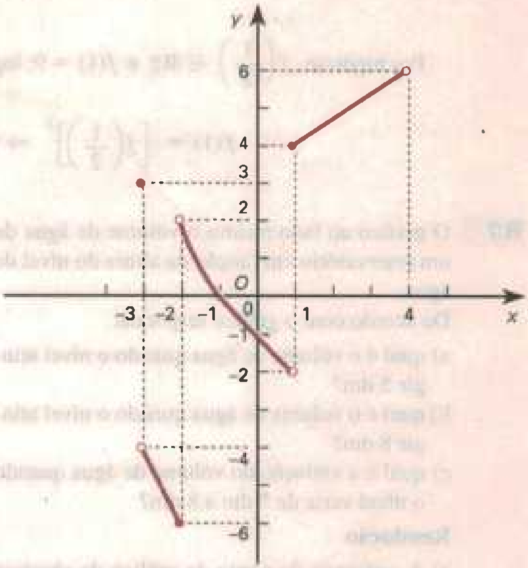
Resolução

Cada ponto do gráfico é do tipo $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada de cada ponto é a imagem da abscissa, através de f. Os pontos do gráfico são $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(1, -2)$, $(2, 4)$ e $(3, 0)$. Logo, temos:

a) $f(-1) = 0$; b) $f(0) = 3$; c) $f(1) = -2$; d) $f(2) = 4$; e) $f(3) = 0$.

R.5 O gráfico ao lado representa uma função f de $[-3, 4[$ em $\mathbb{R}$. Determine:

a) $f(1)$
b) $f(-2)$
c) $f(-3)$
d) $f(-1)$
e) $f(0)$
f) os valores de x para os quais $f(x) > 0$.
g) os valores de x para os quais $f(x) < 0$.
h) os valores de x para os quais $f(x) = 0$.



Resolução

Lembrando que o símbolo "bolinha vazia" (○), usado no gráfico, **exclui** o ponto do gráfico e que o símbolo "bolinha cheia" (●) **inclui** o ponto no gráfico, temos:

a) $f(1)$ é a ordenada do ponto do gráfico cuja abscissa é 1; logo, $f(1) = 4$;
b) $f(-2) = -6$;
c) $f(-3) = 3$;
d) $f(-1) = 0$;
e) $f(0) = -1$.
f) Devemos determinar os valores do domínio da função, portanto valores do eixo Ox, cujas imagens, através de f, sejam positivas. Esses valores são dados pelo conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = -3 \quad \text{ou} \quad -2 < x < -1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq x < 4\}.$$

g) Devemos determinar os valores do domínio da função, portanto valores do eixo Ox, cujas imagens, através de f, sejam negativas. Esses valores são dados pelo conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2 \quad \text{ou} \quad -1 < x < 1\}.$$

h) Devemos determinar os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam zero. Só existe um valor de x que satisfaz essa condição: $x = -1$.

R.6 Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ e $f(1) = 9$. Calcular:

a) $f(2)$ b) $f(0)$ c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Resolução

a) Podemos escrever $2 = 1 + 1$; logo, $f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 9 \cdot 9 = 81$.

b) Podemos escrever $0 = 0 + 0$; logo, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2$.

Por hipótese, $f(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, temos:

$$f(0) = [f(0)]^2 \Rightarrow \cancel{f(0)} = f(0) \cdot \cancel{f(0)} \quad \therefore \quad f(0) = 1.$$

c) Podemos escrever $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; logo, temos:

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

Por hipótese, $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}_+^*$ e $f(1) = 9$; logo, temos:

$$f(1) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow 9 = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad \therefore \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$$

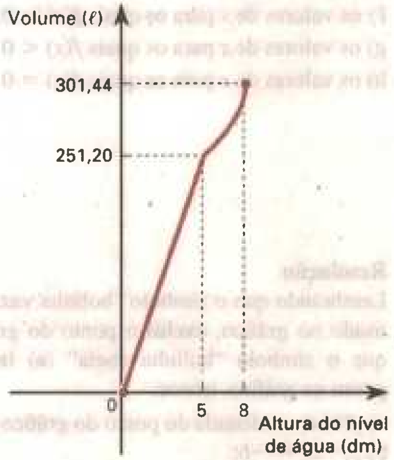
R.7 O gráfico ao lado mostra o volume de água de um reservatório em função da altura do nível de água.

De acordo com o gráfico responda:

a) qual é o volume de água quando o nível atingir 5 dm?

b) qual é o volume de água quando o nível atingir 8 dm?

c) qual é a variação do volume de água quando o nível varia de 5 dm a 8 dm?



Resolução

a) A ordenada do ponto do gráfico de abscissa 5 é 251,20, logo o volume de água quando o nível atinge 5 dm é 251,20 ℓ.

b) A ordenada do ponto do gráfico de abscissa 8 é 301,44, logo o volume de água quando o nível atinge 8 dm é 301,44 ℓ.

c) Quando o nível varia de 5 dm a 8 dm o volume de água varia de 251,20 ℓ a 301,44 ℓ, logo a variação de volume é: 301,44 ℓ − 251,20 ℓ = 50,24 ℓ.

R.8 Sendo f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^2 - 2x$, quais são os elementos do domínio de f que possuem como imagem o número 8?

Resolução

Devemos obter x, $x \in D(f)$, tal que $f(x) = 8$, ou seja, $3x^2 - 2x = 8 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$.

Nessa equação do 2º grau temos $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -8 \end{cases}$ e $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Assim, temos $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm 10}{6} \quad \therefore \quad x = 2$ ou $x = -\dfrac{4}{3}$.

Portanto os elementos de $D(f)$ que possuem imagem igual a 8 são 2 e $-\frac{4}{3}$.

R.9 Sendo f uma função de domínio $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 + 2$, determinar $\text{Im}(f)$.

Resolução

Temos que $\text{Im}(f) = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$, em que:

$$f(-1) = (-1)^4 + 2 = 3;\ f(0) = 0^4 + 2 = 2;\ f(1) = 1^4 + 2 = 3;\ f(2) = 2^4 + 2 = 18.$$

Logo, $\text{Im}(f) = \{2, 3, 18\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.4, B.5, B.7, B.9, B.11, C.1, C.5, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3, B.6, B.10, B.12, C.2, C.4, C.6, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Dados os conjuntos $A = [-10, 8]$, $B = [0, 100]$ e a função $f = \{(x, f(x)) \in A \times B \mid f(x) = 3x + 40\}$, calcule:

a) $f(-10)$ b) $f(2)$ c) $f(0)$ d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

B.2 Dados os conjuntos $A = [-1, 6]$, $B = [0, +\infty[$ e a função $f\colon A \to B$ definida por $f(x) = x^3 + 1$, calcule:

a) $f(-1)$ b) $f(1)$ c) $f(5)$ d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

B.3 Dados os conjuntos $A = [-5, 5]$ e $\mathbb{R}$ e a função $f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + x\}$, calcule:

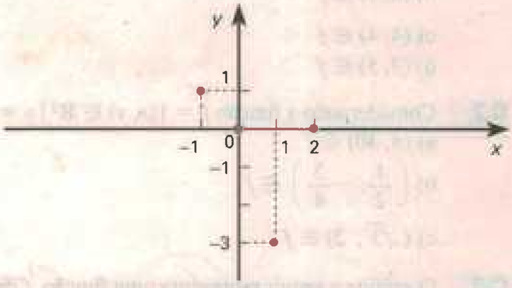
a) $f(-1)$ b) $f(2)$ c) $f(-4)$ d) $f(0)$

B.4 Sendo a função $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $y = x + \frac{1}{x}$, calcule:

a) $f(1)$ b) $f(-1)$ c) $f(2)$ d) $f(5)$

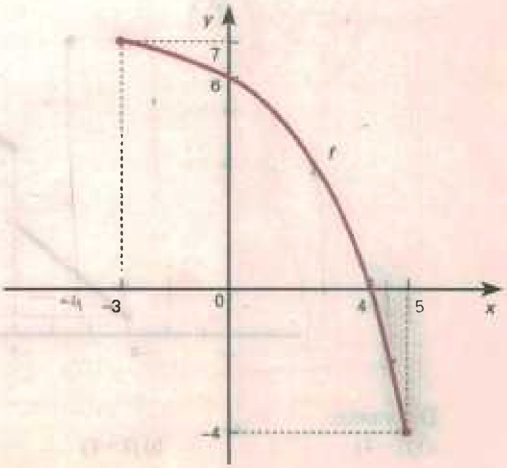
B.5 Ao lado tem-se o gráfico de uma função $f\colon A \to B$, onde $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -1, 0, 1\}$. Determine:

a) $f(-1)$
b) $f(0)$
c) $f(1)$
d) $f(2)$
e) $\dfrac{3f(1)}{f(2) + f(-1)}$



B.6 O gráfico ao lado é de uma função f de $[-3, 5]$ em $\mathbb{R}$. Classifique como V ou F cada uma das afirmações.

a) $f(-3) = 7$
b) $f(0) = 0$
c) $f(4) = 0$
d) $f(5) = 0$
e) $f\left(\frac{9}{2}\right) < 0$
f) $f(3) < 0$
g) $f(5) - f(-3) = -11$
h) $\text{Im}(f) = [-4, 7]$



B.7 Uma função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(4) = 2$, $f(9) = 3$ e $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(36)$ b) $f(81)$ c) $f(2)$ d) $f(1)$

B.8 Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(8) = 2$, $f(27) = 3$ e $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{f(a)}{f(b)}$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $f(b) \neq 0$. Calcule:

a) $f(1)$ b) $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$ c) $f\left(\dfrac{1}{27}\right)$ d) $f(0)$ e) $f(8 \cdot 27)$

B.9 Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{3x + 2}{3}$. Qual é o elemento do domínio de f que possui como imagem o número 1?

B.10 Dada a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{10x}{x^2 + 1}$, quais são os elementos do domínio de f que possuem como imagem o número 4?

B.11 Sendo f uma função de domínio $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^2 - 1$, determine o conjunto imagem de f.

B.12 Dados o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a função $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, determine o conjunto $\text{Im}(f)$.

Exercícios complementares

C.1 Considerando a função $f = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2 - 3x\}$, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $(3, 0) \in f$

b) $(0, 0) \in f$

c) $(4, 4) \in f$

d) $(3, 5) \in f$

e) $(1, -2) \in f$

f) $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}\right) \in f$

g) Existem dois valores de x de modo que $(x, 4) \in f$.

C.2 Considerando a função $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 3x\}$, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $(8, 40) \in f$

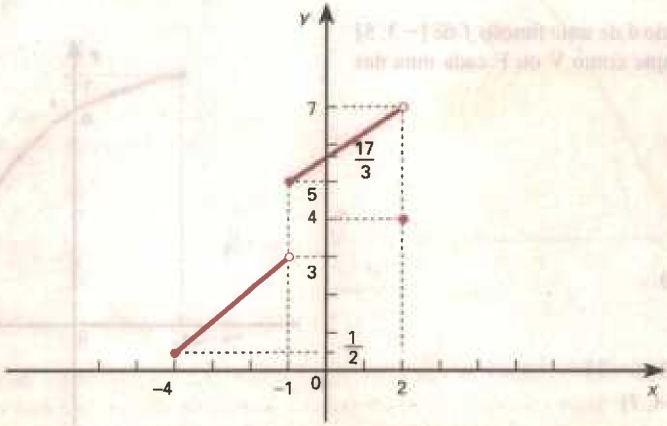
b) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{4}\right) \in f$

c) $(\sqrt{3}, 2) \in f$

d) Existem dois valores de x de modo que $(x, 10) \in f$.

e) Existe um único valor de x de modo que $(x, 9) \in f$.

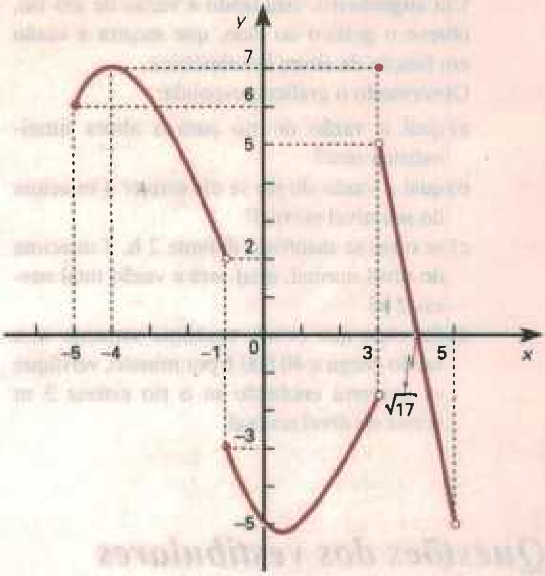
C.3 O gráfico a seguir representa uma função f de $[-4, 2]$ em $\mathbb{R}$.



Determine:

a) $f(-4)$ b) $f(-1)$ c) $f(2)$ d) $f(0)$

C.4 O gráfico ao lado representa uma função f de $[-5, 5[$ em $\mathbb{R}$.



Determine:

a) $f(-5)$

b) $f(-4)$

c) $f(-1)$

d) $f(0)$

e) $f(3)$

f) $f(\sqrt{17})$

g) os valores de x para os quais tem-se $f(x) > 0$.

h) os valores de x para os quais tem-se $f(x) < 0$.

i) os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

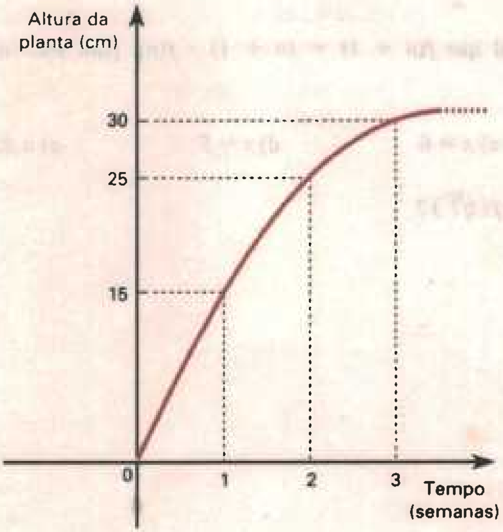
C.5 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(2) = 1$ e $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(4)$ b) $f(8)$ c) $f(1)$ d) $f(\sqrt{2})$

C.6 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(5) = 1$ e $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(1)$ b) $f\left(\frac{1}{5}\right)$ c) $f(25)$ d) $f(125)$

C.7 O gráfico a seguir representa o crescimento de uma planta em função do tempo:



Analisando o gráfico, responda:

a) qual a altura da planta ao final da terceira semana?

b) qual foi o crescimento da planta durante a terceira semana?

c) durante qual das três semanas registradas houve o maior desenvolvimento da planta?

C.8 Em épocas de chuvas, as enchentes de rios e córregos causam grandes problemas, sobretudo às populações ribeirinhas. A incidência de enchentes pode ser prevista através da análise da vazão de um rio em **função** da sua altura limnimétrica. A altura **limnimétrica** é medida com um aparelho denominado **limnógrafo**, que registra continuamente a variação do nível de um rio, adotando como **nível normal** ou **nível 0** (zero) o nível do rio fora da estação das chuvas.

Um engenheiro, estudando a vazão de um rio, obteve o gráfico ao lado, que mostra a vazão em função da altura limnimétrica.

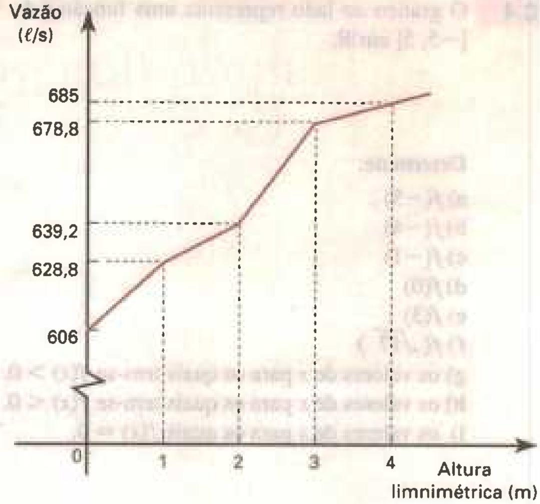
Observando o gráfico, responda:

a) qual a vazão do rio para a altura limnimétrica zero?

b) qual a vazão do rio se ele estiver 4 m acima do seu nível normal?

c) se o rio se mantiver, durante 2 h, 3 m acima do nível normal, qual será a vazão total nessas 2 h?

d) Sabendo que ocorre enchente somente se a vazão chega a 40 800 ℓ por minuto, verifique se ocorrerá enchente se o rio estiver 3 m acima do nível normal.



Questões dos vestibulares

V.1 (UFMG) Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Se $x \neq 0$, uma expressão para $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é:

a) $x^2 + 1$ b) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$ c) $\dfrac{1}{x^2+1}$ d) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ e) nenhuma anterior.

V.2 (Fuvest-SP) Uma função f satisfaz a seguinte condição: $f(x+1) = f(x) + f(1)$ para qualquer valor real da variável x. Sabendo que $f(2) = 1$, podemos concluir que $f(5)$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{5}{2}$ d) 5 e) 10

V.3 (Fatec-SP) Seja a função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Se $x = \dfrac{f(8) - f(7)}{f(7)}$, então:

a) $x = 8$ b) $x = 7$ c) $x = 6$ d) $x = 5$ e) n.d.a.

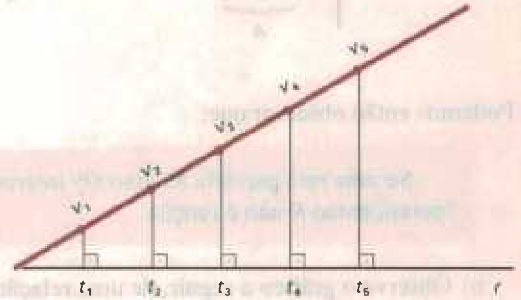
V.4 (Fuvest-SP) Se $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, quanto vale $f(\sqrt[4]{7})$?

Capítulo 15

Estudo dos gráficos

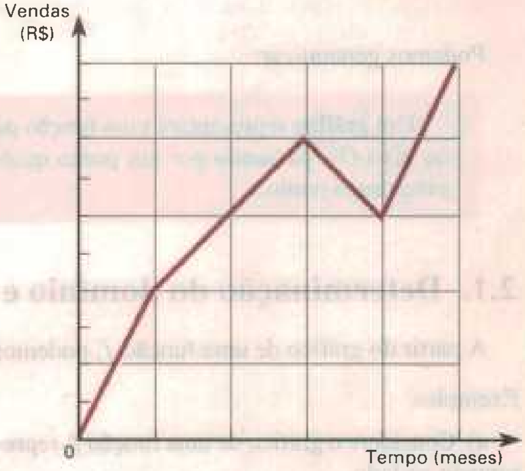
1. Introdução

No decorrer do século XIV, as discussões sobre grandezas variáveis e dependentes eram excessivamente prolixas e de difíceis conclusões, dada a falta de técnicas adequadas a esse estudo.



O matemático francês Nicole Oresme (1323?-1382), ao estudar o movimento de um corpo com aceleração constante, teve a idéia de representar as grandezas "velocidade" e "tempo" através de uma figura que hoje chamamos de "gráfico". Numa reta r, Oresme assinalou pontos t_1, t_2, t_3 ..., representando instantes de tempo, e por esses pontos traçou segmentos perpendiculares a r, cujos comprimentos v_1, v_2, v_3 ... representavam as velocidades do corpo. Observando que os pontos (t_i, v_i) formavam uma reta, Oresme constatou geometricamente importantes leis da física.

O gráfico é, sem dúvida, um instrumento muito valioso para a representação de uma relação. Em todos os ramos do conhecimento humano estudam-se os gráficos – desde uma simples descrição do desempenho de um vendedor (gráfico ao lado) até a sofisticada curva normal de Gauss (do alemão Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), usada em estatística para o cálculo de probabilidades (gráfico abaixo).

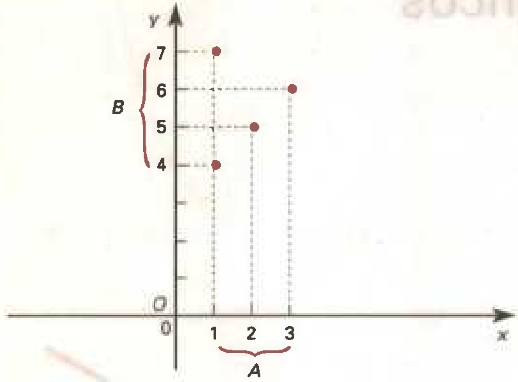


2. Análise gráfica – reconhecimento de uma função

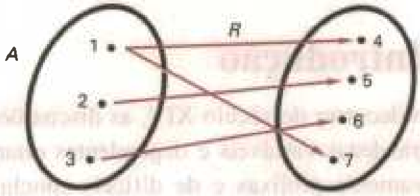
Através do gráfico, podemos verificar se uma **relação** é ou não uma **função**.

Exemplos

a) Considere o gráfico a seguir, de uma relação R de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{4, 5, 6, 7\}$:



Analisando o gráfico, percebemos que a relação R **não** é função de A em B, pois $(1, 4)$ e $(1, 7)$ pertencem a R, ou seja, o elemento 1 do conjunto de partida está associado, através de R, a dois elementos do contradomínio: 4 e 7. Representando R em diagrama de flechas, temos:

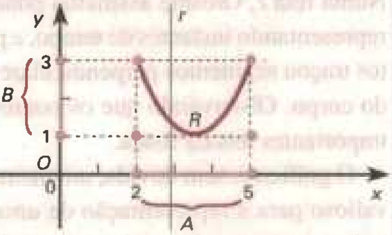


Podemos então observar que:

Se uma reta paralela ao eixo Oy interceptar o gráfico de uma relação R em mais de um ponto, então R não é função.

b) Observe o gráfico a seguir, de uma relação R de $A = [2, 5]$ em $B = [1, 3]$:

Note que qualquer reta r paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, $x \in A$, intercepta o gráfico num único ponto. Isso significa que qualquer x, $x \in A$, está associado, através de R, a um único y, $y \in B$. Logo, R é função de A em B.



Podemos generalizar:

Um gráfico representará uma função de A em B se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto qualquer de abscissa x, $x \in A$, interceptar o gráfico num único ponto.

2.1. Determinação do domínio e do conjunto imagem de uma função

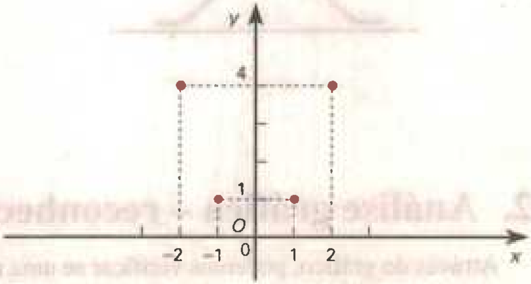
A partir do gráfico de uma função f, podemos determinar o domínio e o conjunto imagem de f.

Exemplos

a) Considere o gráfico de uma função f, representado ao lado.

O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

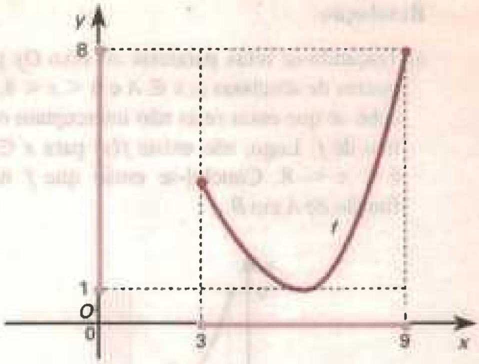
O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, isto é, $Im(f) = \{1, 4\}$.



b) Considere o gráfico de uma função f, representado ao lado.

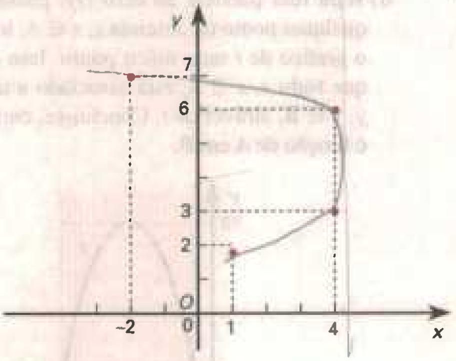
O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = [3, 9]$.

O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, isto é, $Im(f) = [1, 8]$.



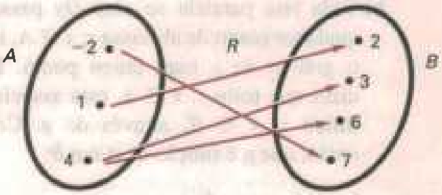
Exercícios resolvidos

R.1 O gráfico abaixo representa uma relação R de $A = \{-2, 1, 4\}$ em $B = \{2, 3, 6, 7\}$.
A relação R é função? Por quê?



Resolução

R não é função, pois os pontos (4, 3) e (4, 6) pertencem a R, ou seja, o mesmo elemento 4 do domínio está associado, através de R, a mais de um elemento do contradomínio. Representando R em diagrama, temos:

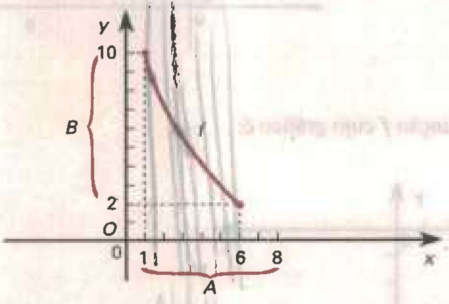


Nota

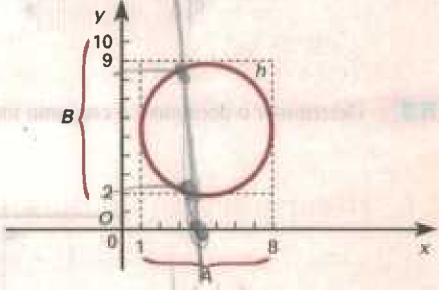
Poderíamos ter justificado a nossa resposta dizendo que R não é função pois a reta paralela ao eixo Oy, que passa pelo ponto de abscissa 4 do eixo Ox, intercepta o gráfico em mais de um ponto.

R.2 Dos gráficos abaixo, quais são funções de $A = [1, 8]$ em $B = [2, 10]$?

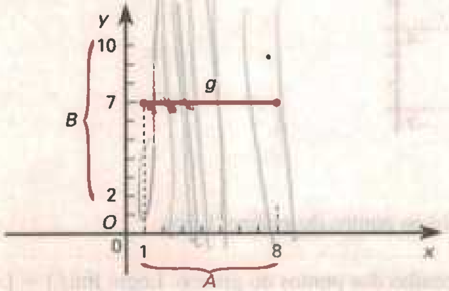
a)



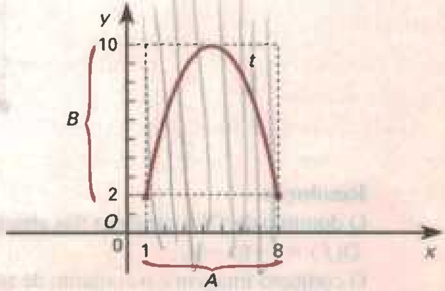
c)



b)

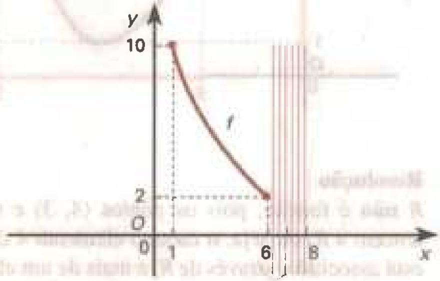


d)

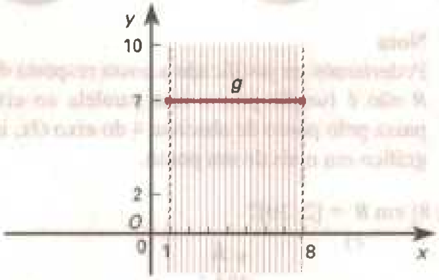


Resolução

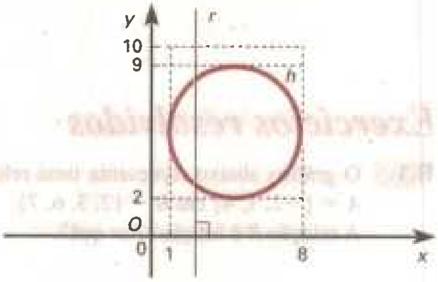
a) Traçando-se retas paralelas ao eixo Oy pelos pontos de abscissas x, $x \in A$ e $6 < x \leqslant 8$, percebe-se que essas retas não interceptam o gráfico de f. Logo, não existe $f(x)$ para $x \in A$ e $6 < x \leqslant 8$. Conclui-se então que f não é função de A em B.



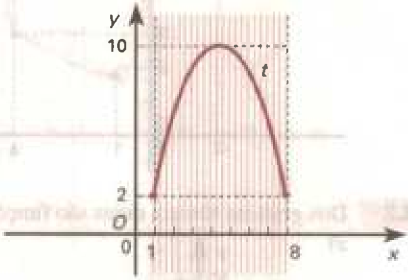
b) Toda reta paralela ao eixo Oy passando por qualquer ponto de abscissa x, $x \in A$, intercepta o gráfico de g num único ponto. Isso quer dizer que **todo** x, $x \in A$, está associado a um **único** y, $y \in B$, através de g. Conclui-se, então, que g é função de A em B.



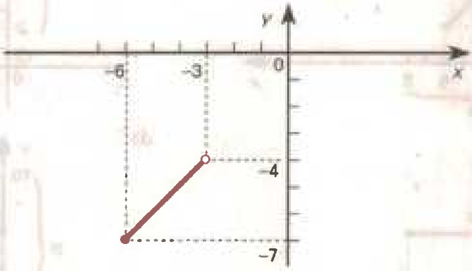
c) Existe pelo menos uma reta r paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, $x \in A$, que intercepta o gráfico de h em mais de um ponto. Isso significa que existe pelo menos um x, $x \in A$, associado, através de h, a mais de um y, $y \in B$. Conclui-se, então, que h não é função de A em B.



d) Toda reta paralela ao eixo Oy, passando por qualquer ponto de abscissa x, $x \in A$, intercepta o gráfico de t num único ponto. Isso significa que **todo** x, $x \in A$, está associado a um único y, $y \in B$, através de t. Conclui-se, então, que t é função de A em B.



R.3 Determinar o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico é:

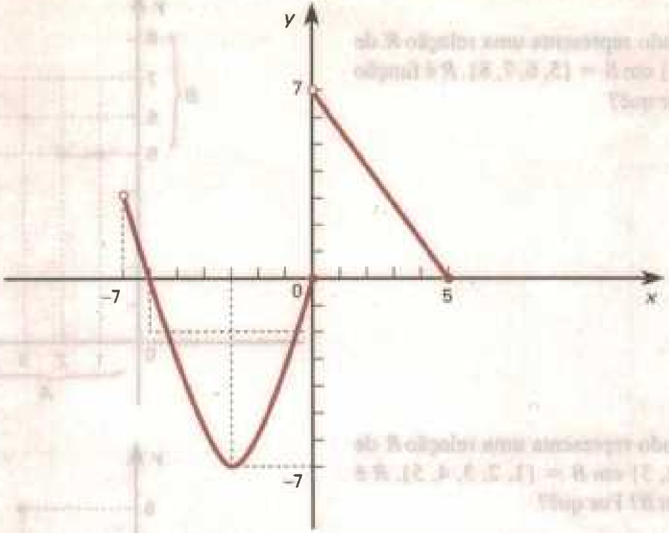


Resolução

O domínio de f é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico. Logo, $D(f) = [-6, -3[$.

O conjunto imagem é o conjunto de todas as ordenadas dos pontos do gráfico. Logo, $Im(f) = [-7, -4[$.

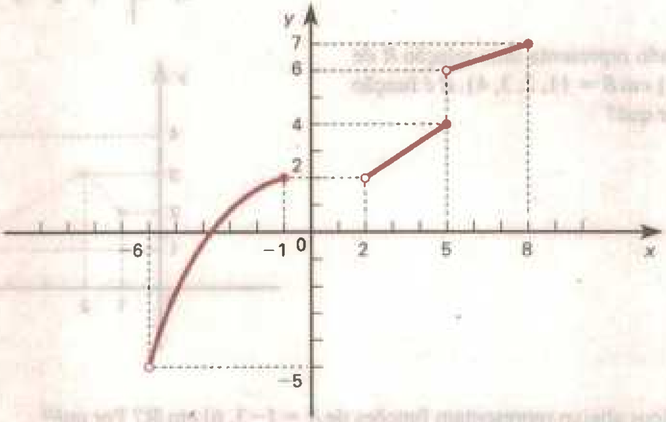
R.4 Determinar o domínio e o conjunto imagem da função *f* cujo gráfico é:



Resolução

O domínio de *f* é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico: D(*f*) =]−7, 5].
O conjunto imagem é formado pelas ordenadas de todos os pontos do gráfico: Im(*f*) = [−7, 7[.

R.5 Determinar o domínio e o conjunto imagem da função *f* cujo gráfico é:



Resolução

O domínio de *f* é o conjunto formado pelas abscissas de todos os pontos do gráfico:

D(*f*) =]−6, −1] ∪]2, 8].

O conjunto imagem de *f* é o conjunto formado pelas ordenadas de todos os pontos do gráfico:

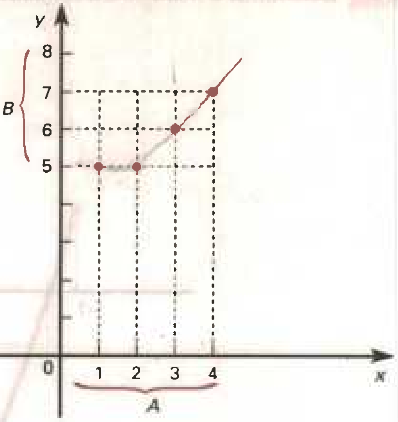
Im(*f*) =]−5, 4] ∪]6, 7].

Sugestões

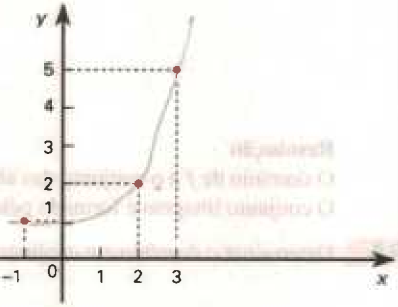
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, C.1, C.4, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, C.2, C.3, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

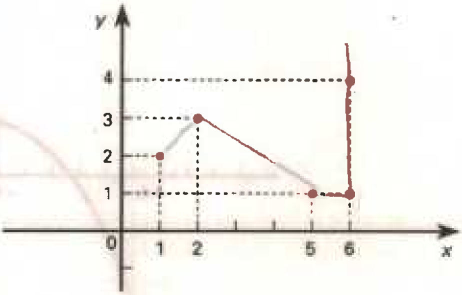
B.1 O gráfico ao lado representa uma relação R de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6, 7, 8\}$. R é função de A em B? Por quê?



B.2 O gráfico ao lado representa uma relação R de $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. R é função de A em B? Por quê?

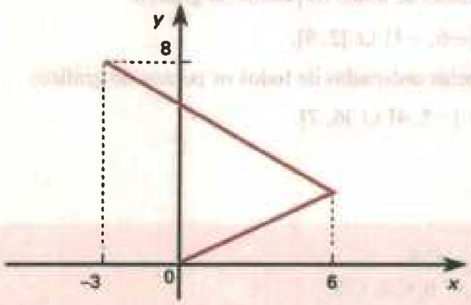


B.3 O gráfico ao lado representa uma relação R de $A = \{1, 2, 5, 6\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$. R é função de A em B? Por quê?

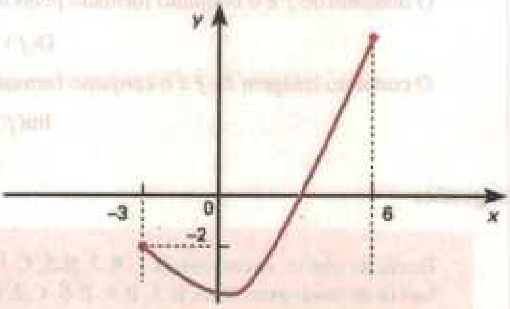


B.4 Quais dos gráficos abaixo representam funções de $A = [-3, 6]$ em $\mathbb{R}$? Por quê?

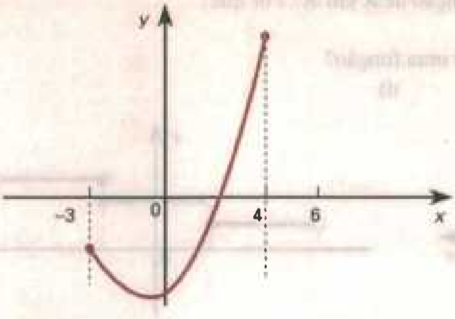
a)



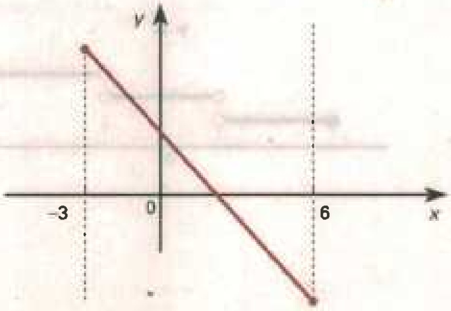
b)



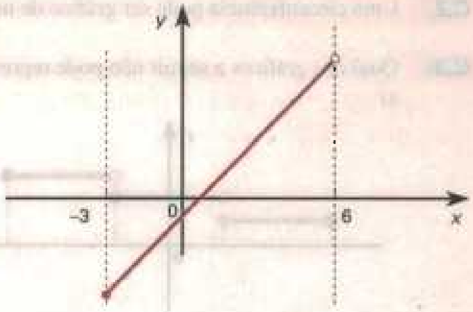
c)



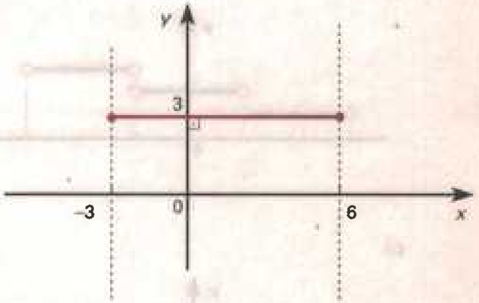
d)



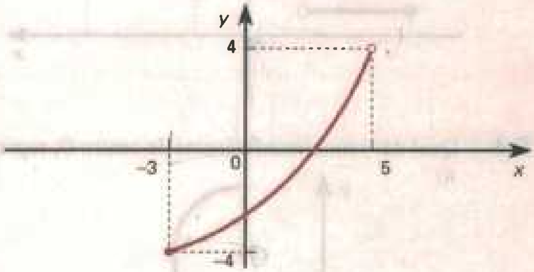
e)



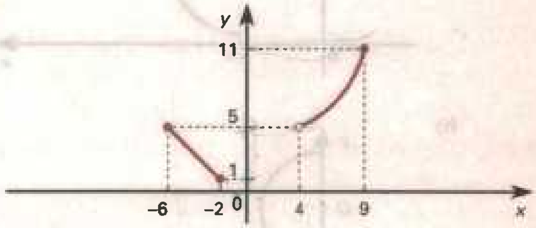
f)



B.5 Determine o domínio e o conjunto imagem da função *f* cujo gráfico é dado ao lado.

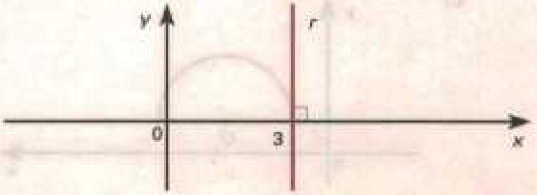


B.6 Determine o domínio e o conjunto imagem da função *f* cujo gráfico é dado ao lado.



Exercícios complementares

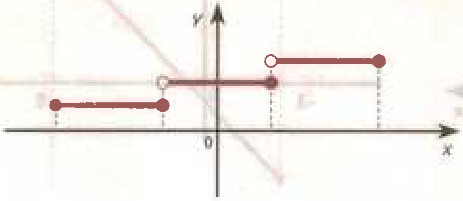
C.1 A reta *r* é o gráfico de uma relação *R* cujo domínio é D(*R*) = {3}. A relação *R* é função? Por quê?



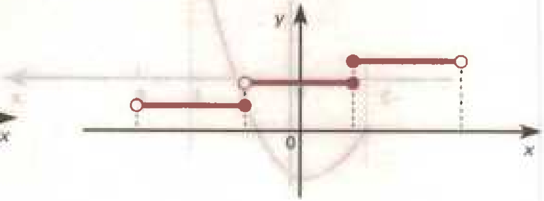
C.2 Uma circunferência pode ser gráfico de uma função de IR em IR? Por quê?

C.3 Qual dos gráficos a seguir não pode representar uma função?

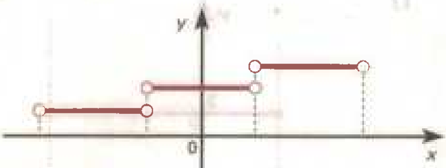
a)



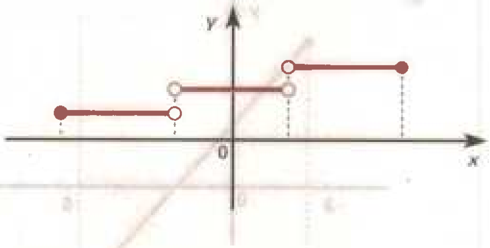
d)



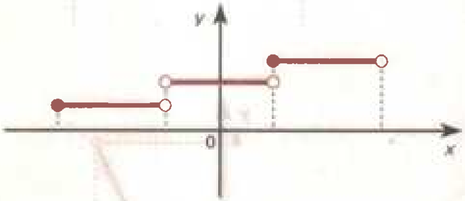
b)



e)

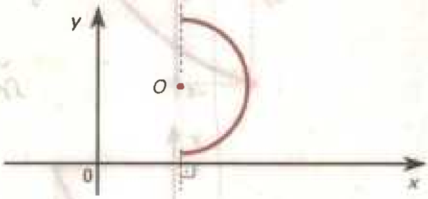


c)

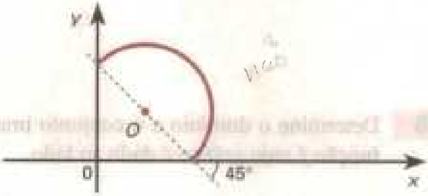


C.4 Qual das semicircunferências de centro *O*, representadas a seguir, pode ser gráfico de uma função?

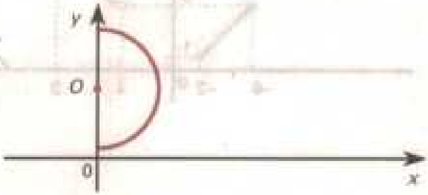
a)



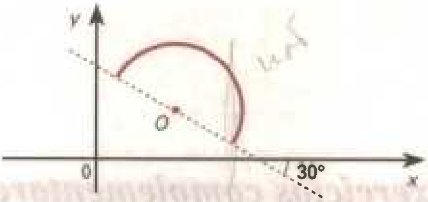
d)



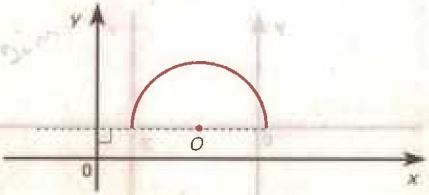
b)



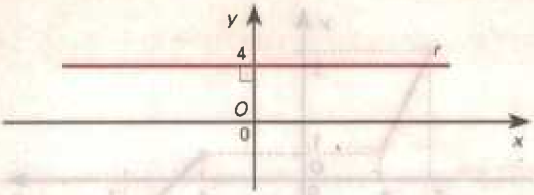
e)



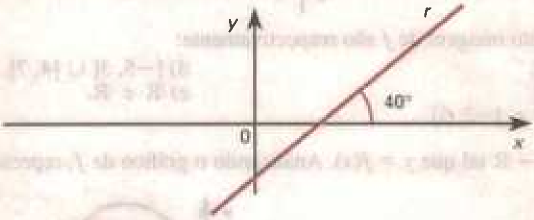
c)



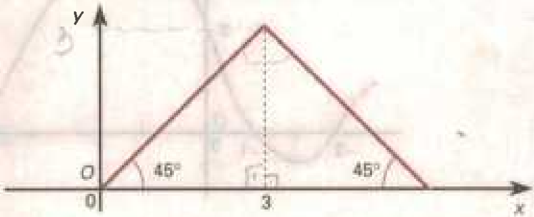
C.5 A reta *r* é o gráfico de uma função *f*. Determine o domínio e o conjunto imagem de *f*.



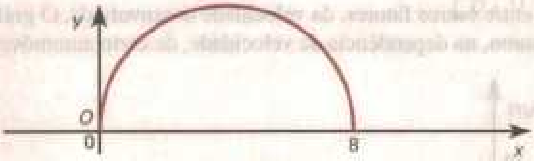
C.6 A reta *r* abaixo é o gráfico de uma função *f*. Determine o domínio e o conjunto imagem de *f*.



C.7 Determine o domínio e o conjunto imagem da função *f* cujo gráfico é:



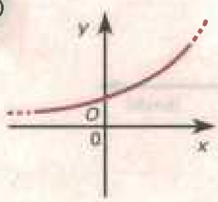
C.8 Determine o domínio e o conjunto imagem da função *f* cujo gráfico é a semicircunferência a seguir:



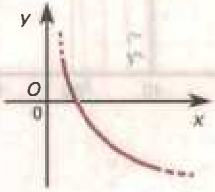
Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Qual dos gráficos seguintes representa uma função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$?

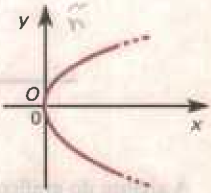
a)



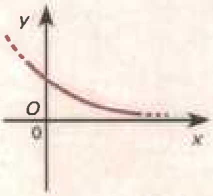
c)



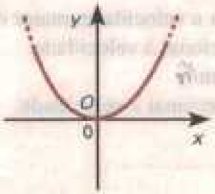
e)



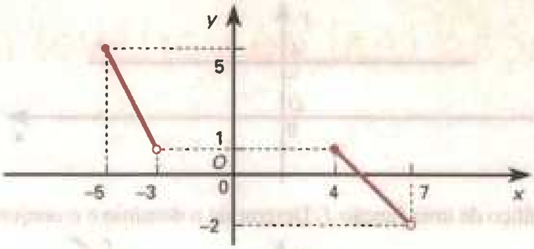
b)



d)



V.2 (F. M. Santa Casa-SP) O gráfico de uma função f é:

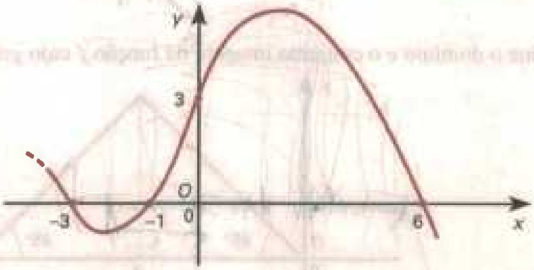


O domínio e o conjunto imagem de f são respectivamente:

a) $[-5, 7[$ e $[-2, 5]$.
b) $[-5, 7[$ e $]-2, 5]$.
c) $[-5, -3[\cup [4, 7[$ e $]-2, 5]$.
d) $[-5, 3[\cup [4, 7[$ e $]-2, 5] - \{1\}$.
e) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$.

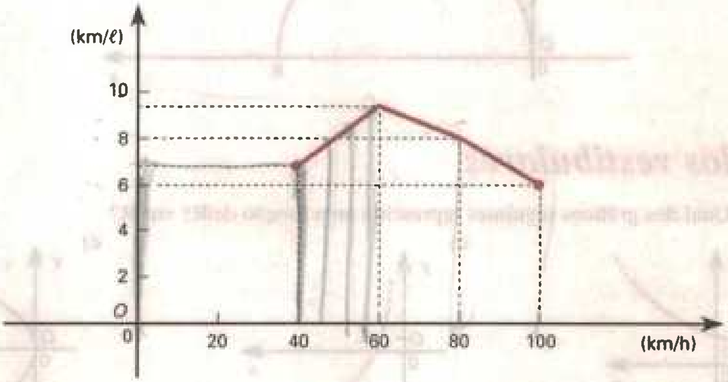
V.3 (FGV-SP) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Analisando o gráfico de f, representado abaixo, assinale a afirmação correta:

a) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0$
b) $f(0) = 0$
c) $f(-1) = f(4)$
d) $f(-3) = f(6)$
e) $f(4) < 0$



V.4 (Unisinos-RS) O consumo de combustível de um automóvel é medido pelo número de quilômetros que percorre, gastando 1 ℓ de combustível.

O consumo depende, entre outros fatores, da velocidade desenvolvida. O gráfico (da revista *Quatro Rodas*) a seguir indica o consumo, na dependência da velocidade, de certo automóvel.



A análise do gráfico mostra que:

a) o maior consumo se dá aos 60 km/h.
b) a partir de 40 km/h, quanto maior a velocidade, maior é o consumo.
c) o consumo é diretamente proporcional à velocidade.
d) o menor consumo se dá aos 60 km/h.
e) o consumo é inversamente proporcional à velocidade.

Capítulo 16

Função real de variável real

Conceituação

Toda função f em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ denomina-se **função real de variável real**.

Para que uma função f esteja completamente definida, é necessário que sejam dados: o seu domínio, o seu contradomínio e a lei de associação $y = f(x)$. Porém, para facilitar o estudo das funções reais de variável real, foi convencionado:

Se o domínio de uma função f for o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ onde f pode ser definida, e o contradomínio de f for $\mathbb{R}$, então essa função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$.

Assim sendo, ao apresentarmos a função $y = f(x)$, ficam subentendidos como domínio e contradomínio de f os conjuntos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \text{ e } CD(f) = \mathbb{R}.$$

Exemplos

a) Ao apresentarmos a função f, através da lei: $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

- fica subentendido como domínio de f o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\dfrac{1}{x}$ também seja real; temos que:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0, \text{ logo, } D(f) = \mathbb{R}^*;$$

- fica subentendido como contradomínio de f o conjunto dos números reais, $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) Ao apresentarmos a função f, através da lei: $f(x) = \sqrt{x}$,

- fica subentendido como domínio de f o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\sqrt{x}$ também seja real; temos que: $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$; logo, $D(f) = \mathbb{R}_+$;
- fica subentendido como contradomínio de f o conjunto dos números reais $CD(f) = \mathbb{R}$.

c) Ao apresentarmos a função f, através da lei: $f(x) = 3x + 5$,

- fica subentendido como domínio de f o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $3x + 5$ também seja real; temos que: $3x + 5 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, isto é, $3x + 5$ é real para todo x real; logo, $D(f) = \mathbb{R}$;
- fica subentendido como contradomínio de f o conjunto dos números reais $CD(f) = \mathbb{R}$.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x-8}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{1}{x-8}$ também seja real. Temos que: $\frac{1}{x-8} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 8 \neq 0$ (ou seja, $x \neq 8$).

Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{8\}$.

R.2 Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{x-5}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\sqrt{x-5}$ também seja real. Temos que: $\sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 5 \geqslant 0$ (ou seja, $x \geqslant 5$).

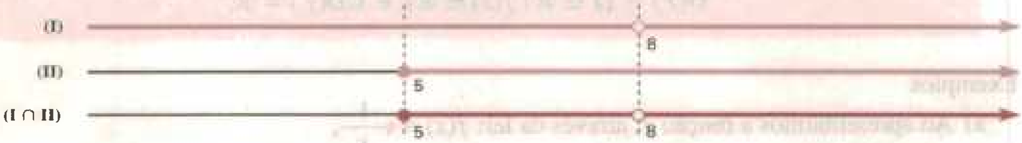
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

R.3 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x-8} + \sqrt{x-5}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{1}{x-8} + \sqrt{x-5}$ também seja real. Temos que: $\frac{1}{x-8} + \sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x - 8 \neq 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{x - 5 \geqslant 0}_{\text{(II)}}$.

Lembrando que o conectivo "e" indica a intersecção das soluções das inequações (I) e (II), temos:



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5 \text{ e } x \neq 8\}$.

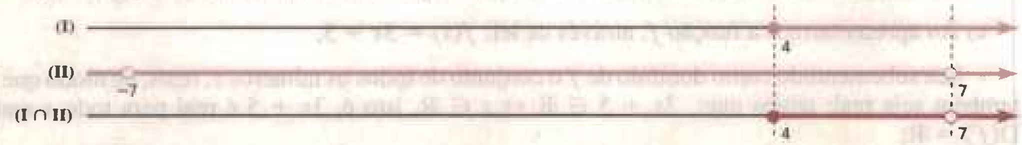
R.4 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2 - 49}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49}$ também seja real.

Temos que: $\frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x - 4 \geqslant 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{x^2 - 49 \neq 0}_{\text{(II)}}$.

Resolvendo a inequação (I), encontramos $x \geqslant 4$, e resolvendo (II), encontramos $x \neq -7$ e $x \neq 7$. Fazendo a intersecção das soluções de (I) e (II), temos:



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4 \text{ e } x \neq 7\}$.

R.5 **Definição**: duas funções f e g são **idênticas** se, e somente se, têm o mesmo domínio D e $f(x) = g(x)$, $\forall x, x \in D$. Segundo essa definição, verifique se as funções f e g são idênticas, nos seguintes casos:

a) $f(x) = (x + 2)^2$ e $g(x) = x^2 + 4x + 4$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ e $g(x) = x + 3$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ e $g(x) = x$.

Resolução

Devemos dar os passos descritos a seguir, para verificar se f e g são idênticas.

1º passo

Comparamos D(f) com D(g):

- se D(f) ≠ D(g), então as funções f e g não são idênticas.
- se D(f) = D(g), isto é, se as funções têm o mesmo domínio D, então vamos para o 2º passo.

2º passo

Igualamos $f(x)$ à função $g(x)$, isto é, $f(x) = g(x)$. Essa igualdade é equivalente a $f(x) - g(x) = 0$ (I). Se, efetuando todas as operações no primeiro membro de (I), obtivermos $0 = 0$, então as funções são idênticas. Caso contrário as funções não são idênticas.

a) *1º passo*

D(f) = $\mathbb{R}$ e D(g) = $\mathbb{R}$; como D(f) = D(g), partimos para o próximo passo.

2º passo

Igualamos $f(x)$ a $g(x)$, ou seja:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - x^2 - 4x - 4 = 0$$
$$\therefore\ x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x - 4 = 0\ \therefore\ 0 = 0.$$

Logo, as funções f e g são idênticas.

b) *1º passo*

D(f) = $\mathbb{R} - \{3\}$ e D(g) = $\mathbb{R}$; como D(f) ≠ D(g), concluímos que as funções f e g não são idênticas.

c) *1º passo*

Para determinarmos o domínio de $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ devemos impor que $x^2 + 1 \neq 0$, ou seja, $x^2 \neq -1$. Como essa desigualdade é verdadeira para todo x, $x \in \mathbb{R}$, temos que D(f) = $\mathbb{R}$. Temos ainda que D(g) = $\mathbb{R}$. Como D(f) = D(g), partimos para o 2º passo.

2º passo

Igualamos $f(x)$ a $g(x)$, ou seja,

$$\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x \Leftrightarrow \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} - x = 0\ \therefore\ \frac{x\cancel{(x^2 + 1)}}{\cancel{x^2 + 1}} - x = 0\ \therefore\ x - x = 0\ \therefore\ 0 = 0.$$

Logo, as funções f e g são idênticas.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, C.1, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, C.4, C.5, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

e) $f(x) = x + 2$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

i) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

j) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

B.2 Determine o domínio de cada uma das funções, representando-o no eixo real:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x-3} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-25}$

d) $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x-1}$

e) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[4]{x-2}$

B.3 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^3-8}$

b) $f(x) = \sqrt{4x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-1}}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^4-10x^2+9}$

e) $f(x) = \dfrac{6}{(x-1)(2x-1)(4x-5)}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^5-32} + \sqrt{2x-1}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x+2}} - \dfrac{1}{x^6-1}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \dfrac{1}{x^4-1}$

i) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x^4+5}}$

j) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

k) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2} + \dfrac{x}{x-3}$

B.4 Determine o domínio de cada uma das funções, representando-o no eixo real:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2-4} + \sqrt{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^4-16} + \dfrac{1}{x^2-9} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{(x^2-5x+4)(x^3-8)}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} + x$

Exercícios complementares

C.1 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x^3}$

e) $f(x) = \sqrt{-x^3}$

C.2 Os domínios de duas funções f e g são, respectivamente, D_1 e D_2. Seja h uma função tal que $h(x) = f(x) + g(x)$. Assinale a afirmação verdadeira:

a) O domínio da função h é o conjunto $D_1 \cup D_2$.

b) O domínio da função h é o conjunto $D_1 \cap D_2$.

c) O domínio da função h é o conjunto $D_1 - D_2$.

d) O domínio da função h é o conjunto D_1.

e) O domínio da função h é o conjunto D_2.

C.3 Os domínios de duas funções f e g são, respectivamente, D_1 e D_2. Seja h uma função tal que $h(x) = f(x) - g(x)$. Assinale a afirmação verdadeira:

a) O domínio da função h é o conjunto $D_1 \cup D_2$.
b) O domínio da função h é o conjunto $D_1 \cap D_2$.
c) O domínio da função h é o conjunto $D_1 - D_2$.
d) O domínio da função h é o conjunto D_1.
e) O domínio da função h é o conjunto D_2.

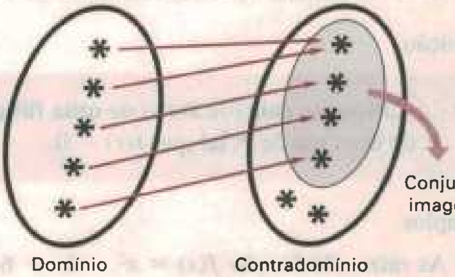
C.4 Os domínios de três funções f, g e h são, respectivamente, D_1, D_2 e D_3. Sendo R uma função tal que $R(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, assinale a afirmação verdadeira:

a) O domínio da função R é o conjunto $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.
b) O domínio da função R é o conjunto $D_1 \cap D_2 \cap D_3$.
c) O domínio da função R é o conjunto D_1.
d) O domínio da função R é o conjunto D_2.
e) O domínio da função R é o conjunto D_3.

C.5 Os domínios de duas funções f e g são, respectivamente, D_1 e D_2. Sabe-se que $g(x) \neq 0$, $\forall x, x \in D_2$. Seja h uma função tal que $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Assinale a afirmação verdadeira:

a) O domínio da função h é o conjunto $D_1 \cup D_2$.
b) O domínio da função h é o conjunto $D_1 \cap D_2$.
c) O domínio da função h é o conjunto $D_1 - D_2$.
d) O domínio da função h é o conjunto D_1.
e) O domínio da função h é o conjunto D_2.

C.6 Seja f uma função de domínio D. O **conjunto imagem** de f é o conjunto das imagens $f(x)$ de todos os elementos x do domínio D, isto é, $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$. Num diagrama de flechas, temos:



Determine o conjunto imagem de cada uma das funções.

a) $f(x) = 2x$
b) $f(x) = x + 2$
c) $f(x) = \dfrac{x}{x}$
d) $f(x) = x^2$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = \sqrt{x}$
g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

C.7 De acordo com a definição apresentada no exercício resolvido R.5, verifique se as funções f e g são idênticas nos seguintes casos:

a) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$ e $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ e $g(x) = x - 1$;
c) $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = x$;
d) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 15x}{x^2 + 5}$ e $g(x) = 3x$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Qual o domínio da função $f(x) = \dfrac{2}{4 - x^2}$?

V.2 (UFPR) O domínio da função $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ é:

a) $]1, +\infty[$
b) $]-1, +\infty[$
c) $]-1, 1[$
d) $\varnothing$
e) $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

V.3 (Cesgranrio) Sendo $x \geqslant 4$, o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 4}$ é dado por:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$
d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 4\}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

V.4 (UFMG) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$. Pode-se afirmar que o conjunto imagem de f é:

a) $\{y \in \mathbb{R}: y \geqslant -1\}$
b) $\{y \in \mathbb{R}: y \geqslant 0\}$
c) $\{y \in \mathbb{R}: y \geqslant 2\}$
d) $\{y \in \mathbb{R}: y \geqslant 3\}$
e) $\mathbb{R}$

Capítulo 17

Função constante, crescente ou decrescente

1. Raiz de uma função

Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 9$.

Note que $f(3) = 3^2 - 9 = 0$ e $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$. Ou seja, para $x = 3$ ou $x = -3$, a função $f(x) = x^2 - 9$ se anula. Por isso, os números 3 e -3 são chamados de **raízes** (ou de **zeros**) **da função** f.

Definição

> Chama-se **raiz** (ou **zero**) **de uma função real de variável real**, $y = f(x)$, todo número r, do domínio de f, tal que $f(r) = 0$.

Exemplos

a) As raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são todos os valores reais x tais que $f(x) = 0$, isto é, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$. Logo, as raízes de f são 2 e 3.

b) A raiz da função $g(x) = 2x - 3$ é obtida fazendo-se $g(x) = 0$, isto é, $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Logo, a raiz de g é $\frac{3}{2}$.

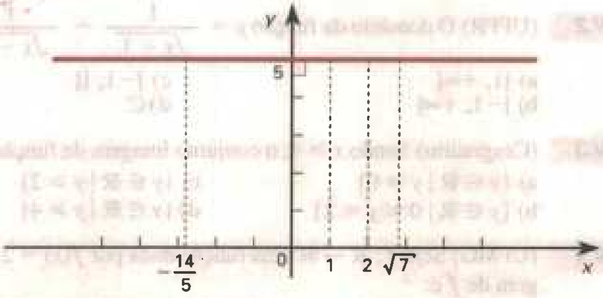
c) A função $h(x) = x^2 + 9$ não possui raiz no domínio $\mathbb{R}$, pois $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9$. Não há número real cujo quadrado seja igual a -9.

2. Função constante

Consideremos a função real, de variável real $f(x) = 5$, ou seja, a imagem de qualquer número real x é o número 5. Por exemplo:

$$f(2) = 5;$$
$$f(\sqrt{7}) = 5;$$
$$f(1) = 5;$$
$$f\left(-\frac{14}{5}\right) = 5;$$
$$\vdots$$

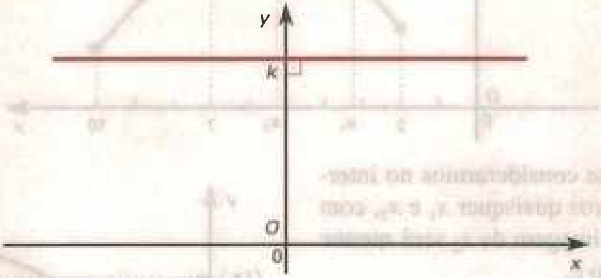
Seu gráfico é:



Tal função é denominada "função constante".

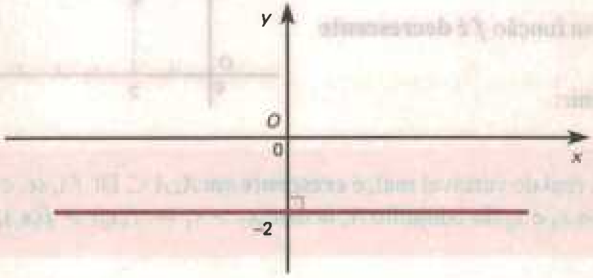
Chama-se "função constante" toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = k$ (k, constante real).

O gráfico da função constante $f(x) = k$ é a reta paralela ao eixo Ox pelo ponto $(0, k)$.

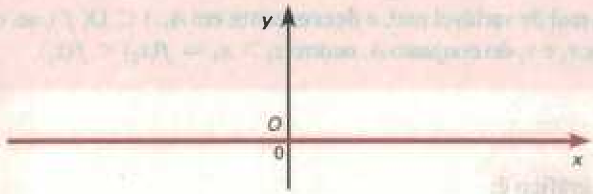


Exemplos

a) A função $f(x) = -2$ é constante. Seu gráfico é:

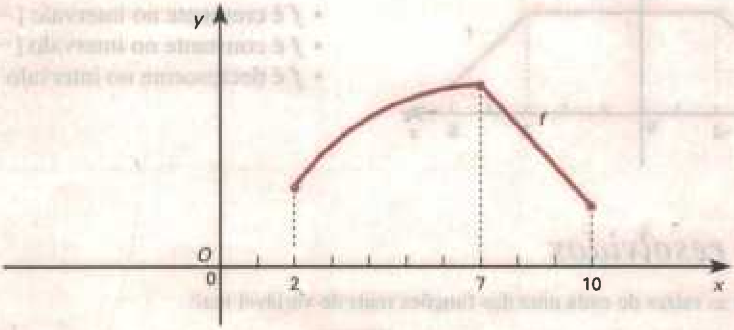


b) A função $f(x) = 0$ é constante e seu gráfico é a reta que coincide com o eixo Ox:



3. Função crescente e função decrescente

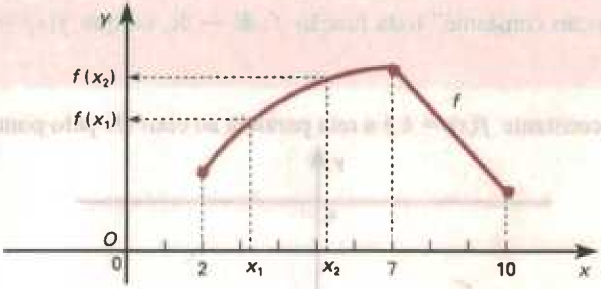
Considere o gráfico de uma função f:



Note que no intervalo $[2, 7] \subset D(f)$, se considerarmos dois números quaisquer x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, teremos que a imagem de x_2 será maior que a imagem de x_1, isto é,

$$\{x_1, x_2\} \subset [2, 7], x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Por isso, dizemos que a função f é **crescente** no intervalo [2, 7]. Observe:

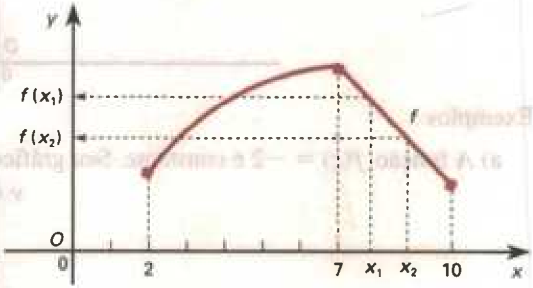


Note também que, se considerarmos no intervalo [7, 10] dois números quaisquer x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, teremos que a imagem de x_2 será **menor** que a imagem de x_1, isto é,

$$\{x_1, x_2\} \subset [7, 10], x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Por isso, dizemos que essa função f é **decrescente** no intervalo [7, 10].

Assim, podemos definir:

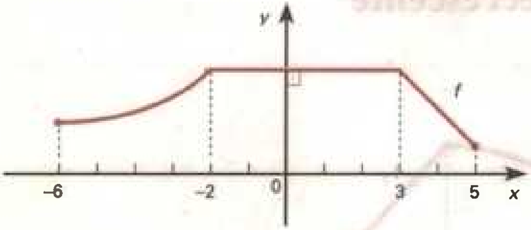


Uma função f, real de variável real, é **crescente** em A, $A \subset D(f)$, se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 do conjunto A, ocorre $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Uma função f, real de variável real, é **decrescente** em A, $A \subset D(f)$, se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 do conjunto A, ocorre $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Exemplo

Seja f a função cujo gráfico é:



- f é crescente no intervalo $[-6, -2]$;
- f é constante no intervalo $[-2, 3]$;
- f é decrescente no intervalo $[3, 5]$.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar as raízes de cada uma das funções reais de variável real:

a) $f(x) = x^3 - x$ b) $y = \sqrt{2x - 1}$ c) $y = \dfrac{1}{x}$

Resolução

Um número r, $r \in D(f)$, é raiz de uma função $y = f(x)$ se, e somente se, $f(r) = 0$.

a) Para determinarmos as raízes de $f(x) = x^3 - x$, basta impormos $f(x) = 0$, isto é:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \ \therefore \ x = 0 \text{ ou}$$
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1.$$

Assim, as raízes da função são 0, 1 e -1.

b) $\sqrt{2x - 1} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$.

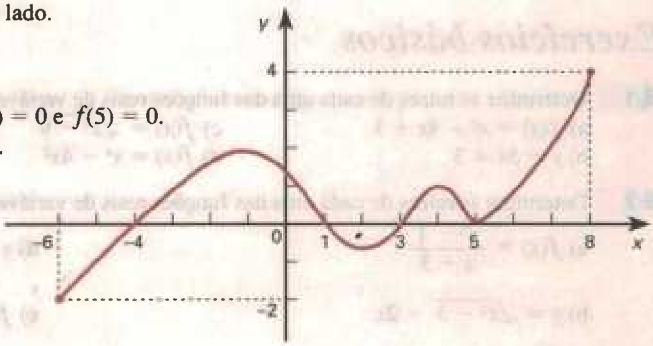
Assim, a raiz da função $y = \sqrt{2x - 1}$ é $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \nexists x, x \in \mathbb{R}$.

Assim, a função $y = \frac{1}{x}$ não possui raiz.

R.2 O gráfico de uma função f é dado ao lado.
Quais são as raízes de f?

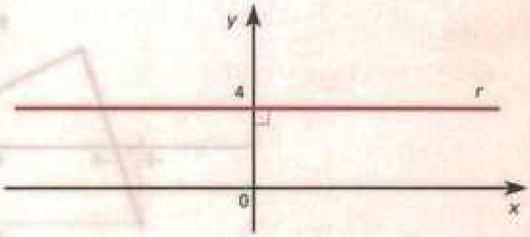
Resolução
Note que $f(-4) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$ e $f(5) = 0$.
Logo, as raízes de f são -4, 1, 3 e 5.



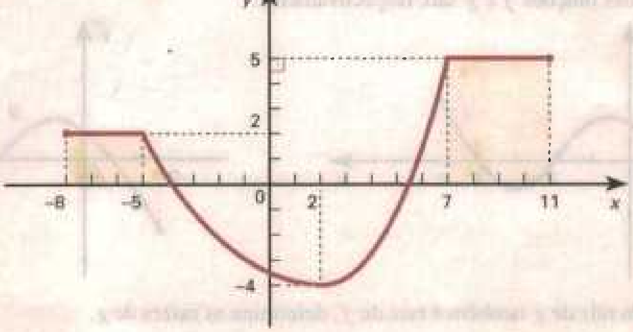
As raízes de uma função f são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

R.3 O gráfico de uma função f é a reta r ao lado. Determinar a lei $y = f(x)$ que associa cada x do domínio de f à sua imagem.

Resolução
Pelo gráfico observamos que a imagem, através de f, de qualquer x real é o número 4. Logo, temos a função constante $f(x) = 4$.



R.4 O gráfico de uma função f é:



a) Em que intervalo do domínio a função f é crescente?
b) Em que intervalo do domínio a função f é decrescente?
c) Em que intervalo do domínio a função f é constante?

Resolução

a) Se, aumentando-se os valores de x, conseqüentemente aumentarem os valores de y, então a função é crescente. Isso ocorre no intervalo $[2, 7]$.

b) Se, aumentando-se os valores de x, conseqüentemente diminuírem os valores de y, então a função é decrescente. Isso ocorre no intervalo $[-5, 2]$.

c) A função é constante nos intervalos $[-8, -5]$ e $[7, 11]$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, C.2, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.8, C.1, C.3, C.5.

Exercícios básicos

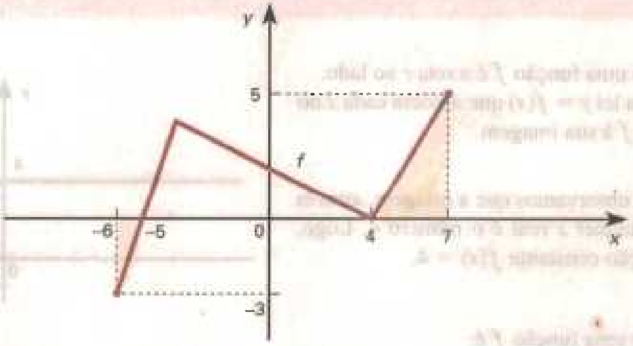
B.1 Determine as raízes de cada uma das funções reais de variável real:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $y = 5x + 3$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
d) $f(x) = x^4 - 4x^2$
e) $y = x^4 - 3x^2 + 2$
f) $y = x^2 + 1$

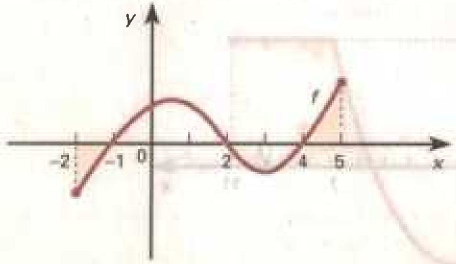
B.2 Determine as raízes de cada uma das funções reais de variável real:

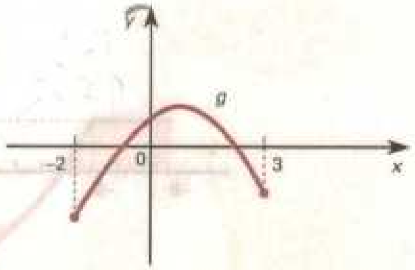
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$
b) $y = \sqrt{x^2 - 3} - 2x$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
d) $y = \dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{2x + 2}{4}$
e) $f(x) = \dfrac{x + 6}{x} - 2x$

B.3 O gráfico de uma função f é dado abaixo. Determine as raízes da função f.



B.4 Os gráficos de duas funções f e g são, respectivamente:





Sabendo que toda raiz de g também é raiz de f, determine as raízes de g.

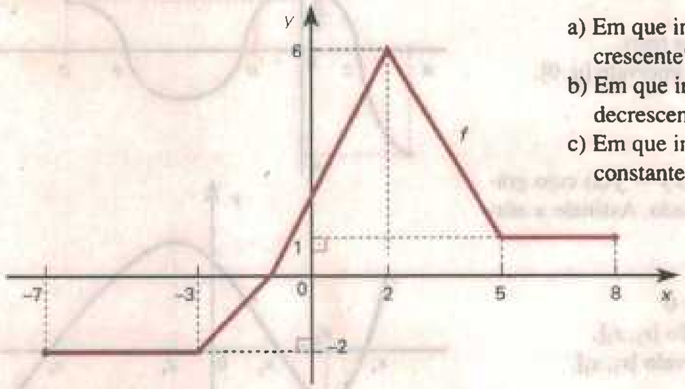
B.5 Construa o gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = -1$ c) $y = \sqrt{2}$

B.6 Dê o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = \frac{1}{2}$

B.7 O gráfico de uma função f é:

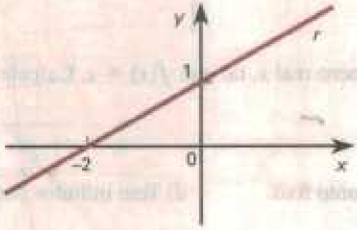


a) Em que intervalo(s) do domínio a função f é crescente?

b) Em que intervalo(s) do domínio a função f é decrescente?

c) Em que intervalo(s) do domínio a função f é constante?

B.8 O gráfico de uma função f é a reta r:



Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) O domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$.

b) O conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$.

c) f possui uma única raiz.

d) f é decrescente em todo seu domínio.

e) f é crescente em todo seu domínio.

f) f é constante.

g) $f(-2) = 0$

h) $f(0) = 3$

Exercícios complementares

C.1 Determine as raízes de cada uma das funções:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 5} - x + 1$

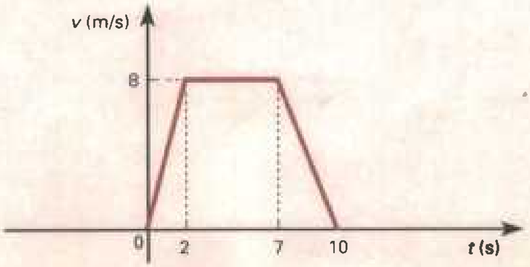
c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 2} - \frac{2}{x - 1}$

C.2 As raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + 4$ são 1 e 2. Determine os valores de a e b.

C.3 Duas raízes da função $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 6$ são 1 e 2. Determine os valores de b e c.

C.4 Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x}$.

C.5 O gráfico a seguir mostra a velocidade (v) de um automóvel em função do tempo (t):



a) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é crescente?

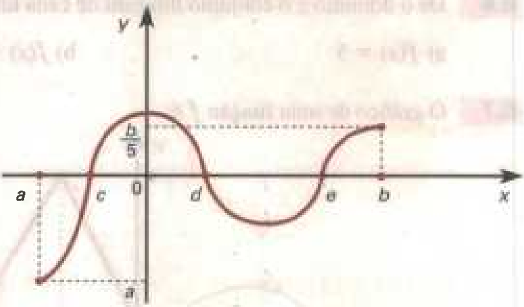
b) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é decrescente?

c) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é constante?

Questões dos vestibulares

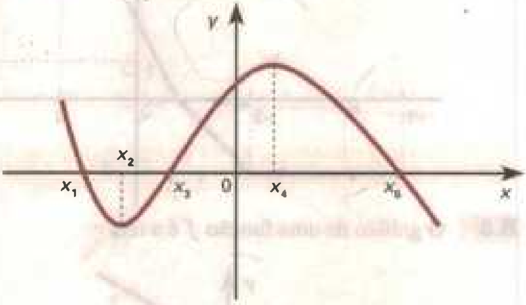
V.1 (U. Católica de Salvador-BA) Sobre a função f, de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, cujo gráfico se vê ao lado, é verdade que:

a) $f(x) \leq 0$ para todo x no intervalo $[d, e]$.
b) f é crescente no intervalo $[0, b]$.
c) $f(e) > f(d)$.
d) f tem apenas duas raízes reais.
e) $f(x) > 0$ para todo x no intervalo $[a, 0]$.



V.2 (FGV-SP) Seja uma função $y = f(x)$ cujo gráfico está representado ao lado. Assinale a afirmação correta:

a) $f(0) = 0$
b) $f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$
c) f é crescente no intervalo $]x_3, x_5[$.
d) f é decrescente no intervalo $]x_3, x_5[$.
e) $f(x_2) = f(x_4) = 0$



V.3 (FEI-SP) Chama-se "ponto fixo de uma função f" um número real x, tal que $f(x) = x$. Calcule os pontos fixos da função: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

a) $x = \pm 1$
b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
c) Não tem ponto fixo.
d) Tem infinitos pontos fixos.

V.4 (Mackenzie-SP) Qual das funções a seguir não possui raiz real?

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$
b) $g(x) = \sqrt{x - 8} - 1$
c) $h(x) = \frac{3x}{x - 1}$
d) $t(x) = \sqrt{x - 1} - x$
e) $s(x) = \sqrt{x - 1} - x + 1$

Capítulo 18

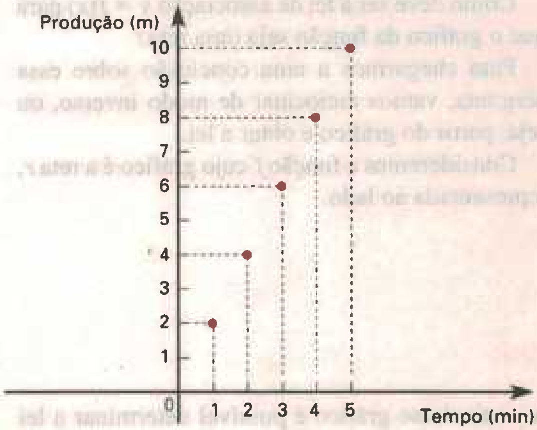
Função afim ou do 1º grau

1. Conceituação

Uma máquina fabrica 2 m de corda por minuto. A tabela abaixo descreve a produção dessa máquina em função do tempo.

Tempo (min)	Produção (m)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

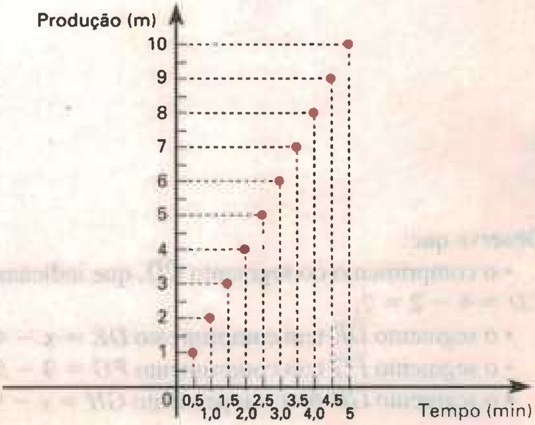
O gráfico correspondente a essa tabela é:



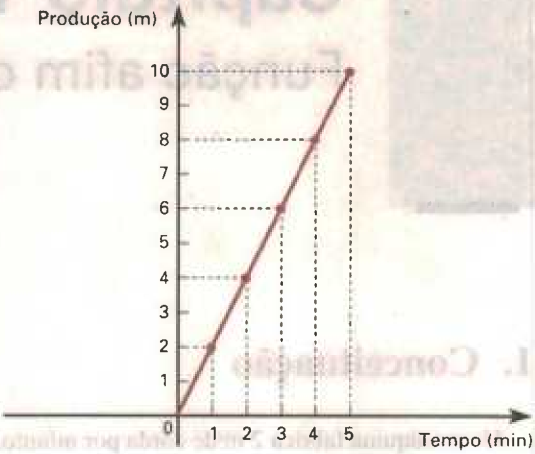
Medindo a produção da máquina a cada meio minuto, temos a seguinte tabela:

Tempo (min)	Produção (m)
0,5	1
1,0	2
1,5	3
2,0	4
2,5	5
3,0	6
3,5	7
4,0	8
4,5	9
5,0	10

O gráfico correspondente é:



Se diminuirmos mais e mais o intervalo entre as medições, ou seja, $\frac{1}{4}$ min, $\frac{1}{8}$ min, etc., obteremos mais e mais pontos, e todos numa mesma reta. Podemos então dizer que o gráfico ao lado descreve a produção dessa máquina em função do tempo.

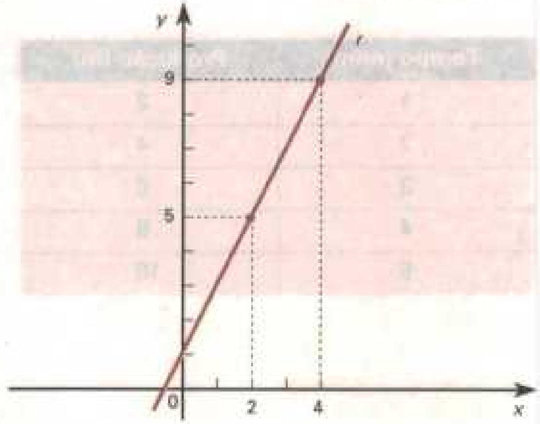


Estudaremos neste capítulo um tipo de função que tem como gráfico uma reta.

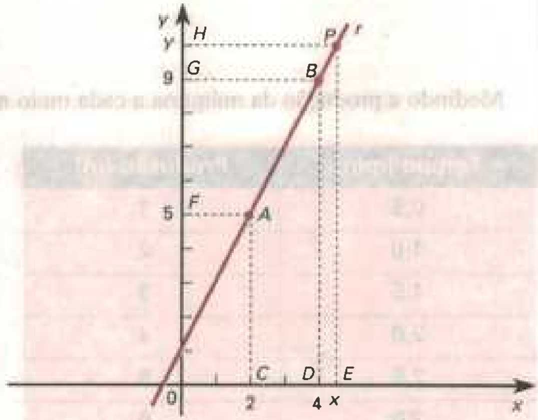
Como deve ser a lei de associação $y = f(x)$ para que o gráfico da função seja uma reta?

Para chegarmos a uma conclusão sobre essa pergunta, vamos raciocinar de modo inverso, ou seja, partir do gráfico e obter a lei.

Consideremos a função f cujo gráfico é a reta r, representada ao lado.



A partir desse gráfico é possível determinar a lei $y = f(x)$ que associa cada x do domínio à sua imagem y. Para isso, basta considerar um ponto genérico $P(x, y)$ da reta r, distinto de (2, 5) e de (4, 9).



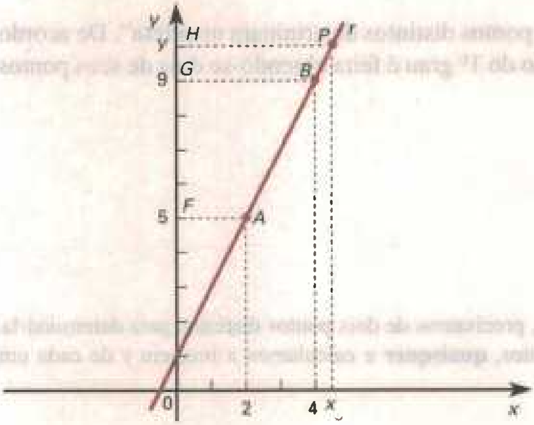
Observe que:

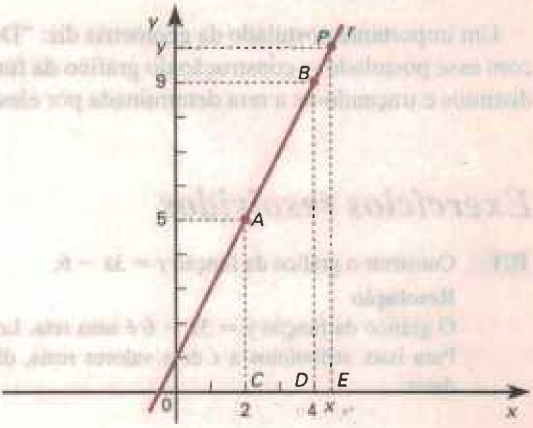
- o comprimento do segmento $\overline{CD}$, que indicamos simplesmente por CD (sem a barra horizontal), é $CD = 4 - 2 = 2$;
- o segmento $\overline{DE}$ tem comprimento $DE = x - 4$;
- o segmento $\overline{FG}$ tem comprimento $FG = 9 - 5 = 4$;
- o segmento $\overline{GH}$ tem comprimento $GH = y - 9$.

Nota

Se o ponto P pertencer à semi-reta $\overrightarrow{BA}$, então os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{GH}$ terão comprimentos $4 - x$ e $9 - y$, respectivamente. Porém, isso não altera em nada o nosso raciocínio.

Pelo teorema de Tales, temos:





$$\frac{GH}{FG} = \frac{BP}{AB} \Rightarrow \frac{y-9}{4} = \frac{BP}{AB}. \quad \text{(I)} \qquad \frac{DE}{CD} = \frac{BP}{AB} \Rightarrow \frac{x-4}{2} = \frac{BP}{AB}. \quad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), temos $\frac{y-9}{4} = \frac{x-4}{2} \Rightarrow 2(y-9) = 4(x-4)$.

Dividindo ambos os membros por 2:

$$y - 9 = 2(x - 4) \therefore y - 9 = 2x - 8 \therefore y = 2x + 1.$$

Note, finalmente, que os pontos $A(2, 5)$ e $B(4, 9)$ também satisfazem a igualdade $y = 2x + 1$, pois:

$$\underbrace{5}_{y} = 2 \cdot \underbrace{2}_{x} + 1 \quad \text{e} \quad \underbrace{9}_{y} = 2 \cdot \underbrace{4}_{x} + 1.$$

Assim sendo, temos que a reta r é o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

De maneira análoga à que fizemos para a reta r, demonstra-se que qualquer reta do plano cartesiano, não-paralela a um dos eixos, é gráfico de uma função do tipo:

$$f(x) = ax + b \text{ com } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Definição

Toda função do tipo $f(x) = ax + b$ com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é denominada **função do 1º grau ou função afim.**

Exemplos

a) $y = 3x + 1$

b) $y = x - 5$

c) $y = 4x$

d) $y = \frac{x}{3} + 1$

Nota

Toda função do 1º grau $y = ax + b$ em que $b = 0$ recebe o nome particular de função **linear**. São lineares as funções $y = 4x$, $y = \frac{x}{5}$, etc.

2. Gráfico de uma função do 1º grau

Demonstra-se que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta.

Um importante postulado da geometria diz: "Dois pontos distintos determinam uma reta". De acordo com esse postulado, a construção do gráfico da função do 1º grau é feita obtendo-se dois de seus pontos distintos e traçando-se a reta determinada por eles.

Exercícios resolvidos

R.1 Construir o gráfico da função $y = 3x - 6$.

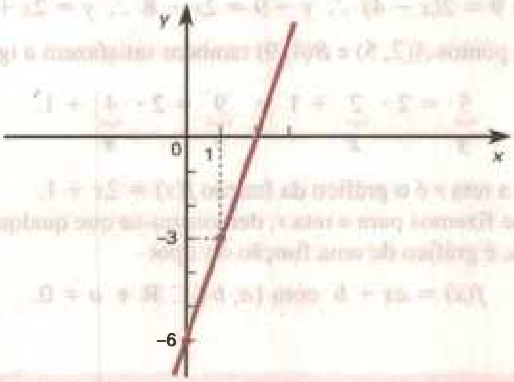
Resolução

O gráfico da função $y = 3x - 6$ é uma reta. Logo, precisamos de dois pontos distintos para determiná-la. Para isso, atribuímos a x dois valores reais, distintos, **quaisquer** e calculamos a imagem y de cada um deles:

Valores arbitrários

x	$\overbrace{3x - 6}^{y}$	
0	$3 \cdot 0 - 6 = -6$	$\Rightarrow$ $(0, -6)$ é um ponto da reta.
1	$3 \cdot 1 - 6 = -3$	$\Rightarrow$ $(1, -3)$ é um ponto da reta.

Assim, o gráfico da função $y = 3x - 6$ é:



R.2 Construir o gráfico da função $y = 4x$.

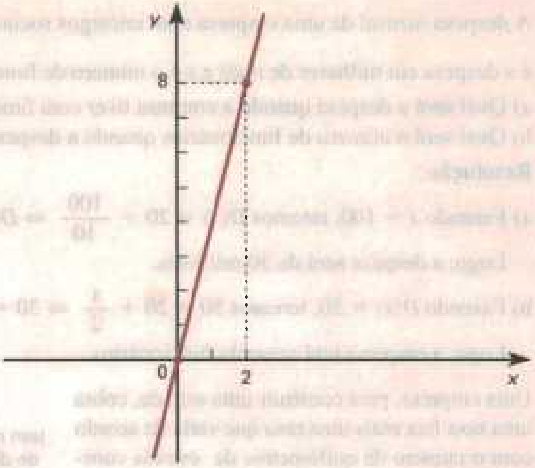
Resolução

O gráfico da função $y = 4x$ é uma reta. Para determinarmos dois pontos distintos dessa reta, construímos a seguinte tabela:

Valores arbitrários

x	$\overbrace{4x}^{y}$	
0	$4 \cdot 0 = 0$	$\Rightarrow$ $(0, 0)$ é um ponto da reta.
2	$4 \cdot 2 = 8$	$\Rightarrow$ $(2, 8)$ é um ponto da reta.

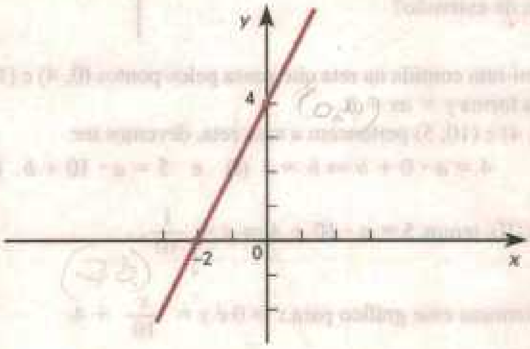
Assim, o gráfico da função $y = 4x$ é:



Nota

O gráfico de uma função linear, isto é, $y = ax$ ($a \in \mathbb{R}^*$), é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

R.3 O gráfico da função $y = ax + b$ é:



Determinar os valores de a e b.

Resolução

Como o ponto (0, 4) pertence ao gráfico, temos que a sentença $y = ax + b$ deve tornar-se verdadeira para $x = 0$ e $y = 4$, isto é, $4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$.

Analogamente, o ponto $(-2, 0)$ pertence ao gráfico. Então devemos ter $0 = a \cdot (-2) + b$.

Como $b = 4$, temos $0 = a \cdot (-2) + 4 \Rightarrow a = 2$.

R.4 Determinar os pontos de intersecção do gráfico da função $y = 3x - 6$ com os eixos coordenados Ox e Oy.

Resolução

Como todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada igual a zero, para determinarmos o ponto de encontro do gráfico com esse eixo basta fazer $y = 0$. Ou seja, $0 = 3x - 6 \Rightarrow x = 2$.

Logo, esse ponto é (2, 0).

Analogamente, fazendo $x = 0$, obteremos o ponto de encontro do gráfico com o eixo Oy:

$$y = 3 \cdot 0 - 6 \Rightarrow y = -6.$$

Logo, o ponto é $(0, -6)$.

R.5 A despesa mensal de uma empresa com encargos sociais é dada pela função $D(x) = 20 + \frac{x}{10}$, onde $D(x)$ é a despesa em milhares de reais e x é o número de funcionários.

a) Qual será a despesa quando a empresa tiver cem funcionários?

b) Qual será o número de funcionários quando a despesa for 50 mil reais?

Resolução

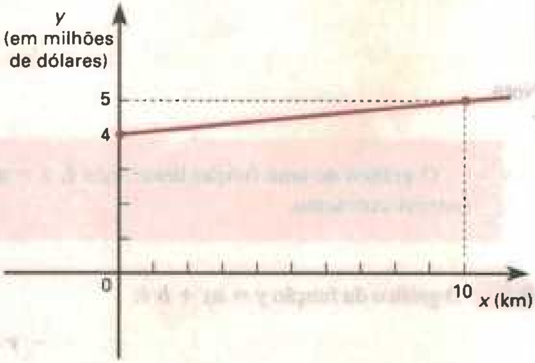
a) Fazendo $x = 100$, teremos $D(x) = 20 + \frac{100}{10} \Rightarrow D(100) = 30$.

Logo, a despesa será de 30 mil reais.

b) Fazendo $D(x) = 50$, teremos $50 = 20 + \frac{x}{2} \Rightarrow 30 = \frac{x}{2} \therefore x = 60$.

Logo, a empresa terá sessenta funcionários.

R.6 Uma empresa, para construir uma estrada, cobra uma taxa fixa mais uma taxa que varia de acordo com o número de quilômetros de estrada construída. O gráfico ao lado descreve o custo da obra, em milhões de dólares, em função do número de quilômetros construídos.



a) Obtenha a lei $y = f(x)$, para $x \geqslant 0$, que determina esse gráfico.

b) Determine a taxa fixa cobrada pela empresa para a construção da estrada.

c) Qual será o custo total da obra, sabendo que a estrada terá 50 km de extensão?

Resolução

a) O gráfico é uma semi-reta contida na reta que passa pelos pontos (0, 4) e (10, 5). A lei $y = f(x)$, cujo gráfico é essa reta, é da forma $y = ax + b$.

Como os pontos (0, 4) e (10, 5) pertencem a essa reta, devemos ter:

$$4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4 \quad \textbf{(I)} \quad \text{e} \quad 5 = a \cdot 10 + b. \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos $5 = a \cdot 10 + 4 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$.

Assim, a lei que determina esse gráfico para $x \geqslant 0$ é $y = \frac{x}{10} + 4$.

Nota

Devemos supor $x \geqslant 0$, pois x é o número de quilômetros de estrada construída; logo, não há sentido em atribuirmos valores negativos a x.

b) A taxa fixa é obtida fazendo $x = 0$, ou seja, o início da obra: $y = \frac{0}{10} + 4 \Rightarrow y = 4$.

Logo, essa taxa é de 4 milhões de dólares.

c) Para calcularmos o custo total da obra, basta fazermos $x = 50$, ou seja, o término da obra:

$$y = \frac{50}{10} + 4 \Rightarrow y = 9.$$

Logo, o custo total da obra será de 9 milhões de dólares.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.4, B.5, B.8, C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3, B.6, B.7, C.2, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Construa o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = 2x - 4$ c) $y = 5x$ e) $y = 2x - 3$ g) $y = \frac{3x}{2}$

b) $y = -2x - 4$ d) $y = -5x$ f) $y = \frac{x}{3} + 1$

B.2 Construa o gráfico de cada uma das funções a seguir. Determine os pontos de intersecção de cada gráfico com os eixos coordenados Ox e Oy.

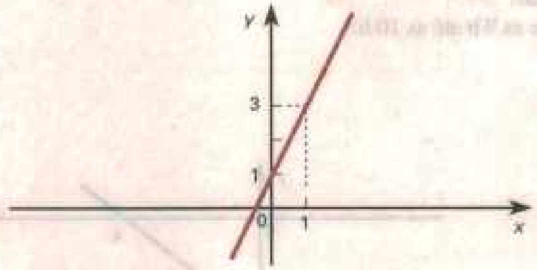
a) $y = 5x - 10$ c) $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$ e) $y = -3x + 2$

b) $y = -x - 1$ d) $y = \frac{2x}{5} - 3$ f) $y = 2x$

B.3 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

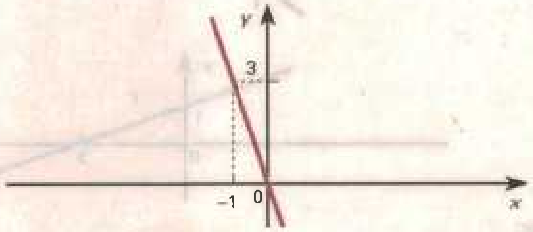
a) $y = 5x + 3$ b) $y = 8x$ c) $y = \frac{x}{2} - 1$

B.4 O gráfico da função $y = ax + b$ é:



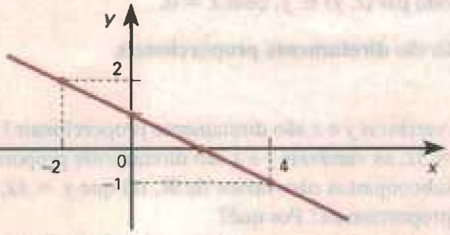
Determine os valores de a e b.

B.5 O gráfico da função $y = ax + b$ é:



Determine os valores de a e b.

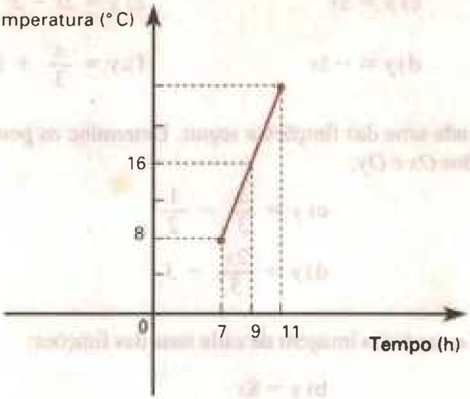
B.6 O gráfico da função $y = ax + b$ é:



Determine:
a) os valores de a e b;
b) a raiz da função.

B.7 Chama-se **função identidade** a função linear $f(x) = x$. Construa o gráfico da função identidade determinando seu domínio e seu conjunto imagem.

B.8 O gráfico seguinte mostra a temperatura de uma região da cidade de São Paulo desde as 7 h até as 11 h em um dia de inverno.



a) Qual a temperatura máxima nesse período? 24°C

b) Qual foi a variação da temperatura desde as 9 h até as 10 h?

Exercícios complementares

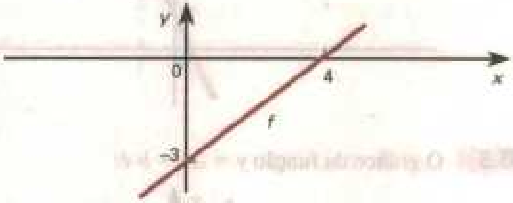
C.1 O gráfico de uma função f é dado ao lado:

a) Qual a raiz da função f?

b) Para que valores de x tem-se $f(x) > 0$?

c) Para que valores de x tem-se $f(x) < 0$?

d) Para que valor de y tem-se $x = 0$?

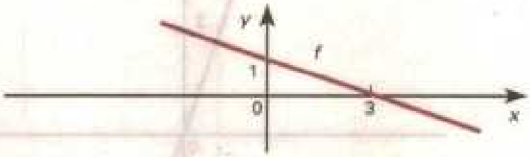


C.2 O gráfico de uma função f é dado ao lado:

a) Qual a raiz da função f?

b) Para que valores de x tem-se $f(x) > 0$?

c) Para que valores de x tem-se $f(x) < 0$?



C.3 **Definição:** Seja $y = f(x)$ uma função tal que:

I. Se 0 (zero) pertence ao domínio de f, então $f(0) = 0$.

II. $\frac{y}{x} = k$ (k constante não-nula) para todo par $(x, y) \in f$, com $x \neq 0$.

Dizemos que as variáveis y e x dessa função são **diretamente proporcionais**.

Com base nessa definição, responda:

a) Na função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = 3x$, as variáveis y e x são diretamente proporcionais? Por quê?

b) Na função $f\colon [2, 4] \to [6, 12]$ tal que $y = 3x$, as variáveis y e x são diretamente proporcionais? Por quê?

c) Em qualquer função $f\colon A \to B$, A e B subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tal que $y = kx$, k constante não-nula, as variáveis y e x são diretamente proporcionais? Por quê?

d) Como é o gráfico de uma função $f\colon A \to B$, A e B subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$, com as variáveis y e x diretamente proporcionais?

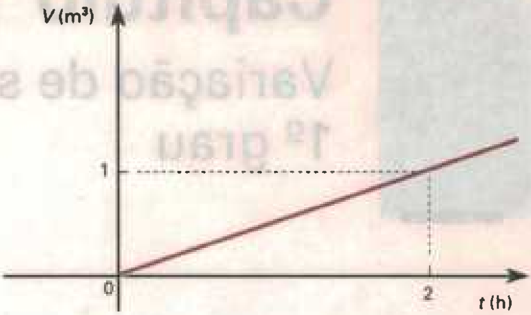
e) Na função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 1$, as variáveis y e x são diretamente proporcionais? Por quê?

C.4 Uma caixa d'água de forma cilíndrica é alimentada por uma torneira. Aberta a torneira, o volume da caixa d'água vai aumentando em função do tempo, segundo o gráfico ao lado.

a) As variáveis V e t são diretamente proporcionais? Por quê?

b) Dê a lei que associa V e t.

c) Sabendo que o volume da caixa d'água é 3,8 m³ e que a caixa estava vazia quando a torneira foi aberta, quanto tempo a torneira deve permanecer aberta para encher completamente a caixa?



C.5 Construa o gráfico da função $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

C.6 Um automóvel passa por um ponto A, dirigindo-se a um ponto B, distante 330 km de A. A função que mede a distância (em quilômetros) em função do tempo (em horas) do automóvel ao ponto A é $S(t) = 120\,t$.

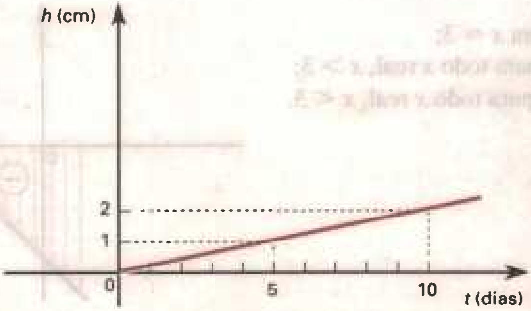
a) Após 30 min de ter passado pelo ponto A, a que distância o automóvel estará desse ponto?

b) Quanto tempo levará o automóvel para ir de A até B?

Questões dos vestibulares

V.1 (Vunesp) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos colocados por ele num gráfico, resulta a figura abaixo. Se for mantida sempre essa relação entre tempo (t) e altura (h), a planta terá, no trigésimo dia, uma altura igual a:

a) 5 cm b) 6 cm c) 3 cm d) 15 cm e) 30 cm



V.2 (Mackenzie-SP) A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. O valor de $f(3)$ é:

a) 0 b) 2 c) -5 d) -3 e) -1

V.3 (Mackenzie-SP) Sendo $A = [2, 5]$, o gráfico da função $f = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x\}$ é:

a) um conjunto finito de pontos.

b) uma semi-reta.

c) uma reta.

d) um segmento de reta.

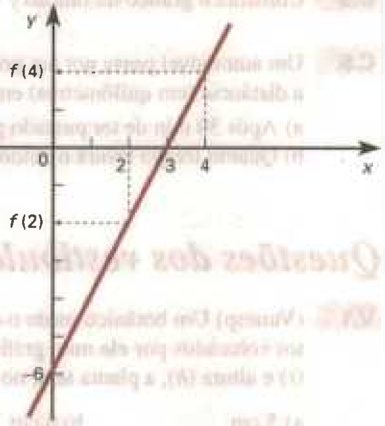
e) Nenhuma das respostas acima é correta.

Capítulo 19

Variação de sinal da função do 1º grau

1. Introdução

Considere a função do 1º grau $f(x) = 2x - 6$, cujo gráfico é dado ao lado.

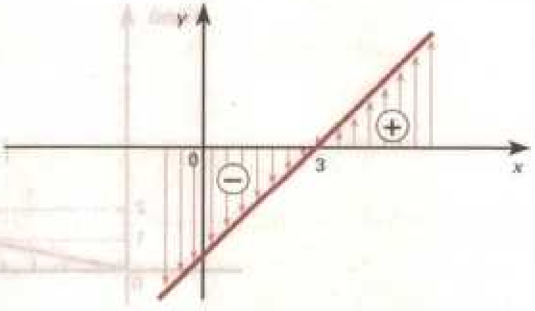


Note que:

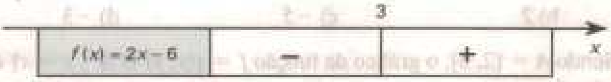
- 3 é raiz da função;
- a função é crescente;
- para qualquer x real, $x > 3$, temos $f(x) > 0$; por exemplo, $f(4) > 0$;
- para qualquer x real, $x < 3$, temos $f(x) < 0$; por exemplo, $f(2) < 0$.

Por isso, dizemos que:

- a **função se anula** para $x = 3$;
- a **função é positiva** para todo x real, $x > 3$;
- a **função é negativa** para todo x real, $x < 3$.



Representando esquematicamente a variação de sinal da função, temos:

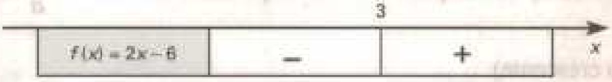


O estudo da variação de sinal da função $f(x) = 2x - 6$ pode ser feito também algebricamente, sem o auxílio do gráfico. Observe que:

- a raiz da função f é a raiz da equação $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$;
- os valores de x para os quais $f(x)$ é positivo ($f(x) > 0$) são as soluções da inequação $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$;

- os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo ($f(x) < 0$) são as soluções da inequação $2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$.

Logo, temos:



2. Estudo genérico da variação da função do 1º grau $f(x) = ax + b$

2.1. Raiz da função f

A raiz da função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é a raiz da equação $ax + b = 0$, ou seja, $-\dfrac{b}{a}$.

Exemplo

A raiz da função $f(x) = 3x + 5$ é obtida resolvendo-se a equação $3x + 5 = 0 \;\therefore\; x = -\dfrac{5}{3}$.

2.2. Condição para que f seja crescente

Sejam os números reais x_1 e x_2, quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para que a função f seja crescente, devemos ter $f(x_2) > f(x_1)$, ou seja:

$$ax_2 + b > ax_1 + b \;\therefore\; ax_2 + b - ax_1 - b > 0 \;\therefore\; ax_2 - ax_1 > 0 \;\therefore\; a(x_2 - x_1) > 0.$$

Como $x_2 > x_1$, então $x_2 - x_1 > 0$. Assim, temos $\begin{cases} x_2 - x_1 > 0 \\ a(x_2 - x_1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{a} > 0$.

Logo, concluímos que:

A função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, $a > 0$.

Exemplo

A função $f(x) = 2x - 8$ é crescente, pois o coeficiente de x é **positivo**.

2.3. Condição para que f seja decrescente

Sejam os números reais x_1 e x_2, quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para que a função f seja decrescente, devemos ter $f(x_2) < f(x_1)$, ou seja:

$$ax_2 + b < ax_1 + b \;\therefore\; ax_2 + b - ax_1 - b < 0 \;\therefore\; ax_2 - ax_1 < 0 \;\therefore\; a(x_2 - x_1) < 0.$$

Como $x_2 > x_1$, então $x_2 - x_1 > 0$. Assim, temos $\begin{cases} x_2 - x_1 > 0 \\ a\,(x_2 - x_1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{a} < 0$.

Logo, concluímos que:

A função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

Exemplo

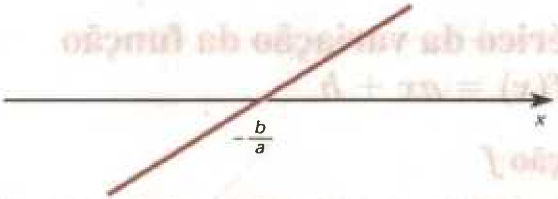
A função $f(x) = -2x + 4$ é decrescente, pois o coeficiente de x é negativo.

2.4. Estudo da variação de sinal da função do 1º grau através do seu gráfico

Sabemos que o gráfico de f intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $-\dfrac{b}{a}$ (raiz). Temos dois casos a considerar.

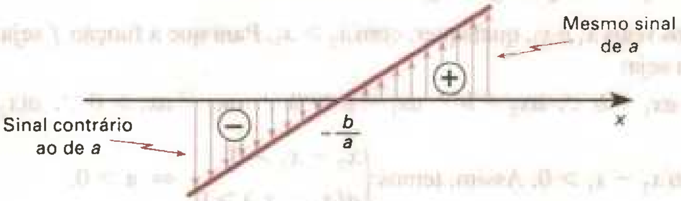
1º caso: $a > 0$ (função crescente)

A forma do gráfico de f é:



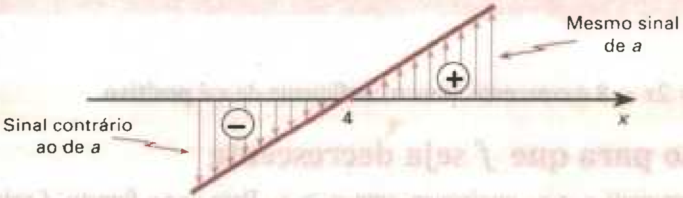
Observe que:

- para valores de x, $x > -\dfrac{b}{a}$, a função é positiva, ou seja, tem o mesmo sinal de a;
- para valores de x, $x < -\dfrac{b}{a}$, a função é negativa, ou seja, tem sinal contrário ao de a.

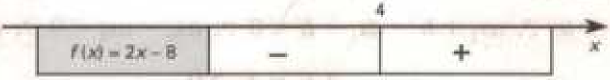

Mesmo sinal de a
+
Sinal contrário ao de a
−
$-\frac{b}{a}$
x

Exemplo

Sendo $f(x) = 2x - 8$, a variação de sinal de f é:

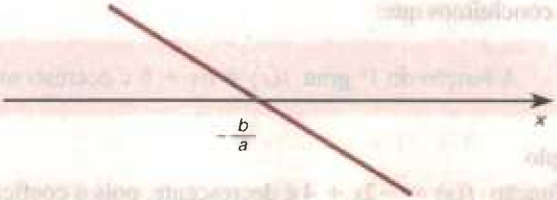

Mesmo sinal de a
+
Sinal contrário ao de a
−
4
x

Esquematicamente, temos:



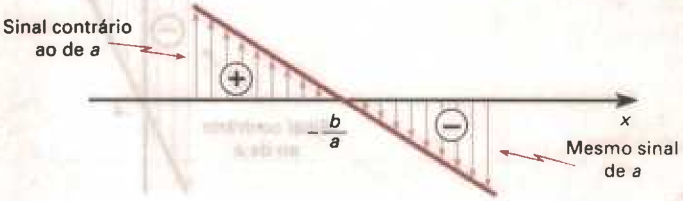
2º caso: $a < 0$ (função decrescente)

A forma do gráfico de f é:



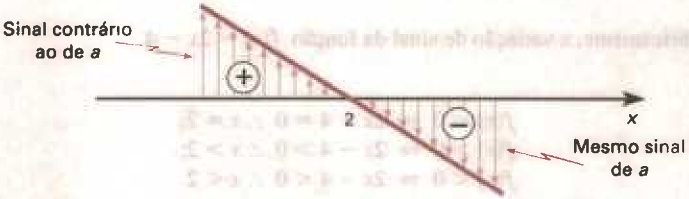
Observe que:

- para valores de x, $x > -\dfrac{b}{a}$, a função é negativa, ou seja, tem o mesmo sinal de a;
- para valores de x, $x < -\dfrac{b}{a}$, a função é positiva, ou seja, tem sinal contrário ao de a.

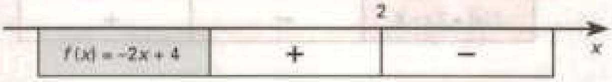

Sinal contrário ao de a
+
−
$-\frac{b}{a}$
x
Mesmo sinal de a

Exemplo

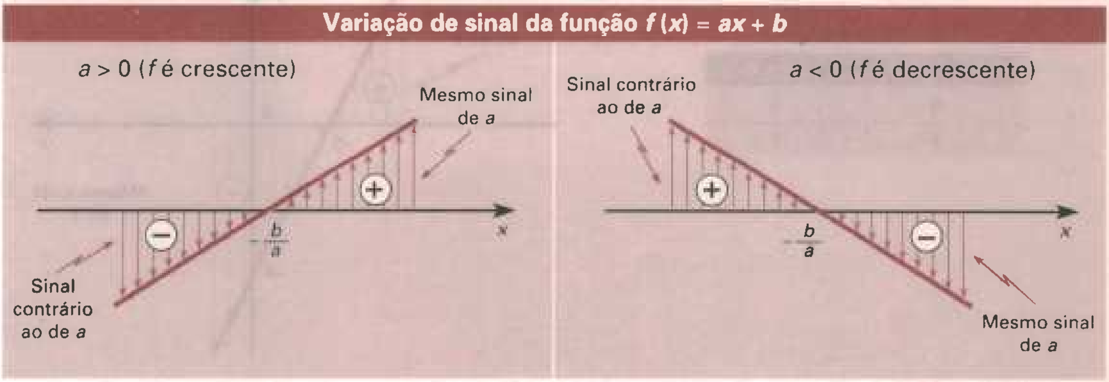
Sendo $f(x) = -2x + 4$, a variação de sinal de f é:


Sinal contrário ao de a
+
2
−
x
Mesmo sinal de a

Esquematicamente, temos:



Resumo

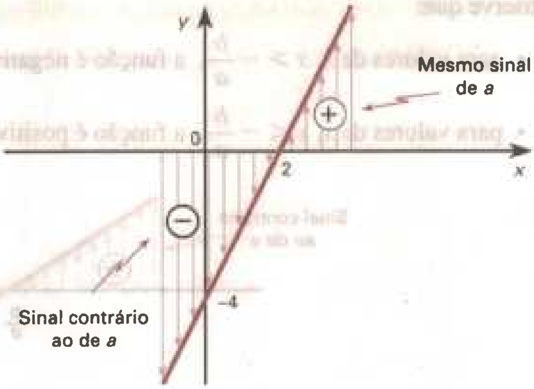

Variação de sinal da função f(x) = ax + b
a > 0 (f é crescente)
Mesmo sinal de a
+
−
$-\frac{b}{a}$
x
Sinal contrário ao de a
a < 0 (f é decrescente)
Sinal contrário ao de a
+
$-\frac{b}{a}$
−
x
Mesmo sinal de a

Exercícios resolvidos

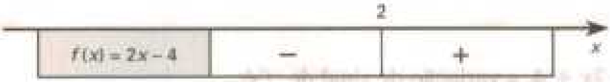
R.1 Construir o gráfico da função $f(x) = 2x - 4$ e discutir a variação de sinal de f com o auxílio do gráfico.

Resolução

x	y
0	−4
2	0



Temos, então:

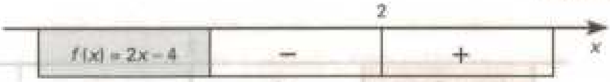


R.2 Discutir, algebricamente, a variação de sinal da função $f(x) = 2x - 4$.

Resolução

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \;\therefore x = 2;$$
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \;\therefore x > 2;$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \;\therefore x < 2.$$

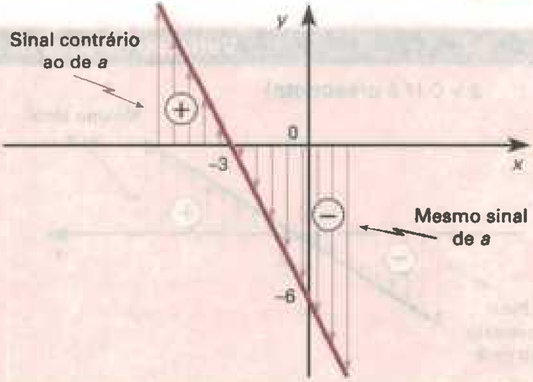
Temos, então:



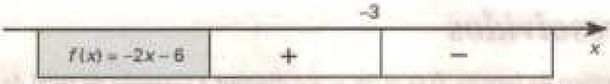
R.3 Construir o gráfico da função $f(x) = -2x - 6$ e discutir a variação de sinal de f com o auxílio do gráfico.

Resolução

x	$\overbrace{-2x - 6}^{y}$
0	−6
−3	0



Temos, então:



R.4 Discutir, algebricamente, a variação de sinal da função $f(x) = -2x - 6$.

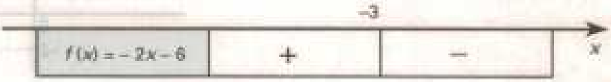
Resolução

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 6 = 0 \therefore x = -3;$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -2x - 6 > 0 \therefore -2x > 6 \therefore x < \frac{6}{-2} \therefore x < -3;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2x - 6 < 0 \therefore -2x < 6 \therefore x > \frac{6}{-2} \therefore x > -3.$$

Temos, então:



R.5 Discutir, algebricamente, a variação de sinal da função $f(x) = ax + b$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, em cada caso:

a) $a > 0$ b) $a < 0$

Resolução

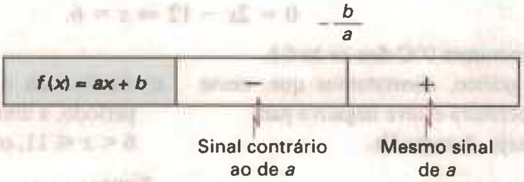
a) $a > 0$ (*1º caso*)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{a};$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \therefore ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a};$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \therefore ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}.$$

Assim, temos:


$-\frac{b}{a}$
f(x) = ax + b
−
+
Sinal contrário ao de a
Mesmo sinal de a

b) $a < 0$ (*2º caso*)

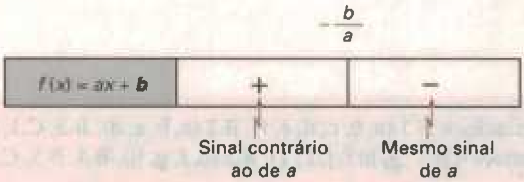
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{a};$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \therefore ax \underbrace{> -b \Leftrightarrow x <}_{\text{(I)}} -\frac{b}{a};$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \therefore ax \underbrace{< -b \Leftrightarrow x >}_{\text{(II)}} -\frac{b}{a}.$$

Em (I) e (II) houve inversão no sentido das desigualdades, pois dividimos ambos os membros das desigualdades pelo número **negativo** *a*.

Assim, temos:

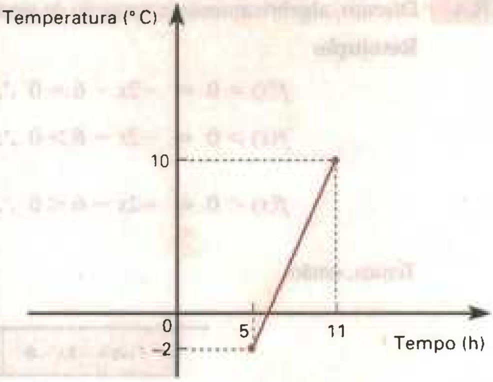

$-\frac{b}{a}$
f(x) = ax + b
+
−
Sinal contrário ao de a
Mesmo sinal de a

R.6 O gráfico mostra a temperatura de uma região do Rio Grande do Sul desde as 5 h até as 11 h.

a) Em que horário desse período a temperatura atingiu 0°C?

b) Durante quanto tempo desse período a temperatura esteve negativa?

c) Durante quanto tempo desse período a temperatura esteve positiva?



Resolução

a) O gráfico é um segmento de reta contido na reta que passa pelos pontos (5, −2) e (11, 10). A lei $y = f(x)$ que tem como gráfico essa reta é da forma $y = ax + b$.

Como os pontos (5, −2) e (11, 10) pertencem a essa reta, temos:

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 5 + b & \textbf{(I)} \\ 10 = a \cdot 11 + b. & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (I) e (II): $-12 = -6a \Rightarrow a = 2$.

Substituindo $a = 2$ em (I): $-2 = 2 \cdot 5 + b \Rightarrow b = -12$.

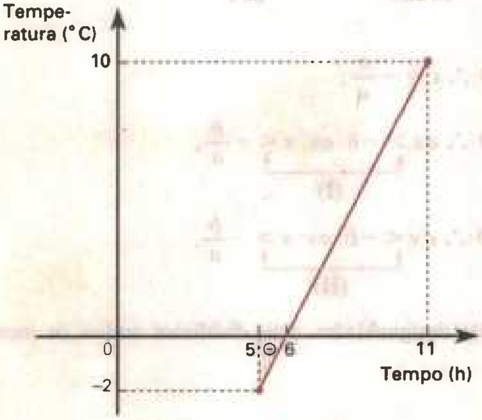
Logo, o gráfico em questão é dado por: $y = 2x - 12$, com $5 \leq x \leq 11$.

Para sabermos o instante em que a temperatura chegou a 0°C, basta fazer $y = 0$, ou seja:

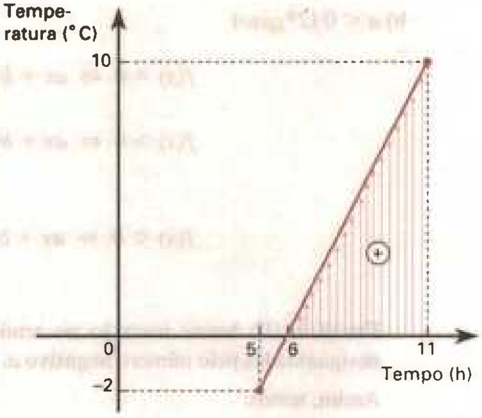
$$0 = 2x - 12 \Rightarrow x = 6.$$

Portanto, a temperatura 0°C deu-se às 6 h.

b) Analisando o gráfico, constatamos que, nesse período, a temperatura esteve negativa para $5 \leq x < 6$, ou seja, durante 1h.



c) Analisando o gráfico, constatamos que, nesse período, a temperatura esteve positiva para $6 < x \leq 11$, ou seja, durante 5 h.



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d, e, f), B.2 (a, b, c, d), B.3, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (g, h, i, j, k, l), B.2 (e, f, g, h), B.4, B,5, C.3, C.4.

Exercícios básicos

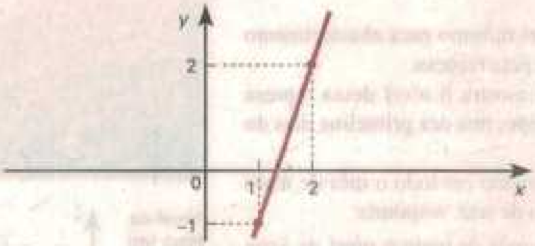
B.1 Discuta, através de gráfico, a variação de sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = 5x - 10$
b) $f(x) = -5x - 10$
c) $f(x) = 3x + 1$
d) $y = -3x + 1$
e) $y = 5x$
f) $y = -5x$
g) $y = x - 2$
h) $y = -x - 2$
i) $f(x) = 4x + 1$
j) $f(x) = -4x + 1$
k) $f(x) = x$
l) $f(x) = -x$

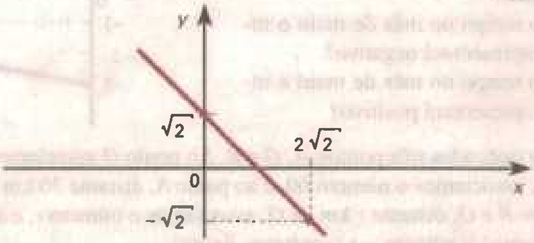
B.2 Discuta, algebricamente, a variação de sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = 2x - 5$
b) $f(x) = -2x - 5$
c) $y = 4x + 2$
d) $y = -4x + 2$
e) $f(x) = \dfrac{x}{3} + 1$
f) $f(x) = -\dfrac{x}{3} + 1$
g) $f(x) = \sqrt{2}\,x - \sqrt{6}$
h) $y = -\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}$

B.3 Discuta a variação de sinal da função $y = ax + b$, cujo gráfico é a reta:



B.4 Discuta a variação de sinal da função $y = ax + b$, cujo gráfico é a reta:



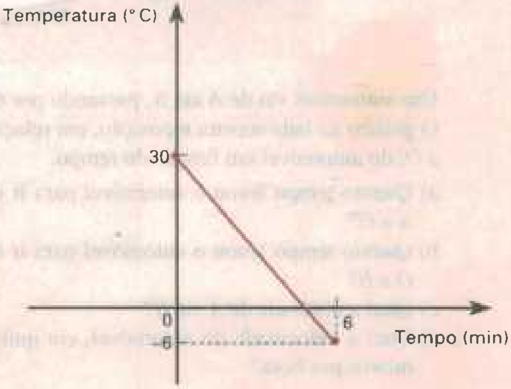
B.5 Uma função linear f é decrescente. Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $f(1) > 0$
b) $f(2) < 0$
c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$
d) $f(-1) < 0$
e) $f(-1) > 0$
f) $f(0) = 0$

Exercícios complementares

C.1 Uma barra de ferro foi aquecida até uma temperatura de 30°C e a seguir foi resfriada até a temperatura de −6°C. O gráfico ao lado mostra a temperatura da barra em função do tempo.

a) Depois de quanto tempo, após o início do resfriamento, a temperatura da barra atingiu 0°C?
b) De 0 a 6 min, em que intervalo de tempo a temperatura da barra esteve positiva?
c) De 0 a 6 min, em que intervalo de tempo a temperatura da barra esteve negativa?



C.2 Um banco paga as contas de um cliente. As contas vencem, no mês de abril, segundo a função $y = -\frac{2x}{3} + 18$, em que $x \in \{1, 2, 3, ..., 30\}$ e y é o saldo do cliente em US\$ 1.000,00 no dia x de abril.

a) Em que dia do mês de abril o saldo do cliente chega a US\$ 0,00?

b) Em que intervalo de tempo, no mês de abril, o saldo é positivo?

c) Em que intervalo de tempo, no mês de abril, o saldo é negativo?

C.3 A água que usamos em nossas casas vem de grandes represas que devem ser conservadas sempre limpas. Suas margens não devem ser povoadas, para que esgotos não sejam despejados em suas águas.

Suponha que numa dessas represas o medidor do nível da água consista de uma barra graduada, perpendicular à superfície da água, conforme a figura.

Sendo 0 m o nível mínimo para abastecimento da região servida pela represa.

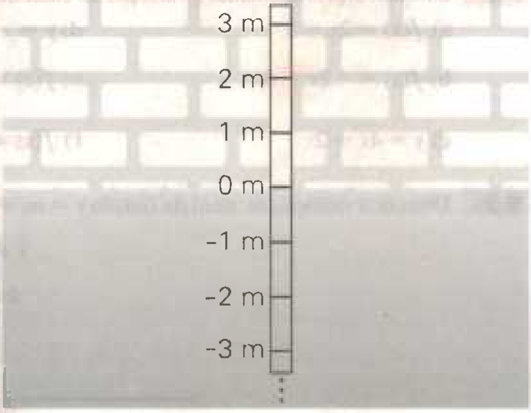
O gráfico abaixo mostra o nível dessa represa em função do tempo, nos dez primeiros dias do mês de maio.

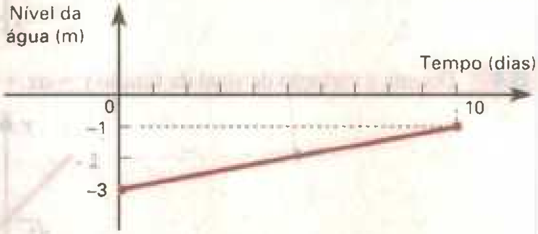
Supondo que o gráfico em todo o mês de maio seja um segmento de reta, responda:

a) em que dia do mês de maio o nível da água atingirá o mínimo necessário para o abastecimento da região?

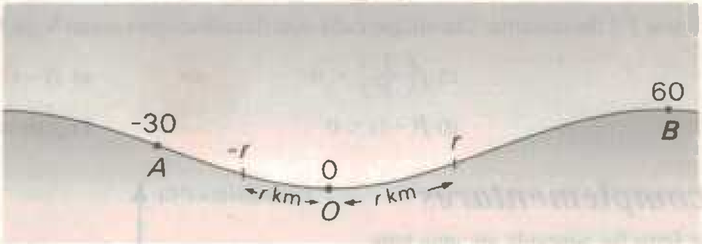
b) durante quanto tempo no mês de maio o nível da água se apresentará negativo?

c) durante quanto tempo no mês de maio o nível da água se apresentará positivo?





C.4 Numa estrada são marcados três pontos: A, O e B. Ao ponto O associamos o número zero; ao ponto B, distante 60 km de O, associamos o número 60, e ao ponto A, distante 30 km de O, associamos o número -30. A cada ponto entre B e O, distante r km de O, associamos o número r, e a cada ponto, entre A e O, distante r km de O, associamos o número $-r$ (conforme figura).



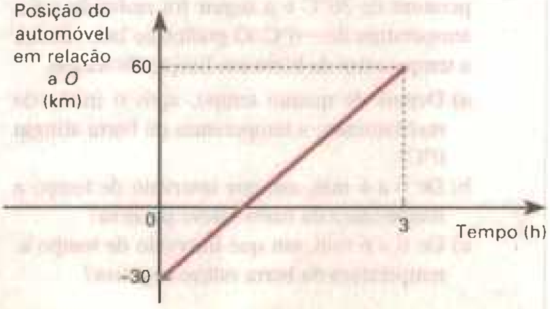
Um automóvel vai de A até B, passando por O. O gráfico ao lado mostra a posição, em relação a O, do automóvel em função do tempo.

a) Quanto tempo levou o automóvel para ir de A a O?

b) Quanto tempo levou o automóvel para ir de O a B?

c) Qual a distância de A até B?

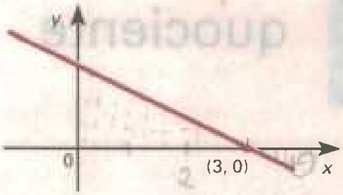
d) Qual a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora?



Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Examinando o gráfico da função f abaixo, que é uma reta, podemos concluir:

a) se $f(x) < 0$, então $x > 3$.
b) se $x > 2$, então $f(x) > f(2)$. f
c) se $x < 0$, então $f(x) < 0$. f
d) se $f(x) < 0$, então $x < 0$. f
e) se $x > 0$, então $f(x) > 0$. f



V.2 (Unicamp-SP) O gráfico da função $y = mx + n$ passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(2, 8)$. Pode-se afirmar que:

a) a única raiz da função é 4. f
b) $f(3) = 10$
c) $f(4) = 12$ f
d) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3$
e) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$

V.3 (UFCE) A função $f(x) = ax + b$ é tal que $f(3) = 0$ e $f(4) > 0$. Pode-se afirmar que:

a) $a < 0$ f
b) f é crescente em todo seu domínio. f
c) $f(0) = 3$ f
d) f é constante.
e) $f(2) > 0$

Capítulo 20

Inequação produto e inequação quociente

1. Introdução

Sendo $x \in \mathbb{R}$, consideremos os números $2x + 4$ e $6 - 3x$. Para que valores de x o produto desses números é positivo?

Para responder a essa pergunta devemos resolver a inequação $(2x + 4)(6 - 3x) > 0$.

Note que esse tipo de inequação é absoluta novidade, pois não nos deparamos com nenhuma dessas até agora. Para resolvê-la, o que faremos no exercício R.1, vamos antes definir **inequação produto**.

2. Inequação produto

Chama-se "inequação produto" toda **inequação apresentada em uma das seguintes formas:**

$$f(x) \cdot g(x) > 0,$$
$$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0,$$
$$f(x) \cdot g(x) < 0,$$
$$f(x) \cdot g(x) \leqslant 0,$$
$$f(x) \cdot g(x) \neq 0,$$

em que f e g são funções quaisquer.

Exemplos

a) $(2x + 4)(6 - 3x) > 0$

b) $(5x - 10)(6 - x)(3x - 15) \leqslant 0$

c) $(2x - 3)^2(1 - x)^3(2 - 8x) < 0$

Exercícios resolvidos

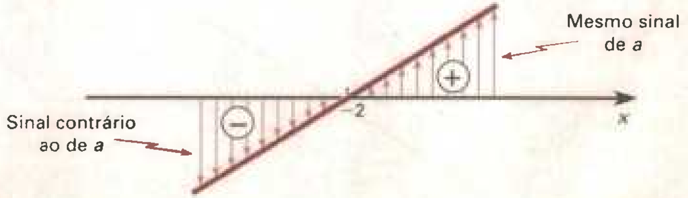
R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(2x + 4)(6 - 3x) > 0$

Resolução

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = 6 - 3x$, temos:

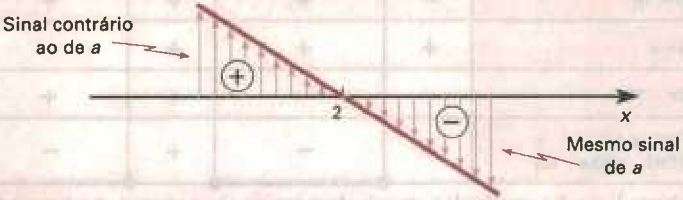
I. $f(x) = 2x + 4$

- raiz de f: $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$;
- variação de sinal de f: $a > 0 \Rightarrow f$ é crescente.

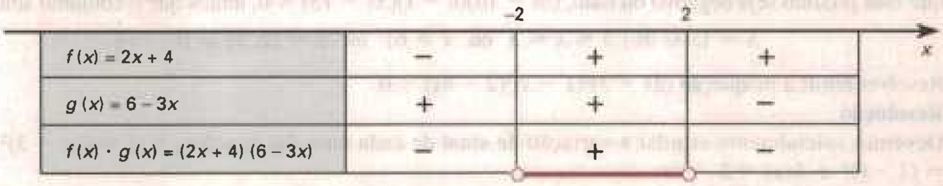


II. $g(x) = 6 - 3x$:

- raiz de g: $6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$;
- variação de sinal de g: ($a < 0 \Rightarrow g$ é decrescente).



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e fg, temos:



$f(x) = 2x + 4$	−	+	+
$g(x) = 6 - 3x$	+	+	−
$f(x) \cdot g(x) = (2x + 4)(6 - 3x)$	−	+	−

Obtivemos os sinais na última linha aplicando a regra de sinais para o produto fg. Como nos interessa que esse produto seja positivo, $(2x + 4)(6 - 3x) > 0$, temos que o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\} \text{ ou } S =]-2, 2[.$$

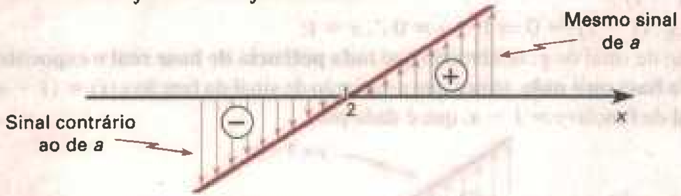
R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(5x - 10)(6 - x)(3x - 15) \leq 0$.

Resolução

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = 5x - 10$, $g(x) = 6 - x$ e $h(x) = 3x - 15$, temos:

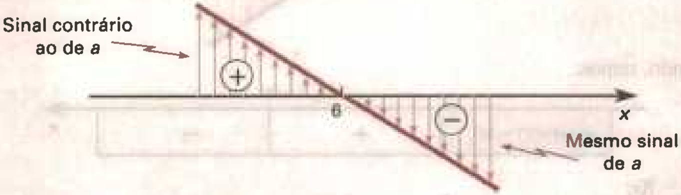
I. $f(x) = 5x - 10$:

- raiz de f: $5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$;
- variação de sinal de f: $a > 0 \Rightarrow f$ é crescente.



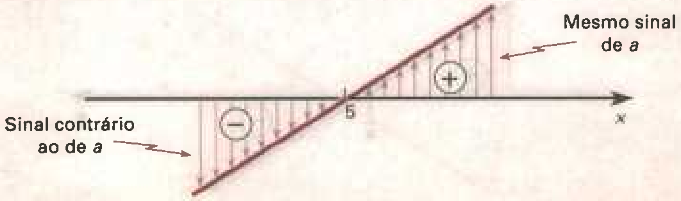
II. $g(x) = 6 - x$:

- raiz de g: $6 - x = 0 \Rightarrow x = 6$;
- variação de sinal de g: $a < 0 \Rightarrow g$ é decrescente.

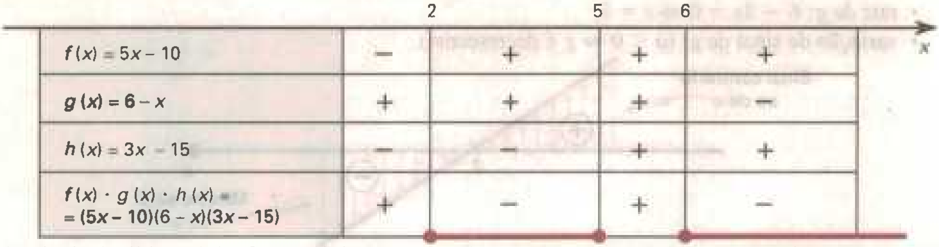


III. $h(x) = 3x - 15$:

- raiz de h: $3x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5$;
- variação de sinal de h: $a > 0 \Rightarrow h$ é crescente.



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g, h e fgh, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o produto fgh. Como nos interessa que esse produto seja negativo ou nulo, $(5x - 10)(6 - x)(3x - 15) \leq 0$, temos que o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5 \text{ ou } x \geq 6\} \text{ ou } S = [2, 5] \cup [6, +\infty[.$$

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(2x - 3)^2(1 - x)^3(2 - 8x) < 0$.

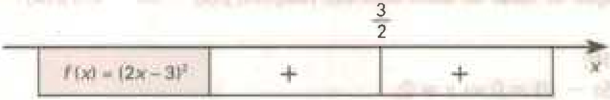
Resolução

Devemos inicialmente estudar a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = (2x - 3)^2$, $g(x) = (1 - x)^3$ e $h(x) = 2 - 8x$.

I. $f(x) = (2x - 3)^2$:

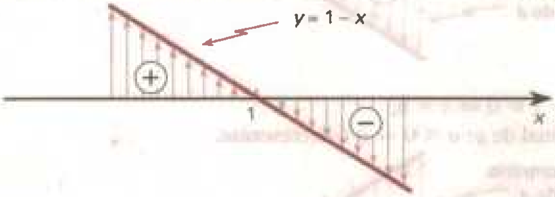
- raiz de f: $(2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \therefore x = \frac{3}{2}$;
- variação de sinal de f: lembrando que **toda potência de base real e expoente par é positiva ou nula**, temos que $f(x) \geq 0$ para todo x, $x \in \mathbb{R}$.

Esquematizando, temos:

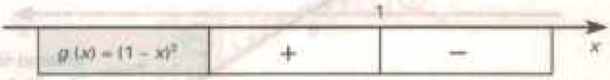


II. $g(x) = (1 - x)^3$:

- raiz de g: $(1 - x)^3 = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \therefore x = 1$;
- variação de sinal de g: lembrando que **toda potência de base real e expoente ímpar tem o mesmo sinal da base ou é nula**, temos que a variação de sinal da função $g(x) = (1 - x)^3$ é a mesma variação de sinal da função $y = 1 - x$, que é dada por:

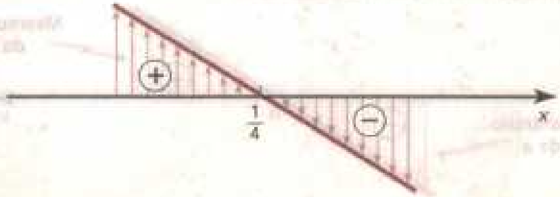


Esquematizando, temos:

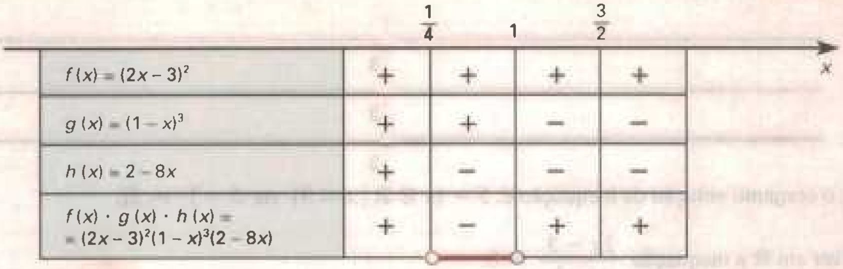


III. $h(x) = 2 - 8x$:

- raiz de h: $2 - 8x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$;
- variação de sinal de h: $a < 0 \Rightarrow h$ é decrescente.



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g, h e fgh, temos:



	$x < \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} < x < 1$	$1 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$f(x) = (2x - 3)^2$	+	+	+	+
$g(x) = (1 - x)^3$	+	+	−	−
$h(x) = 2 - 8x$	+	−	−	−
$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) =$ $= (2x - 3)^2(1 - x)^3(2 - 8x)$	+	−	+	+

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o produto fgh. Como nos interessa que esse produto seja negativo, $(2x - 3)^2(1 - x)^3(2 - 8x) < 0$, temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 1\right\} \text{ ou } S = \left]\frac{1}{4}, 1\right[.$$

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(2x - 8)(-3x + 6) \neq 0$.

Resolução

Para que o produto de dois ou mais fatores seja diferente de zero, é necessário e suficiente que cada fator seja diferente de zero. Assim, temos que:

$$(2x - 8)(-3x + 6) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8 \neq 0 \\ \text{e} \\ -3x + 6 \neq 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x \neq 4 \\ \text{e} \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Logo, o conjunto solução da inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ e } x \neq 2\}$.

3. Inequação quociente

Chama-se "inequação quociente" toda inequação apresentada em uma das seguintes formas:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0,$$

em que f e g são funções quaisquer, com g **não** identicamente nula.

Exemplos

a) $\frac{2}{x - 3} < 0$ b) $\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 0$ c) $\frac{(1 + 2x)^5(3 - x)^4}{3x - 1} \geqslant 0$

Exercícios resolvidos

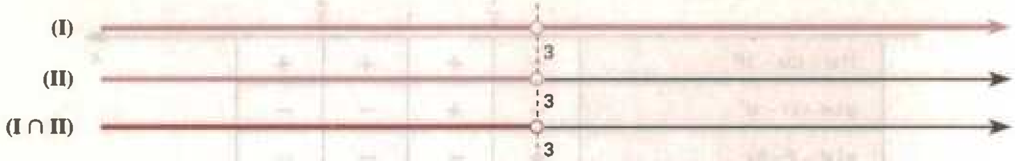
R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{2}{x - 3} < 0$.

Resolução

Condição de existência: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 3}$. (I)

Como o numerador de $\frac{2}{x - 3}$ é positivo, a fração será negativa se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja: $x - 3 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 3}$. (II)

Efetuando a intersecção de (I) e (II), temos:



Logo, o conjunto solução da inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ ou $S =]-\infty, 3[$.

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{2x-3}{x-1} \leqslant 0$.

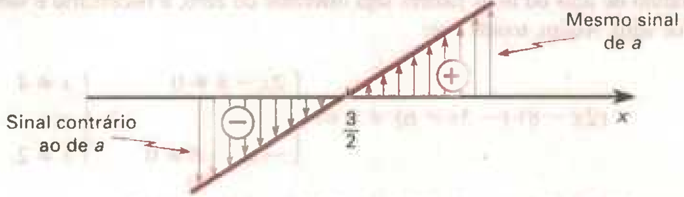
Resolução

Condição de existência: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x - 1$, temos:

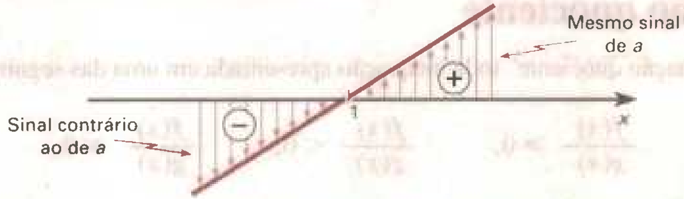
I. $f(x) = 2x - 3$:

- raiz de f: $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$;
- variação de sinal de f: $a > 0 \Rightarrow f$ é crescente.

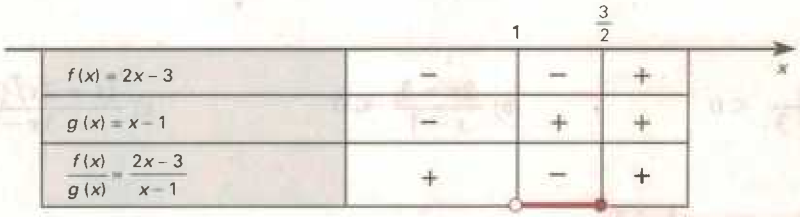


II. $g(x) = x - 1$:

- raiz de g: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$;
- variação de sinal de g: $a > 0 \Rightarrow g$ é crescente.



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:



$f(x) = 2x - 3$	−	−	+
$g(x) = x - 1$	−	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{x-1}$	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$.

Como nos interessa que esse quociente seja negativo ou nulo, $\frac{2x-3}{x-1} \leqslant 0$, temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\} \text{ ou } S = \left]1, \frac{3}{2}\right].$$

Note que o intervalo deve ser aberto à esquerda, pois pela condição de existência devemos ter $x \neq 1$.

R.7 Resolver em IR a inequação $\frac{(1 + 2x)^5(3 - x)^4}{3x - 1} \geqslant 0$.

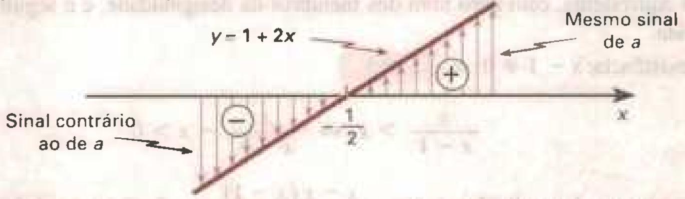
Resolução

Condição de existência: $3x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções $f(x) = (1 + 2x)^5$, $g(x) = (3 - x)^4$ e $h(x) = 3x - 1$, temos:

I. $f(x) = (1 + 2x)^5$:

- raiz de f: $(1 + 2x)^5 = 0 \Rightarrow 1 + 2x = 0 \therefore x = -\frac{1}{2}$;
- variação de sinal de f: como **toda potência de base real e expoente ímpar tem o mesmo sinal da base ou é nula**, temos que a variação de sinal da função $f(x) = (1 + 2x)^5$ é a mesma variação de sinal da função $y = 1 + 2x$, que é dada por:



Esquematizando, temos:

		$-\frac{1}{2}$
$f(x) = (1 + 2x)^5$	−	+

II. $g(x) = (3 - x)^4$:

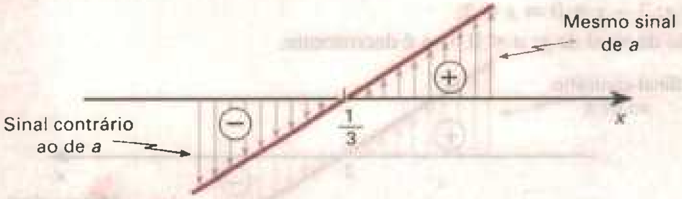
- raiz de g: $(3 - x)^4 = 0 \Rightarrow 3 - x = 0 \therefore x = 3$;
- variação de sinal de g: como **toda potência de base real e expoente par é positiva ou nula**, temos que $g(x) \geqslant 0$ para todo x, $x \in$ IR.

Esquematizando, temos:

		3
$g(x) = (3 - x)^4$	+	+

III. $h(x) = 3x - 1$:

- raiz de h: $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$;
- variação de sinal de h: $a > 0 \Rightarrow h$ é crescente.



Representando no eixo real a variação de sinal das funções f, g, h e $\frac{fg}{h}$, temos:

		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	3
$f(x) = (1 + 2x)^5$	−	+	+	+
$g(x) = (3 - x)^4$	+	+	+	+
$h(x) = 3x - 1$	−	−	+	+
$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} = \frac{(1 + 2x)^5 (3 - x)^4}{3x - 1}$	+	−	+	+

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para a expressão $\frac{fg}{h}$. Como nos interessa que essa expressão seja positiva ou nula, temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{3}\right\} \text{ ou } S = \left]-\infty\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{1}{3},\ +\infty\right[.$$

Note que excluímos o valor $\frac{1}{3}$, pois, pela condição de existência, devemos ter $x \neq \frac{1}{3}$.

R.8 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{x}{x-1} > x$.

Resolução

Quando uma inequação do tipo $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$ apresentar a variável no denominador, devemos transformá-la numa outra equivalente, com **zero** num dos membros da desigualdade, e a seguir resolver a inequação quociente obtida.

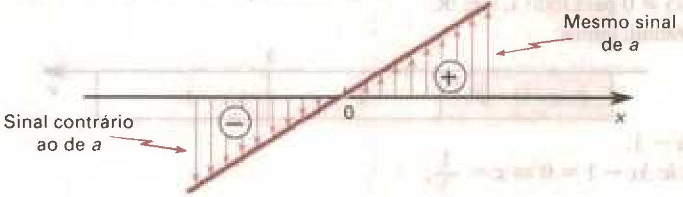
Condição de existência: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$$\frac{x}{x-1} > x \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - x > 0.$$

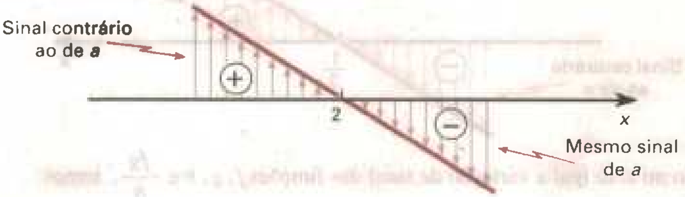
Reduzindo ao mesmo denominador, temos: $\frac{x - x(x-1)}{x-1} > 0$. Como x é fator comum, podemos colocá-lo em evidência no numerador: $\frac{x[1-(x-1)]}{x-1} > 0 \therefore \frac{x(2-x)}{x-1} > 0$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = x$, $g(x) = 2 - x$ e $h(x) = x - 1$, temos:

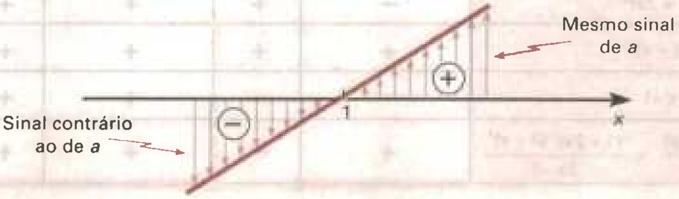
I. $f(x) = x$:
- raiz de f: $x = 0$;
- variação de sinal de f: $a > 0 \Rightarrow f$ é crescente.



II. $g(x) = 2 - x$:
- raiz de g: $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$;
- variação de sinal de g: $a < 0 \Rightarrow g$ é decrescente.



III. $h(x) = x - 1$:
- raiz de h: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$;
- variação de sinal de h: $a > 0 \Rightarrow h$ é crescente.



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g, h e $\frac{fg}{h}$, temos:

0 1 2 x

$f(x) = x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$g(x) = 2 - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$h(x) = x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} = \frac{x(2-x)}{x-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para a expressão $\frac{fg}{h}$. Como nos interessa que essa expressão seja positiva, temos que o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2\} \text{ ou } S =]-\infty, 0[\cup]1, 2[.$$

R.9 Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{4-x}}$.

Resolução

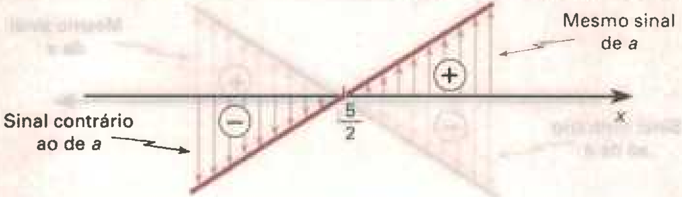
O domínio de f é o conjunto formado por todos os valores reais x de modo que $f(x) \in \mathbb{R}$. Para garantir a existência de $f(x)$, basta impormos que $\frac{2x-5}{4-x} \geqslant 0$.

A condição de existência para a fração $\frac{2x-5}{4-x}$ é $4 - x \neq 0$, ou seja, $x \neq 4$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções $g(x) = 2x - 5$ e $h(x) = 4 - x$, temos:

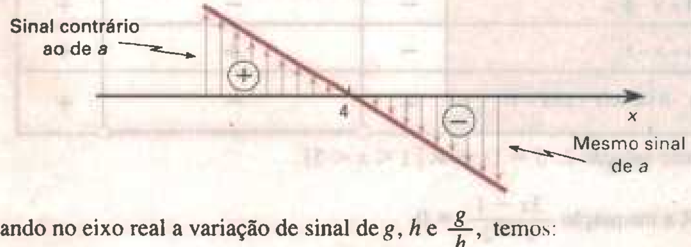
I. $g(x) = 2x - 5$:

- raiz de g: $2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$;
- variação de sinal de g: $a > 0 \Rightarrow g$ é crescente.



II. $h(x) = 4 - x$:

- raiz de h: $4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$;
- variação de sinal de h: $a < 0 \Rightarrow h$ é decrescente.



Representando no eixo real a variação de sinal de g, h e $\frac{g}{h}$, temos:

$\frac{5}{2}$ 4 x

$g(x) = 2x - 5$	$-$	$+$	$+$
$h(x) = 4 - x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x-5}{4-x}$	$-$	$+$	$-$

Logo, o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-5}{4-x}}$ é: $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \dfrac{5}{2}\leqslant x<4\right\}$.

R.10 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2-6x+5<0$.

Resolução

Toda função do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$, com $\{a, b, c\}\subset\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, pode ser escrita na forma fatorada: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, em que x_1 e x_2 são as raízes de f. Seja $f(x)=x^2-6x+5$.

- Raízes de f: $x^2-6x+5=0$:

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=16.$$

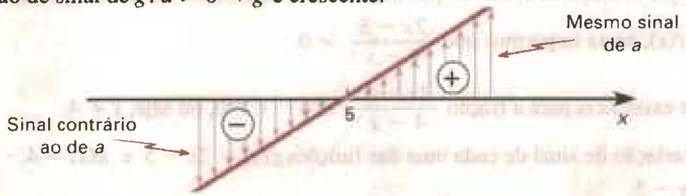
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x=\frac{6\pm 4}{2}\quad\therefore x=5\ \text{ou}\ x=1.$$

Assim, podemos escrever f na forma fatorada: $f(x)=1(x-5)(x-1)$.

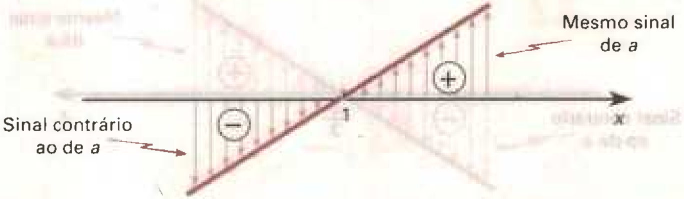
Logo, a inequação proposta é equivalente a $(x-5)(x-1)<0$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $g(x)=x-5$ e $h(x)=x-1$, temos:

I. $g(x)=x-5$:
- raiz de g: $x-5=0\Rightarrow x=5$;
- variação de sinal de g: $a>0\Rightarrow g$ é crescente.



II. $h(x)=x-1$:
- raiz de h: $x-1=0\Rightarrow x=1$;
- variação de sinal de h: $a>0\Rightarrow h$ é crescente.



Representando no eixo real a variação de sinal de cada uma das funções g, h e gh, temos:

		1	5 x
$g(x)=x-5$	−	−	+
$h(x)=x-1$	−	+	+
$g(x)\cdot h(x)=(x-5)(x-1)$	+	−	+

Logo, o conjunto solução é: $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<5\}$.

R.11 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{3x-1}{x-2}\neq 0$.

Resolução

Para que o quociente de dois números exista e seja diferente de zero, é necessário e suficiente que ambos sejam diferentes de zero. Assim, temos que:

$$\frac{3x-1}{x-2}\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}3x-1\neq 0\\ \text{e}\\ x-2\neq 0\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{3}\\ \text{e}\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Logo, o conjunto solução da inequação é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{3} \text{ e } x \neq 2\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d), B.2 (a, b, c), B.3 (a, b), B.4 (a, c, e, h), B.5 (a, c), B.6 (a, c, e), B.7 (a, c), B.8 (a, b), C.1, C.3 (a), C.4.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g, h), B.2 (d, e, f, g), B.3 (c, d, e), B.4 (b, d, f, g, i, j), B.5 (b, d, e), B.6 (b, d, f), B.7 (b, d, e), B.8 (c, d), C.2, C.3 (b), C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em IR as inequações:

a) $(2x - 1)(x - 2) \geqslant 0$
b) $(1 - x)(x + 2) < 0$
c) $x(x - 1) \leqslant 0$
d) $(3x - 12)(x - 6) \neq 0$
e) $(3x - 9)(x + 2) < 0$
f) $(6 - 2x)(x - 1) \leqslant 0$
g) $x(1 - x) \geqslant 0$
h) $(6x + 2)(2x - 1) \neq 0$

B.2 Determine, em IR, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $(2x - 3)(5 - x)(5x - 1) > 0$
b) $(x - 3)(1 - x)(2x - 1) \leqslant 0$
c) $(x - 3)(2 - x)^3(x - 4)^2 \geqslant 0$
d) $(2x - 4)(1 - x)^3 \geqslant 0$
e) $(2x - 3)^5(x - 1)^4(4 - x)^3 \leqslant 0$
f) $(x - 2)(x + 3)^8(5 - 2x)^7 < 0$
g) $(x - 5)(3x - 1)^2(2x + 4) \neq 0$

B.3 Determine o conjunto de todos os valores x, $x \in$ IR, que verificam cada uma das desigualdades:

a) $\dfrac{4}{2x - 1} > 0$
b) $\dfrac{5}{1 - x} \geqslant 0$
c) $\dfrac{-2}{x - 4} < 0$
d) $\dfrac{-8}{2 - x} \leqslant 0$
e) $\dfrac{6}{x^2 + 5} \neq 0$

B.4 Resolva em IR as inequações:

a) $\dfrac{2x - 3}{x - 5} > 0$
b) $\dfrac{5x + 1}{1 + x} \geqslant 0$
c) $\dfrac{3 - 2x}{7 - 2x} < 0$
d) $\dfrac{-3x + 8}{2x - 1} \leqslant 0$
e) $\dfrac{2x - 5}{3x - 2} \neq 0$
f) $\dfrac{x}{x - 1} < 0$
g) $\dfrac{-2x + 1}{x} \leqslant 0$
h) $\dfrac{(1 - x)^3}{3x - 1} > 0$
i) $\dfrac{(x + 1)^2}{(1 - 2x)^3} \leqslant 0$
j) $\dfrac{(2x - 4)^2}{(x - 1)^3} \neq 0$

B.5 Determine, em IR, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\dfrac{x}{2x - 1} < -1$
b) $\dfrac{2x + 5}{x} > 3$
c) $\dfrac{-4x + 2}{3x - 2} < -2$
d) $\dfrac{1 - 3x}{5x + 1} \leqslant 4$
e) $\dfrac{8x + 9}{2 - 5x} \geqslant -3$

B.6 Determine o conjunto de todos os valores x, $x \in$ IR, que verificam cada uma das desigualdades:

a) $\dfrac{4x}{2x - 1} > -x$
b) $\dfrac{6x}{5x + 2} \leqslant x$
c) $\dfrac{3x}{6x - 1} \geqslant -2x$
d) $\dfrac{5x}{2 - 3x} < 4x$
e) $\dfrac{x - 4}{x} > x - \dfrac{2x - 1}{2}$
f) $\dfrac{2x - 1}{x + 3} \leqslant \dfrac{2x}{x + 4}$

B.7 Resolva em IR as inequações:

a) $(2x - 1)^3(x - 8)^2(3x - 6) > 0$
b) $(1 - 2x)^5(5x + 1)^4(2 - 3x) \leqslant 0$
c) $\dfrac{(2x - 6)(x - 1)}{x - 4} > 0$
d) $\dfrac{(1 - 2x)(x - 3)}{x(x - 4)} \geqslant 0$
e) $\dfrac{x(x - 1)^3(x - 2)^5}{(x - 3)(4 - x)^2} < 0$

B.8 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{2-3x}}$

b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{3-x}} + \dfrac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{1-3x}}$

d) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}} + \sqrt{\dfrac{x-3}{5-x}}$

Exercícios complementares

C.1 Determine o maior número inteiro x que satisfaz a desigualdade $(x - 1)(2x - 5) \leqslant 0$.

C.2 Determine o menor número inteiro x que satisfaz a desigualdade $\dfrac{(x-3)(2x+1)}{4-x} < 0$.

C.3 Resolva em $\mathbb{R}$ cada uma das inequações:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$

b) $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$

(**Sugestão:** toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, pode ser escrita na forma fatorada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são as raízes de f.)

C.4 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$. (**Sugestão:** fatore o primeiro membro em fatores do 1º grau.)

C.5 Determine o conjunto de todos os valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que verificam a desigualdade $(2x - 1)(x + 5) > x + 5$. (**Sugestão:** escreva a inequação sob a forma $(2x - 1)(x + 5) - (x + 5) > 0$ e fatore o primeiro membro em fatores do 1º grau.)

C.6 A base e a altura de um triângulo medem $4x$ e $x + 2$, respectivamente, e a base e a altura de um retângulo medem $x + 3$ e $x + 2$, respectivamente, onde $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Para que valores de x a área do triângulo é maior que a do retângulo?

b) Qual é o menor valor inteiro x para que a área do triângulo seja maior que a do retângulo?

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) O conjunto verdade da inequação $\dfrac{x-3}{5+x} \geqslant 0$ é dado por:

a) $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } (-5 < x \leqslant 3)\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } (x < -5) \text{ e } (x \geqslant 3)\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } [(x < -5) \text{ ou } (x \geqslant 3)]\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq -5\}$.

e) $\{x \in \mathbb{R} \text{ e } [(x \leqslant 5) \text{ ou } (x \geqslant 3)]\}$.

V.2 (FGV-SP) Seja D o conjunto dos números reais x para os quais $\dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 4$. Então D é o conjunto dos x reais tais que:

a) $x \leqslant \dfrac{9}{2}$ e $x \neq 2$.

b) $2 < x \leqslant 3$.

c) $x > 2$.

d) $x < 2$ ou $x > 3$.

e) $-1 \leqslant x < 2$.

V.3 (Cescea-SP) O conjunto de todos os x para os quais $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ é um número real é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 2\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > 2\}$.

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

V.4 (Cesgranrio) Dada a inequação $(3x - 2)^3(x - 5)^2(2 - x)x > 0$, tem-se que a solução é:

a) $\left\{x \mid x < \dfrac{2}{3} \text{ ou } 2 < x < 5\right\}$.

b) $\left\{x \mid \dfrac{2}{3} < x < 2 \text{ ou } x < 0\right\}$.

c) $\dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2$

d) $\dfrac{2}{3} < x < 5$

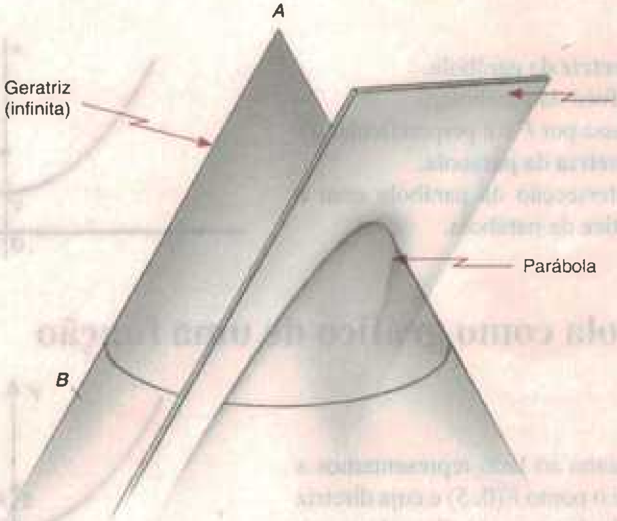
e) diferente das quatro anteriores.

Capítulo 21

Função quadrática ou do 2º grau

1. A parábola

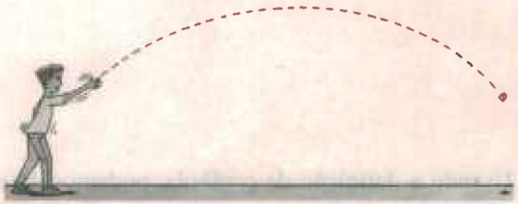
Para o estudo da função do 2º grau é necessário o conhecimento de uma curva plana denominada **parábola**. Essa curva é a intersecção da superfície de um cone com um plano paralelo a uma das geratrizes desse cone.


A
Geratriz (infinita)
Plano paralelo à geratriz $\overline{AB}$
Parábola
B

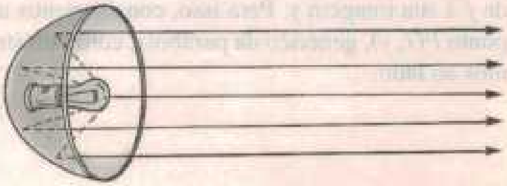
A parábola está presente no nosso dia-a-dia em várias situações.

Exemplos

a) Quando lançamos uma pedra obliquamente para cima, sua trajetória é **parabólica**.



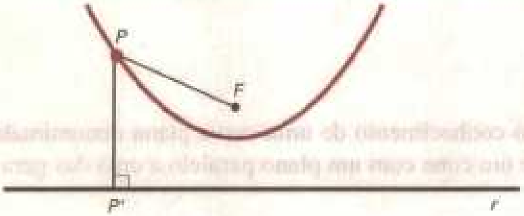
b) Quando acendemos o farol do carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada, incidem num espelho **parabólico** e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.



Como você vê, embora poucos saibam o nome dessa curva, ela faz parte do nosso cotidiano. Como a parábola será uma companheira constante daqui por diante, convém conhecê-la mais de perto.

Definição

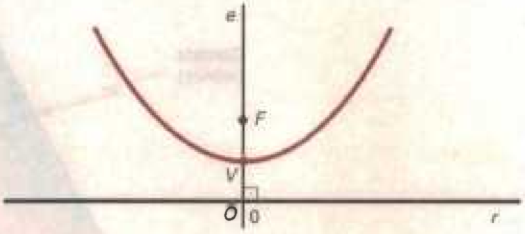
Consideremos num plano uma reta r e um ponto F, $F \notin r$. Chama-se **parábola** o conjunto dos pontos desse plano que equidistam de r e F.



O ponto P, do plano (r, F), pertence à parábola se, e somente se, $PF = PP'$ (P' é a projeção ortogonal de P sobre a reta r).

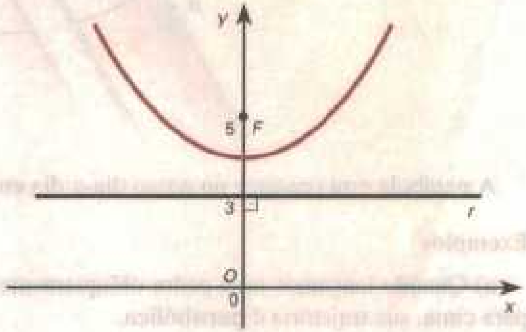
Nomenclatura

- A reta r é a **diretriz** da parábola.
- O ponto F é o **foco** da parábola.
- A reta e que passa por F e é perpendicular a r é o **eixo de simetria** da parábola.
- O ponto V, intersecção da parábola com o eixo e, é o **vértice** da parábola.

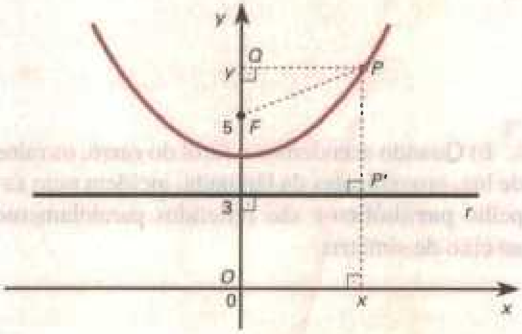


2. A parábola como gráfico de uma função

No plano cartesiano ao lado representamos a parábola cujo foco é o ponto $F(0, 5)$ e cuja diretriz é a reta r, perpendicular ao eixo Oy pelo ponto $(0, 3)$. Essa curva é gráfico de uma função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Usando a definição de parábola, podemos determinar a lei $y = f(x)$ que associa cada x do domínio de f à sua imagem y. Para isso, consideremos um ponto $P(x, y)$, genérico da parábola, como mostramos ao lado.



- O ponto P pertence à parábola; logo, $PF = PP'$.
- O comprimento do segmento PP' é $y - 3$.
- O comprimento do segmento PF é obtido pelo teorema de Pitágoras no triângulo PQF:

$$(PF)^2 = (PQ)^2 + (QF)^2 \Leftrightarrow (PF)^2 = x^2 + (y - 5)^2 \therefore PF = \sqrt{x^2 + (y - 5)^2} .$$

Nota

Mesmo que o segmento $\overline{PF}$ seja paralelo a um dos eixos, Ox ou Oy, seu comprimento pode ser obtido pela fórmula anterior.

Temos então:

$$PF = PP' \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 5)^2} = y - 3$$

$$\therefore \left(\sqrt{x^2 + (y - 5)^2}\right)^2 = (y - 3)^2 \therefore x^2 + (y - 5)^2 = (y - 3)^2$$

$$\therefore x^2 + \cancel{y^2} - 10y + 25 = \cancel{y^2} - 6y + 9$$

$$\therefore x^2 + 16 = 4y \therefore y = \frac{x^2}{4} + 4.$$

Logo, a parábola anterior é o gráfico da função $y = \frac{x^2}{4} + 4$.

De maneira análoga à que fizemos para essa curva, podemos demonstrar que toda parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox é gráfico de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Definição

Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada de **função quadrática ou função do 2º grau.**

Exemplos

a) $y = 3x^2 - x - 2$

b) $f(x) = 4x^2 - 2$

c) $f(x) = \frac{5x^2}{3} - \frac{x}{2}$

d) $y = x^2$

3. Gráfico de uma função do 2º grau

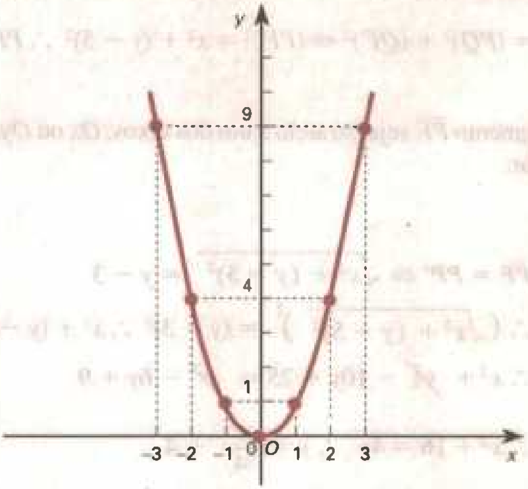
Demonstra-se que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma parábola.

Essa parábola tem o eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e sua concavidade é voltada para o sentido positivo do eixo Oy, se $a > 0$, ou voltada para o sentido negativo do eixo Oy, se $a < 0$.

Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2$, podemos construir a seguinte tabela:

	y
x	x^2
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Como sabemos que o gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola, marcamos no plano cartesiano os pontos obtidos pela tabela e a seguir unimos esses pontos desenhando uma parábola.

4. Pontos notáveis da parábola

Alguns pontos da parábola, por facilitarem a construção do gráfico da função do 2º grau, merecem destaque. Vejamos quais são eles.

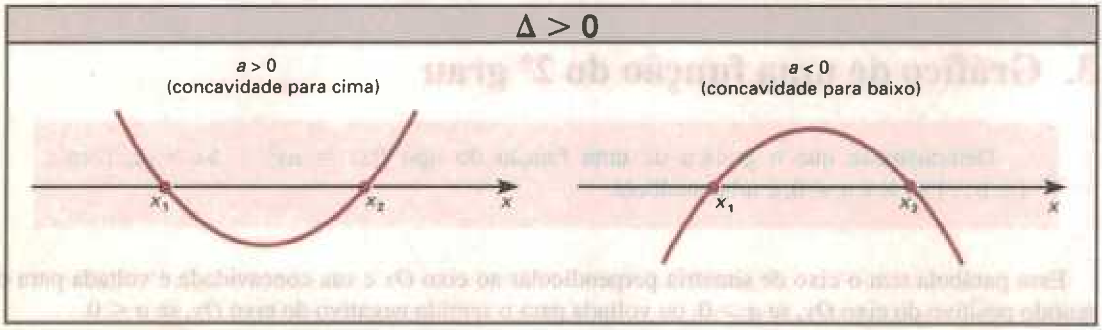
4.1. Os pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox* (se existirem)

Para obtê-los, a partir de $y = ax^2 + bx + c$, basta atribuirmos o valor **zero** à variável y e resolver a equação: $ax^2 + bx + c = 0$. **(I)**

Para resolvê-la, utilizamos a fórmula de Bhaskara, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se a equação (I) tiver $\Delta > 0$, então terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$. Assim, os pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox são $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

Resumindo:



Exemplos

a) Dada a função do 2º grau $y = 2x^2 - x - 1$, para obtermos os pontos de intersecção de seu gráfico com o eixo Ox, atribuímos o valor zero à variável y e resolvemos a equação $2x^2 - x - 1 = 0$.

Temos $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$.

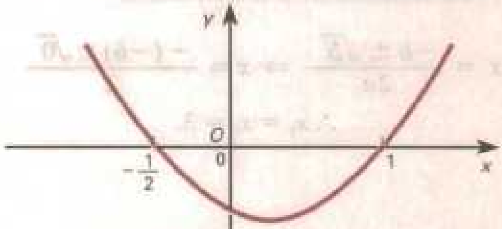
Como $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, em que x_1 e x_2 são raízes da equação.

Determinando x_1 e x_2, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$

$$\therefore\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Sabemos ainda que o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para cima:



b) Consideremos a função do 2º grau $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$.

Atribuindo o valor zero à variável $f(x)$, obtemos a equação $-3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Temos $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 7^2 - 4(-3)(-2) = 25$.

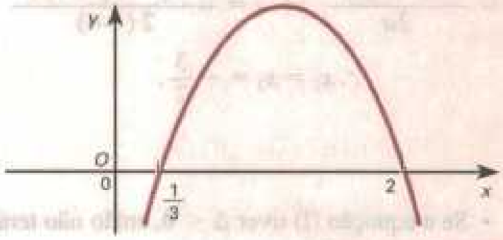
Como $\Delta > 0$, a parábola correspondente ao gráfico de f intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, em que x_1 e x_2 são as raízes de f.

Determinando x_1 e x_2, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2(-3)}$$

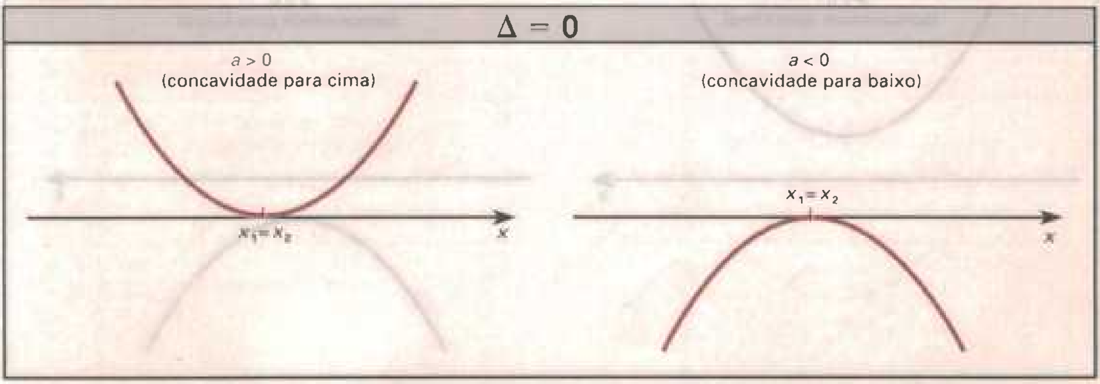
$$\therefore x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Sabemos ainda que o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), o que implica que a concavidade da parábola é voltada para baixo:



- Se a equação (I) tiver $\Delta = 0$, então terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$. Assim, a parábola será tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Resumindo:



Exemplos

a) Sendo $y = x^2 - 6x + 9$, façamos $y = 0$ para obter as raízes dessa função, ou seja: $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Temos $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$.

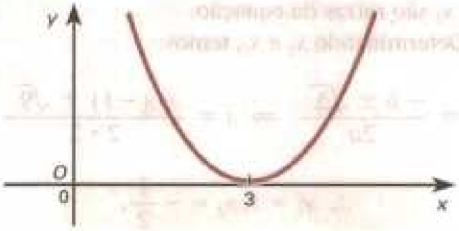
Como $\Delta = 0$, temos duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$); portanto a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Determinando essas raízes, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$\therefore x_1 = x_2 = 3.$$

Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a concavidade da parábola é voltada para cima:



b) Na função $f(x) = -4x^2 - 12x - 9$, fazendo $f(x) = 0$, obtemos as raízes de f, ou seja:

$$-4x^2 - 12x - 9 = 0.$$

Temos $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(-4)(-9) = 0$.

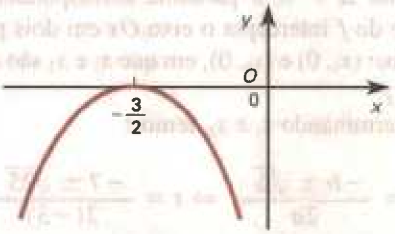
Como $\Delta = 0$, temos duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$); portanto a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Determinando essas raízes, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(-4)}$$

$$\therefore x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}.$$

O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para baixo:

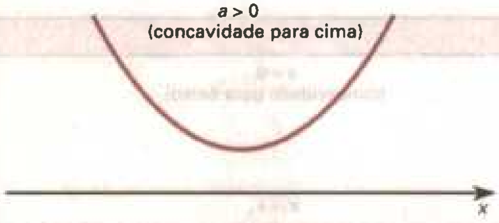


- Se a equação (I) tiver $\Delta < 0$, então não terá raízes reais. Assim, a parábola não terá ponto em comum com o eixo Ox.

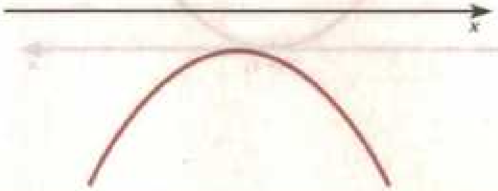
Resumindo:

$\Delta < 0$

$a > 0$
(concavidade para cima)



$a < 0$
(concavidade para baixo)

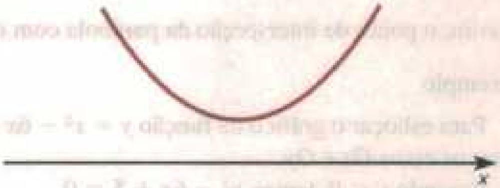


Exemplos

a) Seja $y = 2x^2 + x + 1$. Fazendo $y = 0$, temos $2x^2 + x + 1 = 0$.

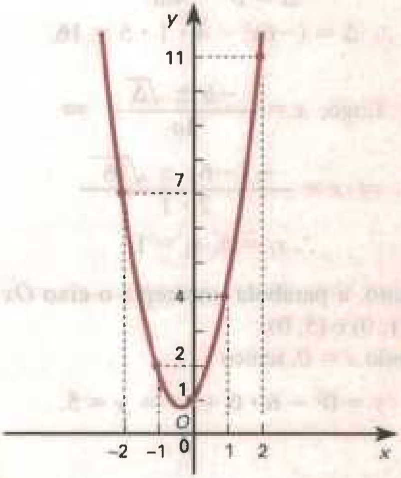
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7.$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais. Isso significa que a parábola correspondente ao gráfico da função não tem ponto em comum com o eixo Ox. Sabemos ainda que o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a concavidade é voltada para cima, conforme gráfico ao lado.



Para determinarmos a posição dessa parábola, podemos construir uma tabela:

x	$y = 2x^2 + x + 1$
−2	7
−1	2
0	1
1	4
2	11



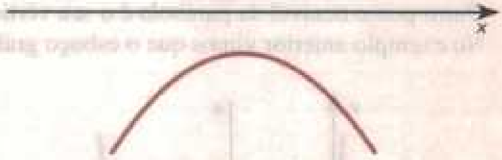
Nota

Nos subitens 4.2 e 4.3 seguintes, estudaremos alguns pontos notáveis da parábola que dispensarão a construção dessa tabela.

b) Seja $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$. Fazendo $f(x) = 0$, temos: $-2x^2 + 2x - 1 = 0$.

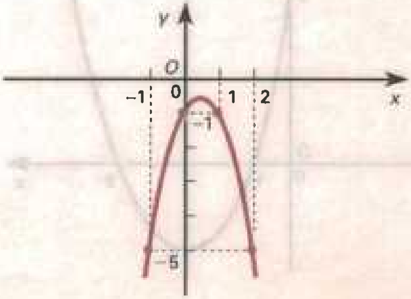
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-2)(-1) = -4.$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais; portanto a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox. Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a concavidade da parábola é voltada para baixo, conforme gráfico ao lado.



Se quisermos determinar a posição da parábola, podemos construir uma tabela:

x	$y = -2x^2 + 2x - 1$
−1	−5
0	−1
1	−1
2	−5



4.2. O ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy*

Para obtê-lo, a partir de $y = ax^2 + bx + c$, basta atribuirmos o valor **zero** à variável x:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c.$$

Assim, o ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy é $(0, c)$.

Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$, vamos obter os pontos de intersecção da parábola com os eixos Ox e Oy.

Fazendo $y = 0$, temos $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16.$$

$$\text{Logo, } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$\therefore x_1 = 5,\ x_2 = 1.$$

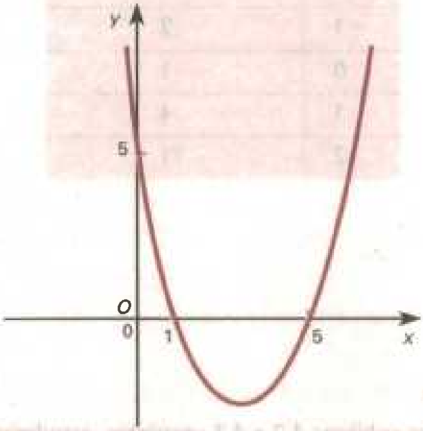
Portanto, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(1, 0)$ e $(5, 0)$.

Fazendo $x = 0$, temos

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5.$$

Então, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

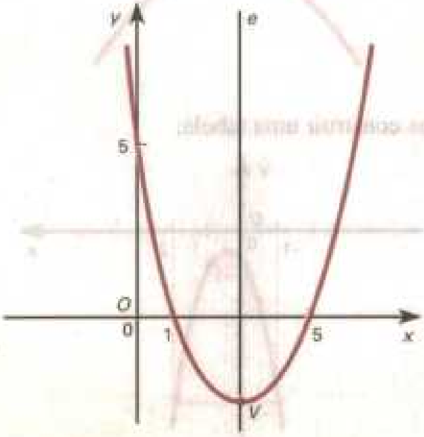
O esboço do gráfico é:



4.3. O vértice da parábola

Outro ponto notável da parábola é o seu vértice. Como obtê-lo?

No exemplo anterior vimos que o esboço gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$ é:



O vértice V da parábola pertence ao eixo de simetria e. Logo, sua abscissa é a do ponto médio do segmento de extremos $(1, 0)$ e $(5, 0)$, ou seja, $x = 3$.

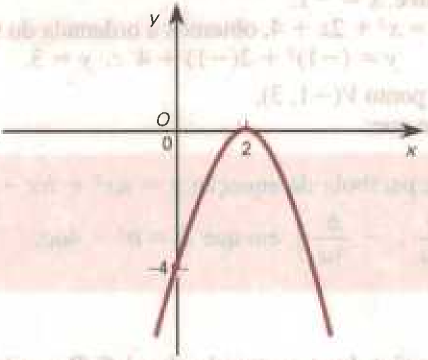
Substituindo x por 3 em $y = x^2 - 6x + 5$, obtemos a ordenada do vértice:

$$y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 \Rightarrow y = -4.$$

Portanto o vértice da parábola é o ponto $V(3, -4)$.

Percebemos, por esse exemplo, que, quando uma parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos, torna-se fácil determinar as coordenadas x_V e y_V de seu vértice.

Pensemos agora na função $y = -x^2 + 4x - 4$, cujo gráfico é:



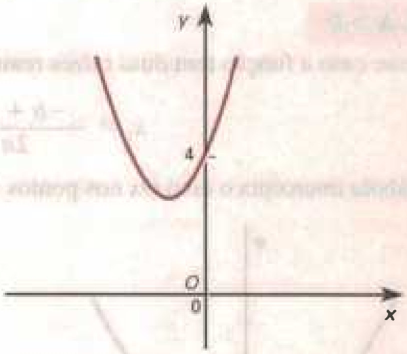
Qual é o vértice dessa parábola? Claro que é o ponto de tangência (2, 0).

Esse caso ainda se mostrou simples. Analisemos então um caso mais complicado, ou seja, uma parábola que não intercepte o eixo Ox. Por exemplo: $y = x^2 + 2x + 4$.

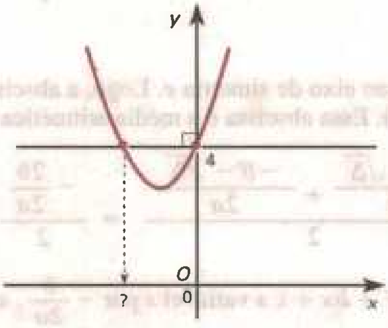
Fazendo $y = 0$, temos $x^2 + 2x + 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12.$$

Como $\Delta < 0$ e $a > 0$, a parábola não possui ponto em comum com o eixo Ox e sua concavidade é voltada para cima, conforme gráfico ao lado.

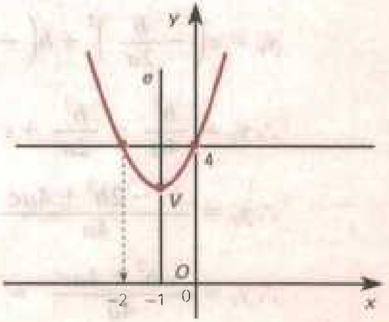


Como determinar o vértice dessa parábola? Tracemos pelo ponto (0, 4) uma reta paralela ao eixo Ox:



Determinemos os valores de x de modo que $(x, 4)$ seja ponto da parábola, ou seja:

$$y = 4 \Rightarrow x^2 + 2x + \cancel{4} = \cancel{4}$$
$$\therefore x^2 + 2x = 0 \;\therefore x(x + 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2.$$



O vértice V pertence ao eixo de simetria da parábola; logo, sua abscissa é a do ponto médio do segmento de extremos $(-2, 0)$ e $(0, 0)$, isto é, $x = -1$.

Substituindo x por -1 em $y = x^2 + 2x + 4$, obtemos a ordenada do vértice:

$$y = (-1)^2 + 2(-1) + 4 \ \therefore\ y = 3.$$

Logo, o vértice da parábola é o ponto $V(-1, 3)$.

Vamos provar genericamente que:

> O vértice $V(x_V, y_V)$ da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é o ponto $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstração

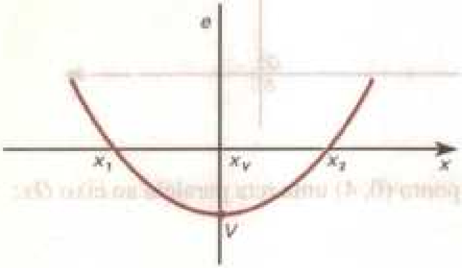
Consideremos a função $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos três casos: $\Delta > 0$ (I); $\Delta = 0$ (II); e $\Delta < 0$ (III).

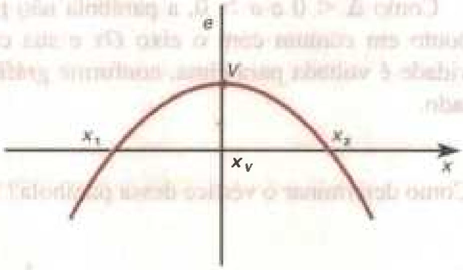
I. $\Delta > 0$

Nesse caso a função tem duas raízes reais e distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$:





O vértice V da parábola pertence ao eixo de simetria e. Logo, a abscissa x_V é a do ponto médio do segmento de extremos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$. Essa abscissa é a média aritmética das abscissas x_1 e x_2, ou seja:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-\dfrac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo na função $y = ax^2 + bx + c$ a variável x por $-\dfrac{b}{2a}$, obtemos a ordenada y_V do vértice:

$$y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \ \therefore\ y_V = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$\therefore\ y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

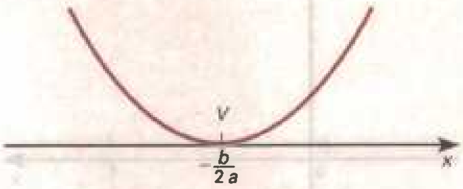
$$\therefore\ y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

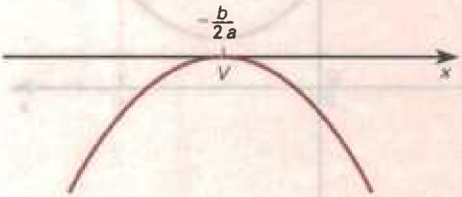
$$\therefore\ y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \ \therefore\ y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

(c.q.d.)

II. $\Delta = 0$

Nesse caso a função tem duas raízes reais e iguais $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. A parábola é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$:





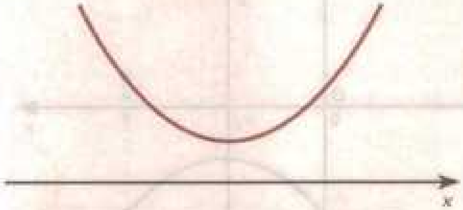
Assim, a abscissa x_V do vértice V é $-\dfrac{b}{2a}$. Vimos no caso (I) que, substituindo na função $y = ax^2 + bx + c$ a variável x por $-\dfrac{b}{2a}$, obtém-se $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$. (c.q.d.)

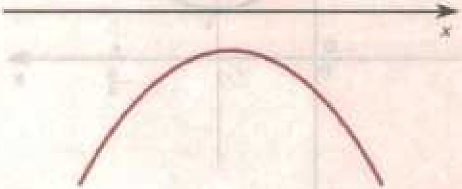
Nota

Como $\Delta = 0$, temos que $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = 0$.

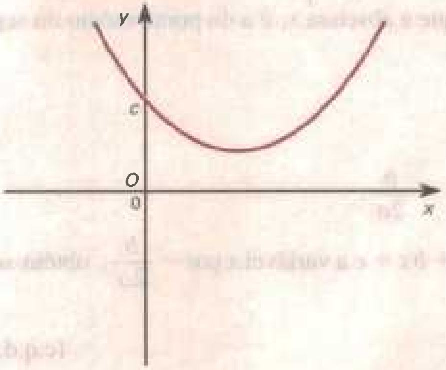
III. $\Delta < 0$

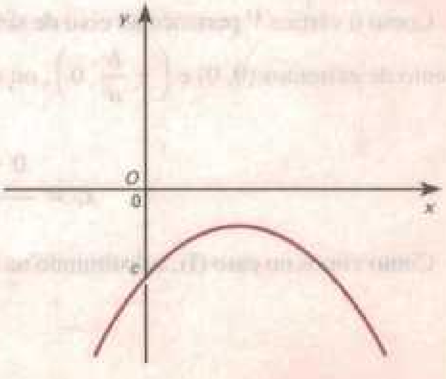
Nesse caso a função não tem raízes reais; portanto a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox:





O ponto de intersecção do gráfico com o eixo Oy é $(0, c)$.

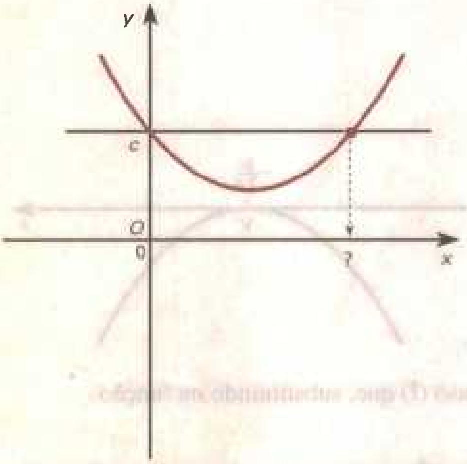


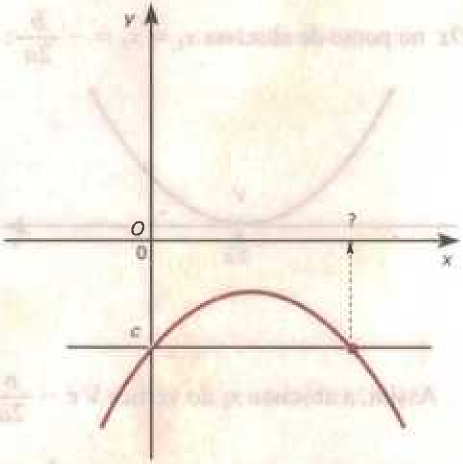


Nota

É claro que o gráfico poderia estar em uma posição diferente dessas. Estamos ilustrando apenas para facilitar o raciocínio.

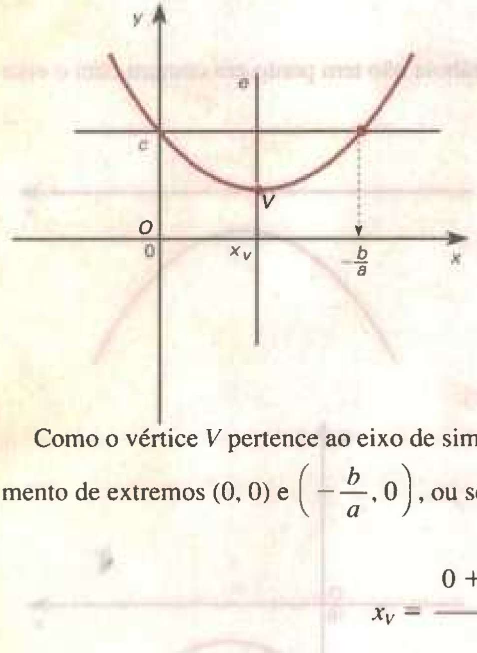
Consideremos a reta que passa pelo ponto $(0, c)$ e é paralela ao eixo Ox.

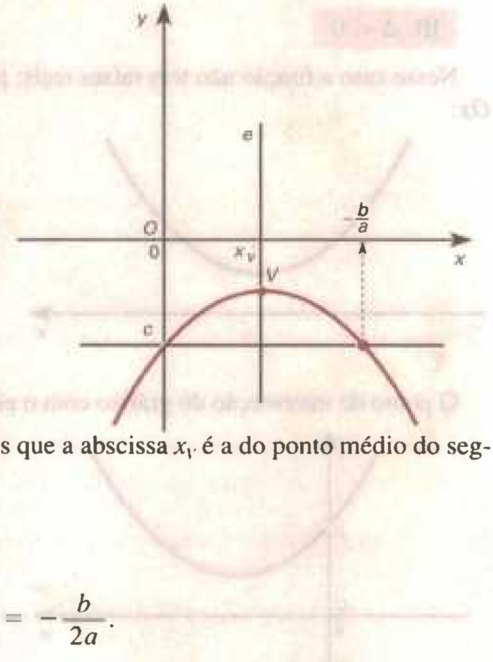




Para determinarmos as coordenadas dos pontos da parábola que têm ordenada c, basta substituirmos na função $y = ax^2 + bx + c$ a variável y por c:

$$\cancel{c} = ax^2 + bx + \cancel{c} \;\therefore\; 0 = ax^2 + bx \;\therefore\; 0 = x(ax + b) \;\therefore\; x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}.$$





Como o vértice V pertence ao eixo de simetria e, temos que a abscissa x_V é a do ponto médio do segmento de extremos $(0, 0)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, ou seja,

$$x_V = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Como vimos no caso (I), substituindo na função $y = ax^2 + bx + c$ a variável x por $-\frac{b}{2a}$, obtém-se:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 8$, dando seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Fazendo $y = 0$, temos: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$.

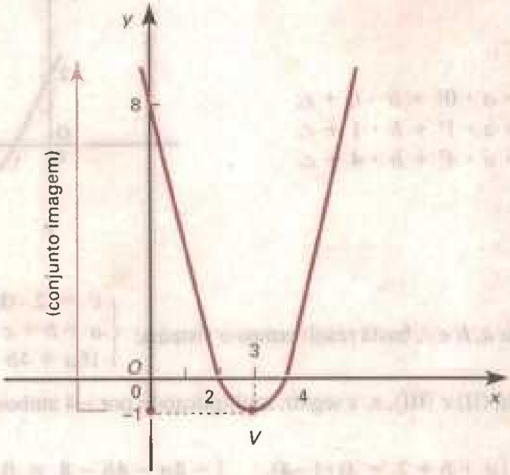
Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (2, 0) e (4, 0).
Fazendo $x = 0$, temos $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \Rightarrow y = 8$.
Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 8).
A abscissa x_V do vértice é a do ponto médio do segmento de extremos (2, 0) e (4, 0). Isto é:

$$x_V = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

A ordenada y_V do vértice é obtida substituindo-se x por 3 em $y = x^2 - 6x + 8$. Isto é:

$$y_V = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 \Rightarrow y_V = -1.$$

Logo, o vértice é o ponto $V(3, -1)$.



O domínio da função é $\mathbb{R}$, pois para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$, existe y real tal que $y = x^2 - 6x + 8$.
O **conjunto imagem** da função é aquele formado pelas **ordenadas** de todos os pontos do gráfico. Essas ordenadas são todos os números reais maiores ou iguais a -1.

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\} \text{ ou } \text{Im} = [-1, +\infty[.$$

R.2 Esboçar o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, dando seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Fazendo $y = 0$, temos $-x^2 + 4x - 5 = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)(-5) \therefore \Delta = -4.$$

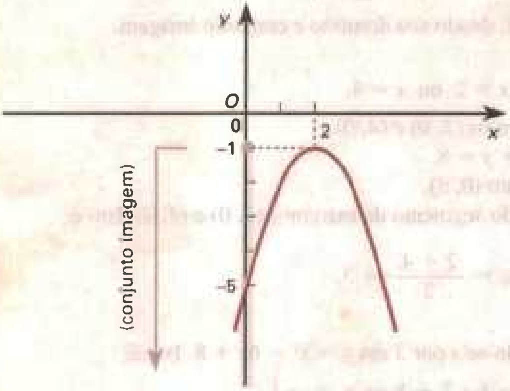
Como $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais; portanto a parábola não intercepta o eixo Ox.
Fazendo $x = 0$, temos $y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 5 \Rightarrow y = -5$.
Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -5)$.
Para determinarmos o vértice $V(x_V, y_V)$, vamos usar as fórmulas:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} \Rightarrow x_V = 2;$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4(-1)} \Rightarrow y_V = -1.$$

Temos então que $V(2, -1)$.

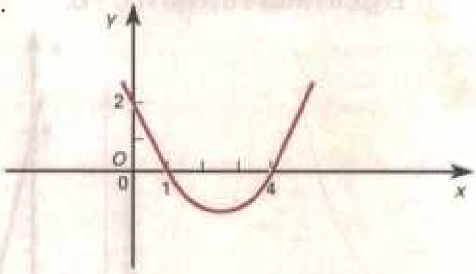
O esboço do gráfico é:



O domínio da função é $\mathbb{R}$.
O conjunto imagem é $\text{Im} =]-\infty, -1]$.

R.3 O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado ao lado. Determinar a, b e c.

Resolução



$(0, 2) \in f \Rightarrow 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c.$
$(1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$
$(4, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c.$

Assim, para determinar a, b e c, basta resolvermos o sistema: $\begin{cases} c = 2 \quad \text{(I)} \\ a + b + c = 0 \quad \text{(II)} \\ 16a + 4b + c = 0. \quad \text{(III)} \end{cases}$

Substituindo c por 2 em (II) e (III), e, a seguir, multiplicando por -4 ambos os membros de (II), temos:

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \cdot (-4) \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - 4b - 8 = 0 \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases}$$

Somando, membro a membro, essas duas últimas equações, temos: $12a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Substituindo, em (II), a por $\frac{1}{2}$ e c por 2, obtemos: $\frac{1}{2} + b + 2 = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$.

Temos então $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$ e $c = 2$.

R.4 Para que valores reais de m a função $f(x) = 2x^2 + 5x + m + 3$ admite duas raízes reais e distintas?

Resolução

Uma função do 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, admite duas raízes reais e distintas se, e somente se, $\Delta > 0$, ou seja: $b^2 - 4ac > 0$.

Na função $f(x) = 2x^2 + 5x + m + 3$, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4 \cdot 2(m + 3)$$
$$\therefore \Delta = 25 - 8(m + 3) \therefore \Delta = 25 - 8m - 24 \therefore \Delta = 1 - 8m.$$

Impondo $\Delta > 0$, temos: $1 - 8m > 0 \therefore -8m > -1 \therefore 8m < 1 \therefore m < \frac{1}{8}$.

Logo, a função f tem duas raízes reais e distintas para todo $m \in \mathbb{R}$ e $m < \frac{1}{8}$.

R.5 O gráfico da função $f(x) = kx^2 + x - 1$, $k \in \mathbb{R}$, é uma parábola que possui dois pontos distintos em comum com o eixo Ox. Determinar os possíveis valores de k.

Resolução

Para que o gráfico de f seja uma parábola, devemos impor uma condição para garantir que f é função do 2º grau. Essa condição é:

$$\boxed{k \neq 0.} \quad \text{(I)}$$

Para que a parábola tenha dois pontos distintos em comum com o eixo Ox, a função f deve ter duas raízes reais e distintas; portanto devemos ter $\Delta > 0$.

Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot k \cdot (-1) \therefore \Delta = 1 + 4k.$$

Impondo $\Delta > 0$, temos: $1 + 4k > 0 \therefore 4k > -1 \therefore \boxed{k > -\frac{1}{4}.}$ (II)

Por (I) e (II), temos $k > -\frac{1}{4}$ e $k \neq 0$.

R.6 Determinar o conjunto imagem da função $f\colon [-2, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Resolução

Consideremos a função $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Raízes de g

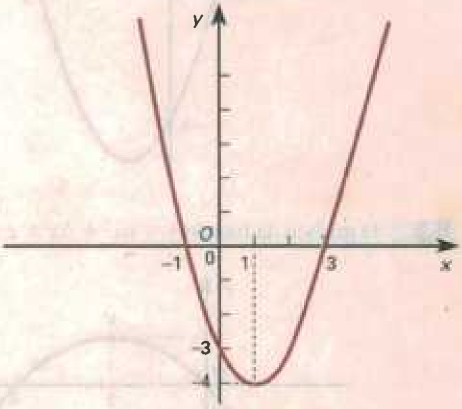
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$

$\therefore \Delta = 16.$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$\therefore x_1 = 3, x_2 = -1.$

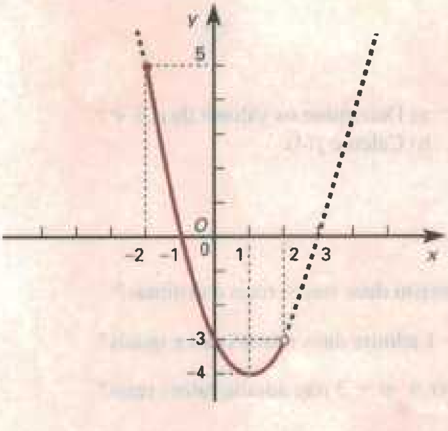
- Gráfico de g



Ao restringirmos o domínio da função g ao intervalo $[-2, 2[$, obtemos a função f, ou seja:

$$f\colon [-2, 2[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

O gráfico de f é:



Note que:

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 \Rightarrow f(-2) = 5 \text{ e}$$
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 \Rightarrow f(2) = -3.$$

Logo, o conjunto imagem de f é:

$\mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$ ou $\mathrm{Im} = [-4, 5]$.

Sugestões

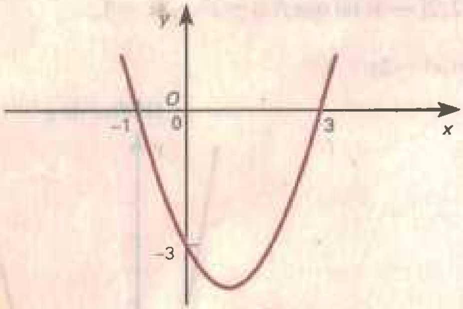
Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até i), B.2, B.4, B.5, C.1, C.2, C.5, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (j até t), B.3, B.6, B.7, C.3, C.4, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções, dando seu domínio e conjunto imagem:

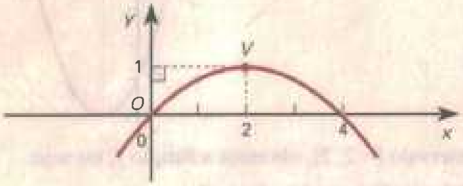
a) $y = x^2 - 8x + 12$
b) $y = x^2 - 4x - 5$
c) $y = -4x^2 + 3x$
d) $y = -x^2 + 9$
e) $y = 4x^2 + 8x$
f) $y = 2x^2 - 2x + 1$
g) $y = -5x^2 + 2x - 1$
h) $y = x^2 - 6x + 9$
i) $y = -x^2 - 4x - 4$
j) $y = x^2 - 6x + 5$
k) $y = x^2 + 4x + 3$
l) $y = -3x^2 + 5x$
m) $y = -x^2 + 4x + 5$
n) $y = 2x^2 - 18$
o) $y = 4x^2 + 2x + 1$
p) $y = -x^2 + x - 1$
q) $y = x^2 - 2x + 1$
r) $y = -x^2 - 2x - 1$
s) $y = 3x^2$
t) $y = -5x^2$

B.2 O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ é:



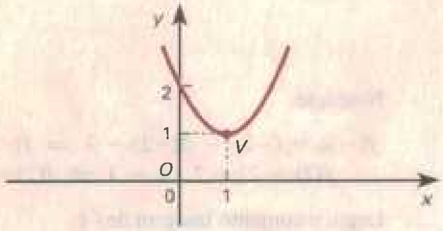
Determine:
a) os valores de a, b e c;
b) o conjunto imagem dessa função.

B.3 O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ é:



Determine os valores de a, b e c.

B.4 O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:



a) Determine os valores de a, b e c.
b) Calcule $f(4)$.

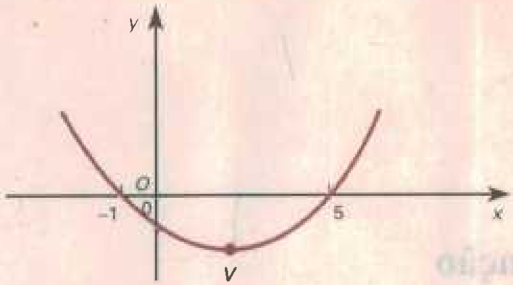
B.5 Para que valores reais de m a função $f(x) = mx^2 + 3x + 1$ possui duas raízes reais e distintas?

B.6 Para que valores reais de m a função $f(x) = x^2 + mx + m - 1$ admite duas raízes reais e iguais?

B.7 Para que valores reais de m a função $f(x) = (m - 2)x^2 + 2mx + m + 3$ não admite raízes reais?

Exercícios complementares

C.1 Sendo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:



Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) O número real c é negativo. V

b) O número real a é positivo. V

c) A abscissa do vértice V é negativa. F

? d) O número real b é negativo. V

e) A ordenada do vértice é $-\dfrac{(b^2 - 4ac)}{4a}$. V

f) O discriminante da equação $f(x) = 0$ é nulo. F

C.2 O gráfico da função $f(x) = 3x^2 - (k + 2)x + k - 1$, $k \in \mathbb{R}$, é uma parábola cujo vértice pertence ao eixo das abscissas. Determine o valor de k.

C.3 O gráfico da função $f(x) = kx^2 - (2k + 4)x + k + 4$, $k \in \mathbb{R}$, intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos. Determine os possíveis valores de k.

C.4 O gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 2k - 3$, $k \in \mathbb{R}$, não intercepta o eixo das abscissas. Determine os possíveis valores de k.

C.5 Considere o conjunto $A = [-1, 2]$ e a função $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 12$. Determine o conjunto imagem de f.

C.6 Obtenha o conjunto imagem da função $f\colon [0, 4[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

C.7 Sendo o conjunto $A = [0, +\infty[$ e a função $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x$, qual é o conjunto imagem de f?

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes reais, passa pelos pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 2)$. Então $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ vale:

a) $-\dfrac{2}{9}$ b) $\dfrac{2}{9}$ c) $-\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) 4

V.2 (Fuvest-SP) Considere a parábola de equação $y = x^2 + mx + 4m$.

a) Ache a intersecção da parábola com o eixo Ox, quando $m = -2$.

b) Determine o conjunto dos valores de m para os quais a parábola não intercepta o eixo Ox.

bom!

V.3 (UFAC) Dada a relação $R = \{(x, y) \in A \times B$ tal que $y = x^2 - 6x + 5\}$, em que $A =]-1, 7]$ e $B = [0, 5[$, construa o gráfico, dê o domínio e o conjunto imagem de R.

V.4 (UFMG) O conjunto de todos os valores reais de m para os quais o conjunto imagem de $f(x) = -x^2 + mx - \dfrac{1}{2}$ seja $B = \{y \in \mathbb{R}, y \leq 2\}$ é:

a) $\{0\}$

b) $\{-2, 2\}$

c) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

d) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

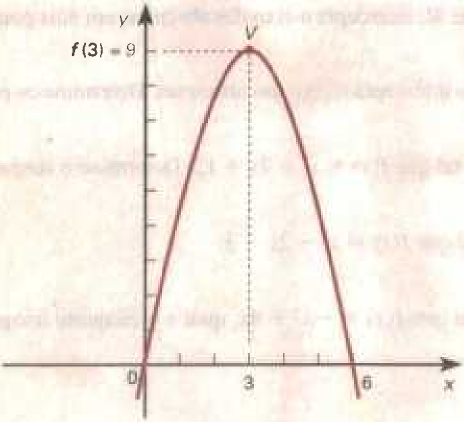
e) $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$

Capítulo 22

Máximo e mínimo de uma função

1. Valor máximo de uma função

Seja a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico é:



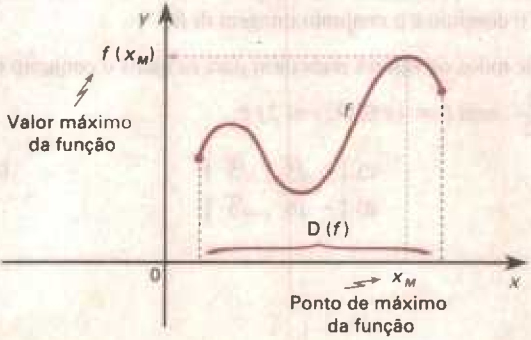
Note que $f(3) \geqslant f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Por isso dizemos que:

- $f(3) = 9$ é o **valor máximo** da função f;
- 3 é o **ponto de máximo** da função f.

Definição

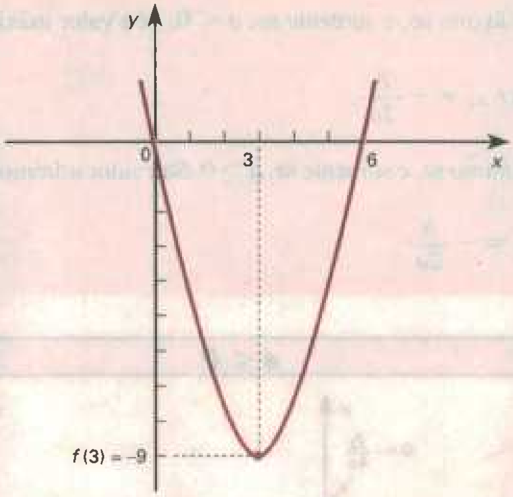
> Seja f uma função real de variável real.
> A função f admite **valor máximo** se, e somente se, existe x_M, $x_M \in D(f)$, tal que:
> $$f(x_M) \geqslant f(x), \ \forall x, x \in D(f).$$
> O número $f(x_M)$ é chamado de **valor máximo** da função f.
> O número x_M é chamado de **ponto de máximo** da função f.

Graficamente, temos:


y
f (x_M)
Valor máximo da função
f
D (f)
0
x_M
x
Ponto de máximo da função

2. Valor mínimo de uma função

Seja a função $f(x) = x^2 - 6x$, cujo gráfico é:



Note que $f(3) \leq f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Por isso dizemos que:

- $f(3) = -9$ é o **valor mínimo** da função f;
- 3 é o **ponto de mínimo** da função f.

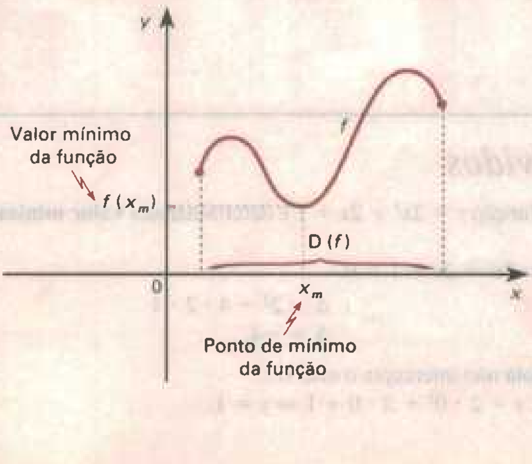
Definição

Seja f uma função real de variável real.
A função f admite **valor mínimo** se, e somente se, existe x_m, $x_m \in D(f)$, tal que:

$$f(x_m) \leq f(x),\ \forall x, x \in D(f).$$

O número $f(x_m)$ é chamado de **valor mínimo** da função f.
O número x_m é chamado de **ponto de mínimo** da função f.

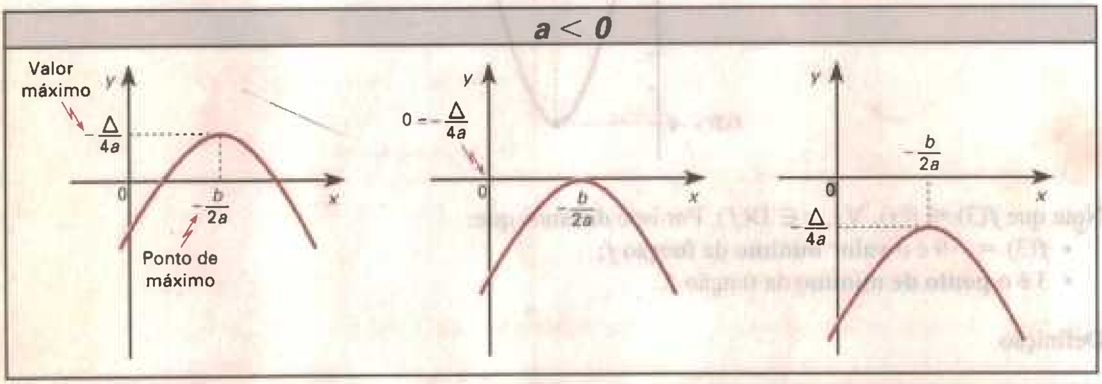
Graficamente, temos:

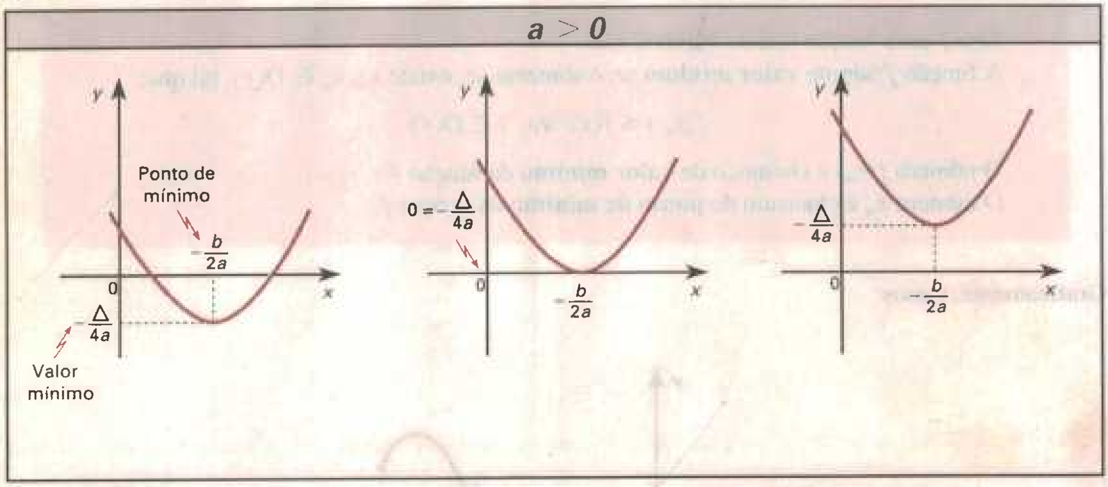

y
Valor mínimo da função
f (x_m)
f
D (f)
0
x_m
x
Ponto de mínimo da função

Teorema

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- f admite valor máximo se, e somente se, $a < 0$. Seu valor máximo é $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ e seu ponto de máximo é $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.
- f admite valor mínimo se, e somente se, $a > 0$. Seu valor mínimo é $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ e seu ponto de mínimo é $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.


$a < 0$
Valor máximo
$-\frac{\Delta}{4a}$
y
0
$-\frac{b}{2a}$
x
Ponto de máximo
y
$0 = -\frac{\Delta}{4a}$
0
$-\frac{b}{2a}$
x
y
$-\frac{b}{2a}$
0
$-\frac{\Delta}{4a}$
x


$a > 0$
y
Ponto de mínimo
$-\frac{b}{2a}$
0
x
$-\frac{\Delta}{4a}$
Valor mínimo
y
$0 = -\frac{\Delta}{4a}$
0
$-\frac{b}{2a}$
x
y
$-\frac{\Delta}{4a}$
0
$-\frac{b}{2a}$
x

Exercícios resolvidos

R.1 Esboçar o gráfico da função $y = 2x^2 + 2x + 1$ e determinar seu **valor mínimo** e seu **ponto de mínimo**.

Resolução

Fazendo $y = 0$, temos: $2x^2 + 2x + 1 = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\Delta = -4.$$

Como $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo Ox.

Fazendo $x = 0$, temos: $y = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$.

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 1).

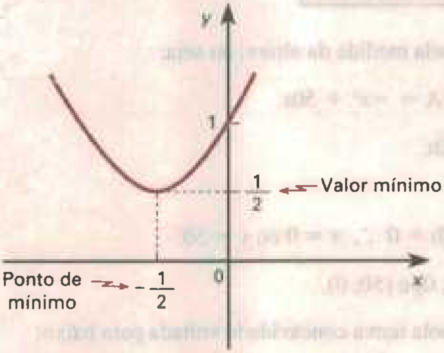
Para a determinação do vértice $V(x_V, y_V)$, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{2}{2 \cdot 2} \therefore x_V = -\frac{1}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-(-4)}{4 \cdot 2} \therefore y_V = \frac{1}{2}.$$

Assim, temos $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

O esboço do gráfico é:



O valor mínimo da função é $\frac{1}{2}$.

O ponto de mínimo da função é $-\frac{1}{2}$.

R.2 Determinar m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o **valor máximo** da função $f(x) = -x^2 + 10x + m$ seja 36.

Resolução

O valor máximo de f é dado por $-\frac{\Delta}{4a}$. Assim, devemos ter:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 36 \Rightarrow -\frac{(10^2 - 4(-1)m)}{4(-1)} = 36$$

$$\therefore \frac{100 + 4m}{4} = 36 \therefore 100 + 4m = 144 \therefore 4m = 44 \Rightarrow m = 11.$$

R.3 O **ponto de mínimo** da função $f(x) = mx^2 + x + 1$, com $m \in \mathbb{R}^*$, é $-\frac{1}{4}$. Determinar m.

Resolução

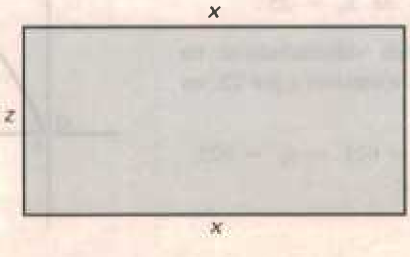
O ponto de mínimo da função é dado por $-\frac{b}{2a}$. Assim, devemos ter:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2m} = -\frac{1}{4} \therefore m = 2.$$

R.4 Para uma partida de futebol na praia, devo demarcar uma região retangular utilizando uma corda de 100 m. Qual a área **máxima** desse campo de futebol? Quais serão as dimensões do campo de área máxima?

Resolução

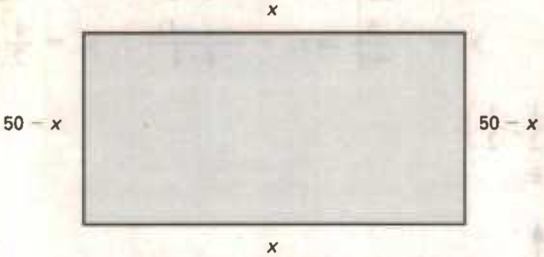
Seja o retângulo formado pela corda:



Como o comprimento da corda é 100 m, temos:

$$2x + 2z = 100 \therefore x + z = 50 \therefore z = 50 - x.$$

Assim, as dimensões do retângulo podem ser indicadas por:



A área A do retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura, ou seja:

$$A = x(50 - x) \therefore A = -x^2 + 50x.$$

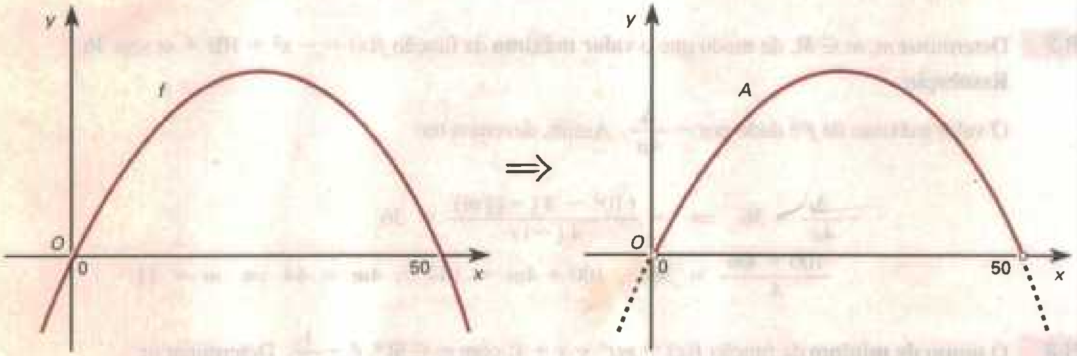
Esboçamos agora o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 50x$.

- Raízes de f

$$-x^2 + 50x = 0 \Rightarrow x(-x + 50) = 0 \therefore x = 0 \text{ ou } x = 50.$$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (0, 0) e (50, 0).

- Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a parábola tem a concavidade voltada para baixo:



Nota

O gráfico da função A é apenas a parte da parábola localizada acima do eixo Ox, pois A deve ser um número positivo.

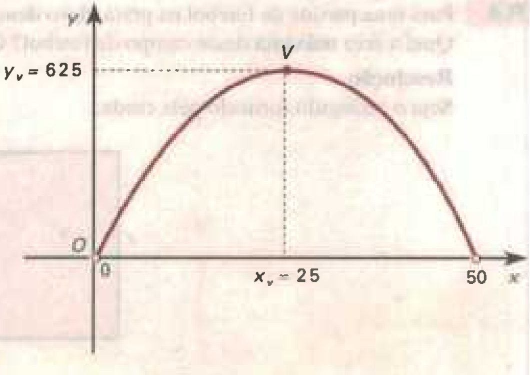
A área máxima é a ordenada y_V do vértice da parábola e o valor de x para que a área seja máxima é a abscissa x_V do vértice.

Lembrando que x_V é a mesma abscissa do ponto médio do segmento de extremos (0, 0) e (50, 0), temos:

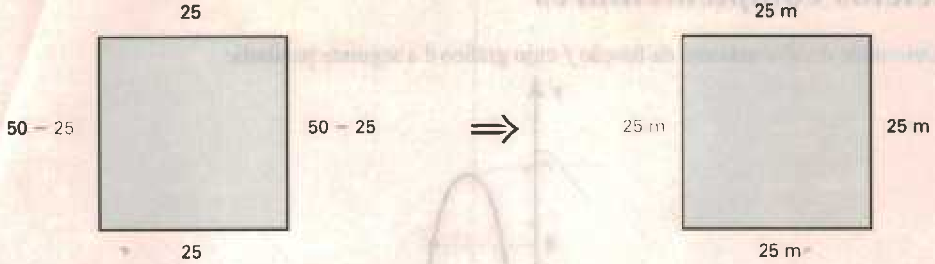
$$x_V = \frac{0 + 50}{2} \Rightarrow x_V = 25.$$

A ordenada y_V é obtida substituindo-se na função $A = -x^2 + 50x$ a variável x por 25, ou seja:

$$A = -25^2 + 50 \cdot 25 = 625 \Rightarrow y_V = 625.$$



Assim, a área máxima do retângulo é 625 m² e as dimensões desse campo são obtidas fazendo-se $x = 25$ m.



Note que o retângulo terá área máxima se for um quadrado.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a até g), B.3, B.5, C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (h até p), B.4, B.6, B.7, C.2, C.4, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico e determine o valor máximo (ou o mínimo) e o ponto de máximo (ou o de mínimo) de cada uma das funções:

a) $y = x^2 - 8x + 7$
b) $y = -2x^2 + 2x - 3$
c) $y = -x^2 + 2x + 8$
d) $y = 3x^2 - 2x + 1$

B.2 Determine o valor máximo (mínimo) e o ponto de máximo (mínimo) de cada uma das funções:

a) $y = 2x^2 - 12x + 10$
b) $y = -x^2 + 4x + 5$
c) $y = x^2 - 9$
d) $y = -x^2 + 16$
e) $y = 3x^2$
f) $y = x^2 - 2x + 4$
g) $y = -x^2 + 3x - 5$
h) $y = x^2 - 2x - 3$
i) $y = -x^2 - 4x + 5$
j) $y = 3x^2 - 9$
k) $y = -x^2 + 1$
l) $y = x^2 + 9x$
m) $y = -x^2 - 4x$
n) $y = x^2 - x + 1$
o) $y = -2x^2 + x - 1$
p) $y = 2x^2 + 6$

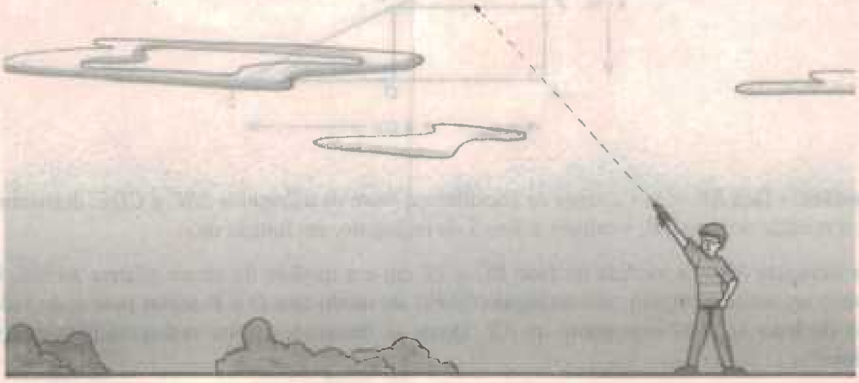
B.3 Determine m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 4x + m$ seja 1.

B.4 Calcule o valor de m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o valor mínimo da função $f(x) = x^2 + mx - m - 6$ seja -9.

B.5 Obtenha m, $m \in \mathbb{R}_-^*$, de modo que o ponto de máximo da função $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + 5$ seja -2.

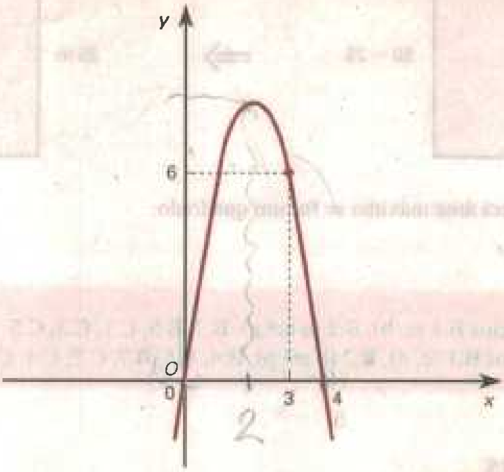
B.6 Qual é o valor de m, $m \in \mathbb{R}_+^*$, para que o ponto de mínimo da função $y = mx^2 + (2m - 1)x + 3$ seja 8?

B.7 Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$. Qual a altura máxima atingida pela bala? Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?

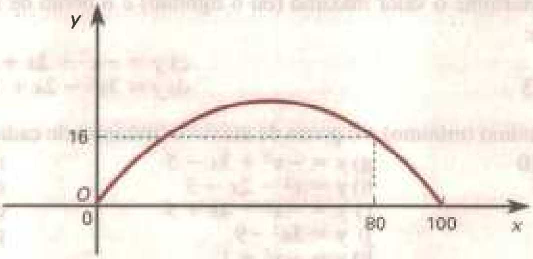


Exercícios complementares

C.1 Determine o valor máximo da função *f* cujo gráfico é a seguinte parábola:

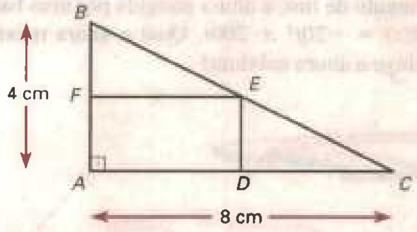


C.2 O gráfico mostra a trajetória de uma pedra atirada para cima, obliquamente em relação à horizontal:



Os valores nos eixos Ox e Oy indicam, respectivamente, as distâncias, em metros, percorridas pela pedra na horizontal e na vertical (altura). Sabendo-se que tal trajetória é parabólica, determine a altura máxima atingida pela pedra.

C.3 Um triângulo ABC, retângulo em A, possui os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medindo respectivamente 4 cm e 8 cm. Um retângulo $ADEF$ é inscrito nesse triângulo, de modo que os pontos D, E e F pertençam respectivamente aos lados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$. Calcule a área **máxima** que pode ter esse retângulo.



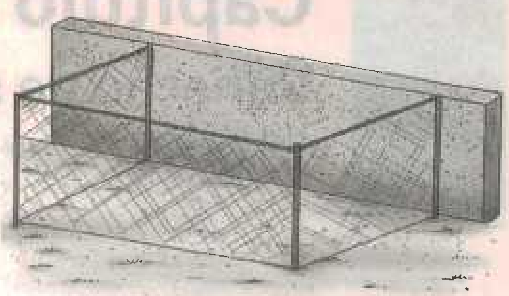
Sugestões: • faça $EF = x$; • através da semelhança entre os triângulos ABC e CDE, determine, em função de x, a medida do lado $\overline{DE}$; • calcule a área S do retângulo, em função de x.

C.4 Num triângulo ABC, a medida do lado $\overline{BC}$ é 12 cm e a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é 24 cm. Inscreve-se, nesse triângulo, um retângulo $DEFG$ de modo que D e E sejam pontos do lado $\overline{BC}$, F seja ponto do lado $\overline{AC}$ e G seja ponto de $\overline{AB}$. Quais as dimensões desse retângulo para que sua área seja máxima?

C.5 Em uma fazenda, um trabalhador deve construir um galinheiro de forma retangular. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro (conforme figura).

legal

Qual será a área máxima desse cercado, sabendo que o muro tem extensão suficiente para ser lateral de qualquer galinheiro construído com essa tela?



C.6 O custo diário de produção de uma indústria de aparelhos de telefones é dado pela função $C(x) = x^2 - 86x + 2500$, onde $C(x)$ é o custo em dólares e x é o número de unidades fabricadas. Quantos aparelhos devem ser produzidos diariamente para que o custo seja mínimo?

legal

C.7 Para uma excursão, fretou-se um avião com um total de cinqüenta lugares. Foi estabelecido que cada participante pagaria R$ 600,00 pelo seu lugar e mais uma taxa de R$ 30,00 para cada lugar não-ocupado. Quanto receberá no máximo a companhia de aviação?

legal

Questões dos vestibulares

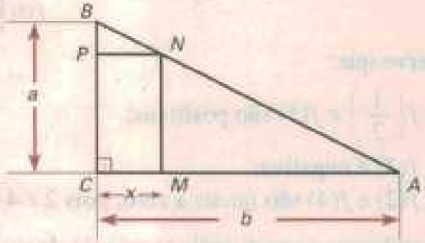
V.1 (Faap-SP) Divida o número 180 em duas partes de modo que o seu produto seja máximo.

V.2 (Cesgranrio) Um dia na praia às 10 h a temperatura era de 36°C e às 14 h atingiu a máxima de 39,2°C. Supondo que nesse dia a temperatura $f(t)$ em graus era uma função do tempo t medido em horas, dada por $f(t) = at^2 + bt + c$, quando $8 \leq t \leq 20$, então pode-se afirmar que:

?

a) $b = 0$
b) $ab < 0$
c) $a = b$
d) $a > 0$
e) $b < 0$

V.3 (E. E. Mauá-SP) Um triângulo ABC é retângulo em C (conforme figura) e seus catetos medem a e b. Determine x, $x = CM$, de modo que o retângulo $CMNP$, inscrito nesse triângulo, tenha área máxima.



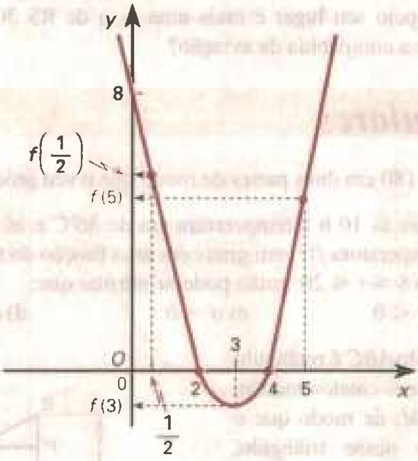
V.4 (Cesgranrio) Dar o valor máximo de y na expressão $y = 21n - n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 23

Variação de sinal de uma função do 2º grau

1. Conceituação

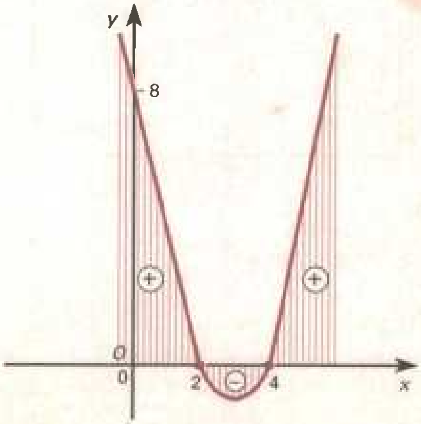
Consideremos a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, cujo gráfico é:



Observe que:

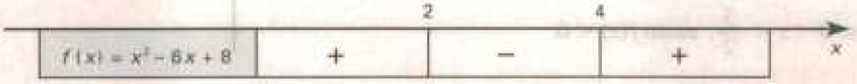
- $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(5)$ são positivas;
- $f(3)$ é negativa;
- $f(2)$ e $f(4)$ são iguais a zero, pois 2 e 4 são raízes da função.

Lembremos que discutir a variação de sinal da função f significa determinar os valores x, do domínio de f, para os quais $f(x)$ é positiva, $f(x)$ é negativa ou $f(x)$ é igual a zero. Analisemos o gráfico:



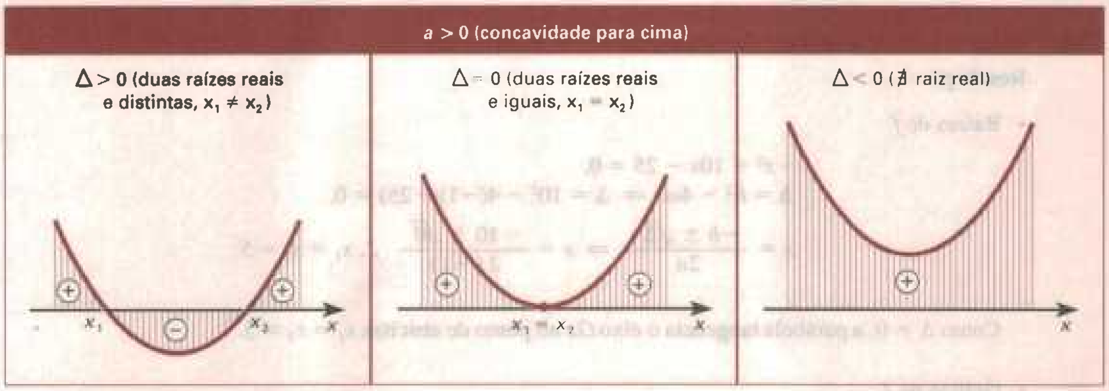
- se $x = 2$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$;
- se $x < 2$ ou $x > 4$, então $f(x) > 0$;
- se $2 < x < 4$, então $f(x) < 0$.

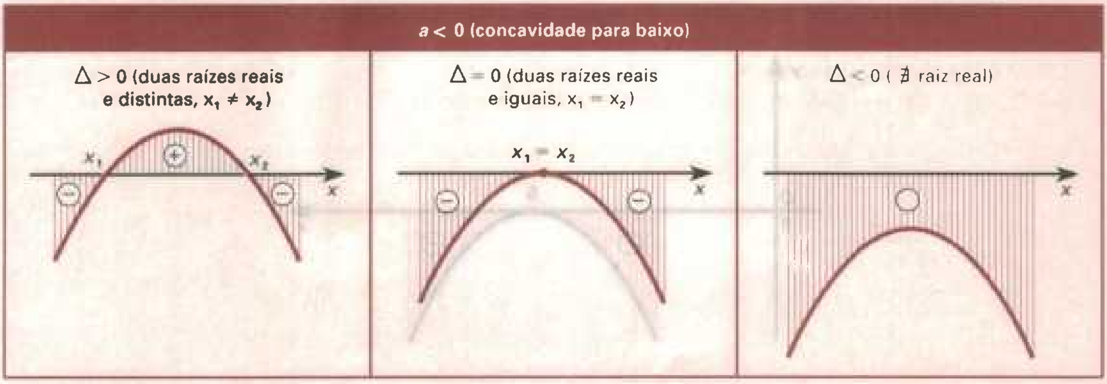
Esse resumo é a variação de sinal da função f, que pode ser representada esquematicamente no eixo real por:


2
4
x
f(x) = x² − 6x + 8
+
−
+

2. Generalização

De modo geral, a discussão da variação de sinal de uma função do 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, recairá sempre em um dos casos seguintes:


a > 0 (concavidade para cima)
Δ > 0 (duas raízes reais e distintas, x₁ ≠ x₂)
Δ = 0 (duas raízes reais e iguais, x₁ = x₂)
Δ < 0 (∄ raiz real)
x₁
x₂
x
x₁ = x₂
+
−


a < 0 (concavidade para baixo)
Δ > 0 (duas raízes reais e distintas, x₁ ≠ x₂)
Δ = 0 (duas raízes reais e iguais, x₁ = x₂)
Δ < 0 (∄ raiz real)
x₁
x₂
x
x₁ = x₂
+
−

Exercícios resolvidos

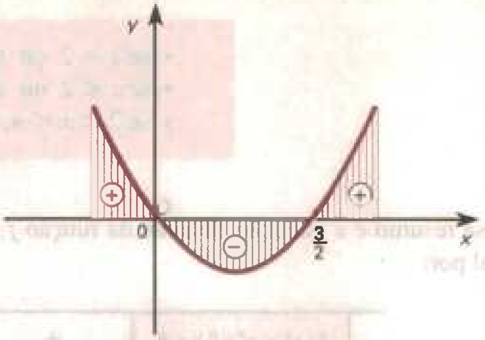
R.1 Discutir a variação de sinal da função $f(x) = 2x^2 - 3x$.

Resolução

- Raízes de f: $2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(2x - 3) = 0 \therefore x_1 = 0, x_2 = \dfrac{3}{2}$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $x_1 = 0$ e $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

- Gráfico de f
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima, conforme gráfico ao lado.
  Logo, temos que:

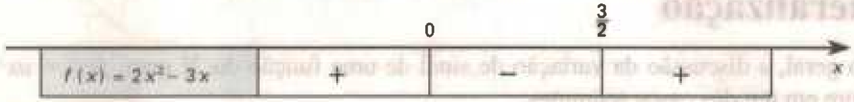


se $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$, então $f(x) = 0$;

se $x < 0$ ou $x > \frac{3}{2}$, então $f(x) > 0$;

se $0 < x < \frac{3}{2}$, então $f(x) < 0$.

Representando esquematicamente a variação de sinal no eixo real, temos:



R.2 Discutir a variação de sinal da função $f(x) = -x^2 + 10x - 25$.

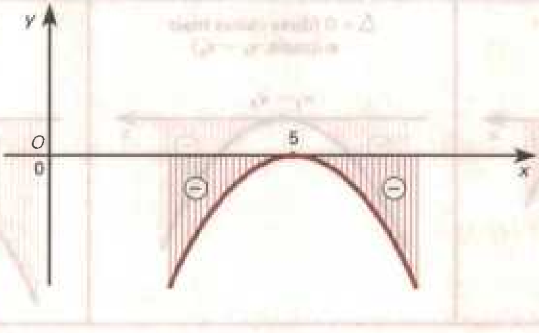
Resolução

- Raízes de f

$$-x^2 + 10x - 25 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 10^2 - 4(-1)(-25) = 0.$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2(-1)} \quad \therefore x_1 = x_2 = 5.$$

Como $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2 = 5$.

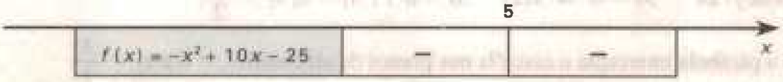
- Gráfico de f
  O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a concavidade da parábola está voltada para baixo:



Logo, temos que:

se $x = 5$, então $f(x) = 0$; se $x \neq 5$, então $f(x) < 0$.

Representando esquematicamente a variação de sinal no eixo real, temos:



[illegible] Discutir a variação de sinal da função $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Resolução

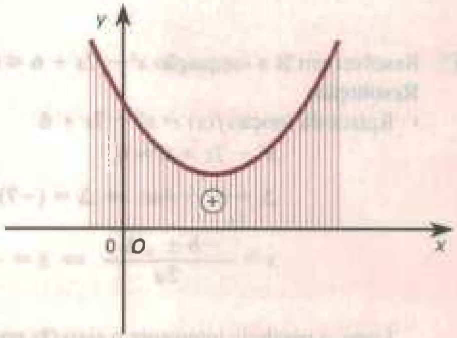
- Raízes de f

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4.$$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais; portanto a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

- Gráfico de f

O coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para cima, conforme gráfico ao lado.

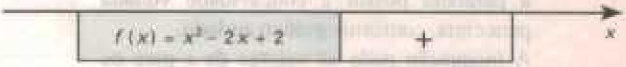


Nota

Não é necessário conhecer a posição exata da parábola, já que o estudo feito nos dá o sinal de f; porém, se você desejar um gráfico mais preciso, pode determinar as coordenadas do vértice e o ponto de intersecção com o eixo Oy.

Pelo gráfico, temos que $f(x) > 0$ para todo x real.

Representando esquematicamente no eixo real, temos:



3. Inequação do 2º grau

Chama-se "inequação do 2º grau" toda inequação que pode ser escrita numa das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \leqslant 0,$$
$$ax^2 + bx + c \neq 0,$$

com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exercícios resolvidos

R4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Resolução

Uma boa maneira de se resolver uma inequação do 2º grau é através do gráfico.

- Raízes da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1(-3) = 16.$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \therefore x_1 = 3, x_2 = -1.$$

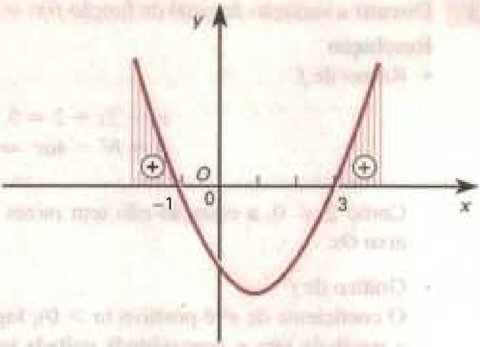
Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$.

- Gráfico de f

  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola possui a concavidade voltada para cima, conforme gráfico ao lado.

  A inequação pede os valores de x para os quais $f(x) > 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 3 > 0$. Essa desigualdade ocorre se, e somente se, $x < -1$ ou $x > 3$. Logo, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}.$$



R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 - 7x + 6 \leq 0$.

Resolução

- Raízes da função $f(x) = x^2 - 7x + 6$

$$x^2 - 7x + 6 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \quad \therefore x_1 = 6, x_2 = 1.$$

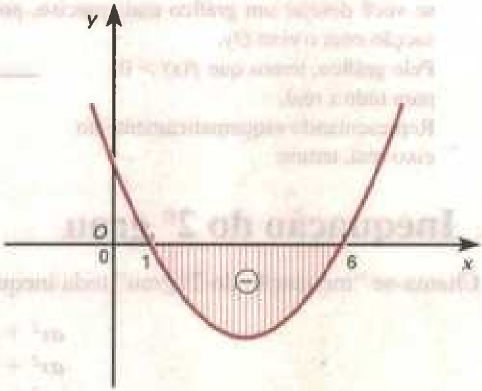
Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 6$ e $x_2 = 1$.

- Gráfico de f

  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola possui a concavidade voltada para cima, conforme gráfico ao lado.

  A inequação pede os valores de x para os quais $f(x) \leq 0$, ou seja, $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Isso acontece se, e somente se, $1 \leq x \leq 6$. Logo, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}.$$



R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $-x^2 + 2x - 5 > 0$.

Resolução

- Raízes da função $f(x) = -x^2 + 2x - 5$

$$-x^2 + 2x - 5 = 0.$$

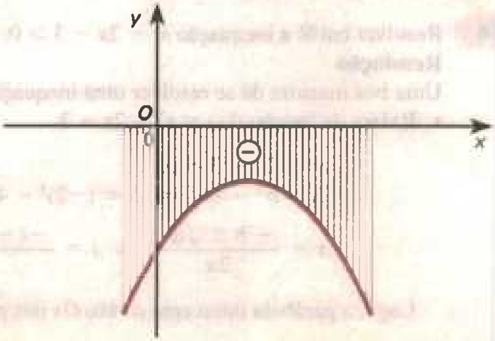
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-1)(-5) = -16.$$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais; portanto a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

- Gráfico de f

  O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola possui a concavidade voltada para baixo, conforme gráfico ao lado.

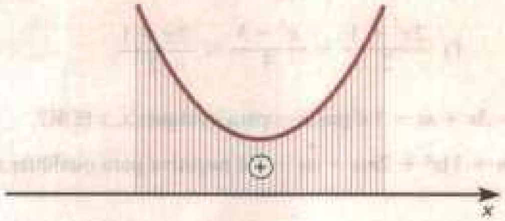
  A inequação pede os valores de x para os quais $f(x) > 0$, ou seja, $-x^2 + 2x - 5 > 0$. Note que essa desigualdade não ocorre para valor algum de x, pois $f(x)$ é negativa para todo x real. Logo, não existe x que satisfaça a inequação e, portanto, $S = \varnothing$.



R.7 Para que valores reais de m a função $f(x) = x^2 - 3x + m$ é positiva para qualquer x real?

Resolução

O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima ($a > 0$). Para que essa função seja positiva para todo x real, a parábola não pode ter ponto em comum com o eixo Ox.



Para que isso ocorra, devemos ter $\Delta < 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1m$$
$$\therefore \Delta = 9 - 4m.$$

Impondo $\Delta < 0$, temos:

$$9 - 4m < 0 \therefore -4m < -9$$
$$\therefore 4m > 9 \therefore m > \frac{9}{4}.$$

Assim, a função f será positiva para todo x real se, e somente se, $m > \frac{9}{4}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até f), B.2 (a até g), B.3 (a, b, c), B.4, C.1, C.3 (a, b).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (g até l), B.2 (h até p), B.3 (d, e, f), B.5, C.2, C.3 (c, d), C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Discuta a variação de sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $y = -x^2 + x + 2$

c) $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

e) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

f) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x - \frac{4}{3}$

g) $y = x^2 - 9x + 20$

h) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

i) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

j) $y = -3x^2 + 2x - \frac{1}{3}$

k) $f(x) = 5x^2 - x + 1$

l) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + x - \frac{4}{3}$

B.2 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações do 2º grau:

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$

b) $3x^2 - 2x \leqslant 0$

c) $-x^2 + x + 12 > 0$

d) $x^2 - 2x + 1 < 0$

e) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$

f) $x^2 - x + 6 > 0$

g) $-\frac{3x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \geqslant 0$

h) $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$

i) $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$

j) $3x^2 - 2x < 0$

k) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

l) $-3x^2 + 4x - \frac{4}{3} \geqslant 0$

m) $2x^2 + 5x + 1 < 0$

n) $-\frac{2x^2}{5} + x - \frac{6}{5} < 0$

o) $x^2 < 9$

p) $x^2 < x$

B.3 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{2} > \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} - 2$

b) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{3x}{2} \leqslant 1 - \frac{x + 10}{4}$

c) $\frac{x + 2}{3} - \frac{x^2 - 4}{2} > -1 - \frac{5x - 2}{6}$

d) $\frac{2x^2 - 6}{3} - \frac{7x - 6}{15} \leqslant \frac{x + 2}{5} + 2$

e) $\frac{x^2 - 1}{7} - \frac{x^2 - 1}{35} + 2 < x$

f) $\frac{2x^2 + 1}{2} - \frac{x^2 - 5}{3} < \frac{2x + 1}{2}$

B.4 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = 4x^2 - 3x + m - 1$ é positiva para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

B.5 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = -(m + 1)x^2 + 2mx - m - 1$ é negativa para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

Exercícios complementares

C.1 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = x^2 + mx + m + 3$ é positiva para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

C.2 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = -x^2 + 2mx + m - 2$ é negativa para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

C.3 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 9x - 8} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}$

C.4 Sabendo que o domínio da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + m}$ é o conjunto $\mathbb{R}$, determine os possíveis valores de m, $m \in \mathbb{R}$.

C.5 Sabendo que o conjunto solução da inequação na variável x: $x^2 - 3x + m + 1 > 0$ é $S = \mathbb{R}$, obtenha os possíveis valores reais de m.

C.6 Para que valores reais de m a inequação $-x^2 - x + 2m - 3 > 0$ tem como conjunto solução o conjunto vazio?

Questões dos vestibulares

V.1 (Vunesp) O conjunto solução da inequação $(x - 2)^2 < 2x - 1$, considerando como universo o conjunto $\mathbb{R}$, está definido por:

a) $1 < x < 5$
b) $3 < x < 5$
c) $2 < x < 4$
d) $1 < x < 4$
e) $2 < x < 5$

V.2 (Cesgranrio) O conjunto dos valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$ é dado por:

a) $p > -9$
b) $p < 11$
c) $p > 11$
d) $p < -9$
e) nenhuma das respostas anteriores.

V.3 (Mackenzie-SP) A desigualdade $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ é verificada para todo número real x, se, e somente se:

a) $-2 < m < -1$
b) $-1 < m < 0$
c) $0 < m < 1$
d) $1 < m < 2$
e) $2 < m < 3$

V.4 (Cescea-SP) Uma condição suficiente para que a expressão $y = \sqrt{x^2 - 4}$ represente uma função real de variável real é que:

a) $-2 < x < 2$
b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$
c) $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$
d) $-1 < x < 3$
e) $x < -2$ ou $x > 0$

V.5 (FGV-SP) Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, onde x e k são reais, seja definida para qualquer valor de x, k deverá ser um número tal que:

a) $k \leqslant 5$
b) $k = 9$
c) $k = 5$
d) $k \leqslant 9$
e) $k \geqslant 9$

Capítulo 24

Aplicação das funções do 2º grau na resolução de uma inequação produto ou de uma inequação quociente

Definimos no capítulo 20 as inequações produto, tais como: $(2x - 1)(x - 4)(1 - x) > 0$,

e as inequações quociente, tais como: $\dfrac{5x - 1}{3 - 2x} \leqslant 0$.

A discussão da variação de sinal de uma função do 2º grau facilita a resolução de muitas inequações como essas, como veremos a seguir.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(x^2 - 4x - 5)(-x^2 + 8x - 15) \geqslant 0$.

Resolução

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 \text{ e } g(x) = -x^2 + 8x - 15,$$

temos:

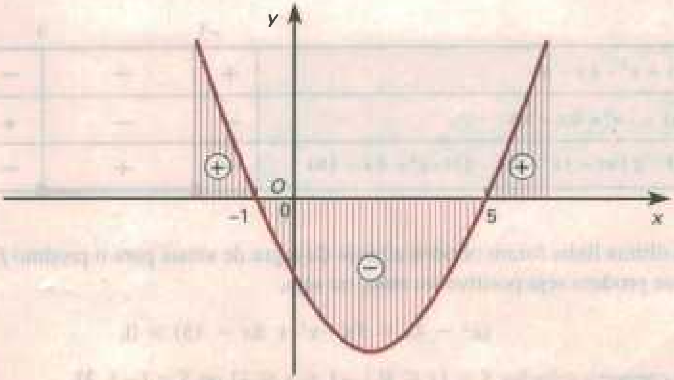
- Raízes de f

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1(-5) = 36.$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \therefore x_1 = 5, x_2 = -1.$$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 5$ e $x_2 = -1$.

- Gráfico de f

Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a concavidade da parábola é voltada para cima:



Portanto a variação de sinal de f é:

		-1		5	
$f(x) = x^2 - 4x - 5$	$+$		$-$		$+$

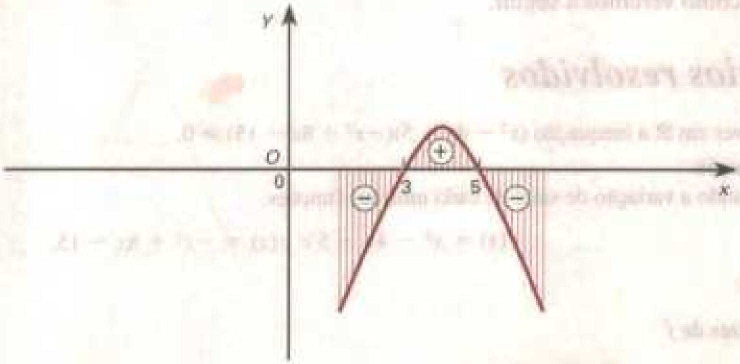
- Raízes de g

$$-x^2 + 8x - 15 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 8^2 - 4(-1)(-15) = 4.$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} \therefore x_1 = 3, x_2 = 5.$$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.

- Gráfico de g

Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a concavidade da parábola é voltada para baixo:



Assim, a variação de sinal de g é:

		3		5	
$g(x) = -x^2 + 8x - 15$	$-$		$+$		$-$

Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e fg, temos:

		-1		3		5	
$f(x) = x^2 - 4x - 5$	$+$		$-$		$-$		$+$
$g(x) = -x^2 + 8x - 15$	$-$		$-$		$+$		$-$
$f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4x - 5)(-x^2 + 8x - 15)$	$-$		$+$		$-$		$-$

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o produto fg. Como a inequação exige que esse produto seja positivo ou nulo, ou seja,

$$(x^2 - 4x - 5)(-x^2 + 8x - 15) \geqslant 0,$$

temos como conjunto solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$ ou $S = [-1, 3]$.

R.2 Resolver em ℝ a inequação $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 25} \geqslant 0$.

Resolução

Condição de existência: $-x^2 + 25 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 25 \therefore x \neq 5$ e $x \neq -5$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 25$, temos:

- Raízes de f

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

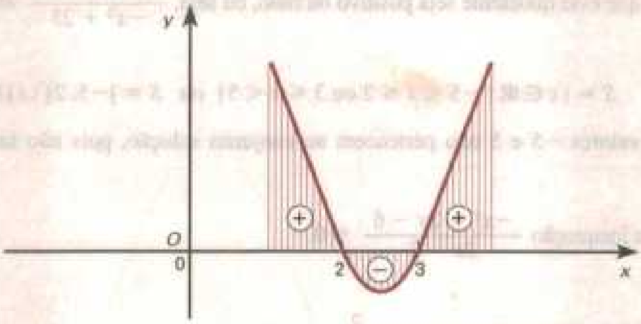
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \therefore x_1 = 3, x_2 = 2.$$

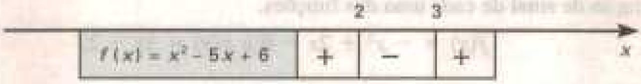
Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

- Gráfico de f

Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a concavidade da parábola é voltada para cima:



Portanto, a variação de sinal de f é:



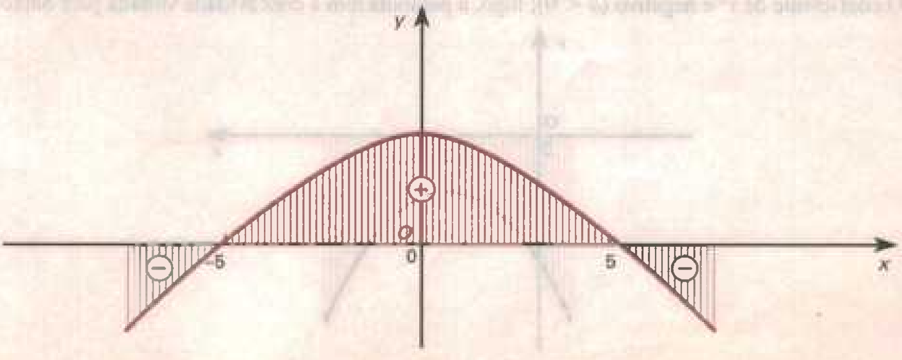
- Raízes de g

$$-x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \therefore x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \therefore x_1 = 5, x_2 = -5.$$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 5$ e $x_2 = -5$.

- Gráfico de g

O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola tem concavidade voltada para baixo:



Assim, a variação de sinal de g é:

−5 5 x

$g(x) = -x^2 + 25$	−	+	−

Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:

−5 2 3 5 x

$f(x) = x^2 - 5x + 6$	+	+	−	+	+
$g(x) = -x^2 + 25$	−	+	+	+	−
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 25}$	−	+	−	+	−

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como a inequação exige que esse quociente seja positivo ou nulo, ou seja, $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 25} \geqslant 0$, temos como conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 2 \text{ ou } 3 \leqslant x < 5\} \quad \text{ou} \quad S =]-5, 2] \cup [3, 5[.$$

Note que os valores −5 e 5 não pertencem ao conjunto solução, pois não satisfazem a condição de existência.

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{-x^2 + 2x - 6}{3x - 2} \leqslant 0$.

Resolução

Condição de existência: $3x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{2}{3}$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções,

$$f(x) = -x^2 + 2x - 6 \text{ e } g(x) = 3x - 2,$$

temos:

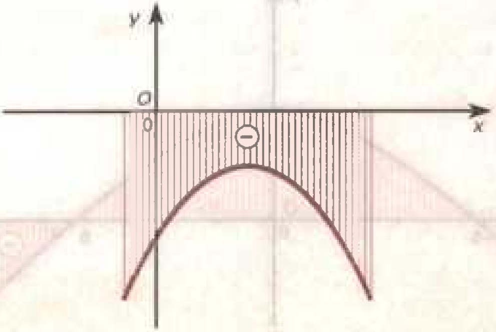
- Raízes de f

$$-x^2 + 2x - 6 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-1)(-6) = -20.$$

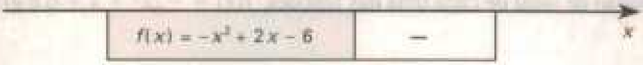
Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais; logo, a parábola não tem ponto comum com o eixo Ox.

- Gráfico de f

O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para baixo:

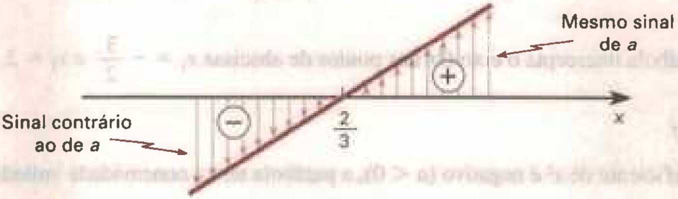


Assim, o quadro de sinais é:

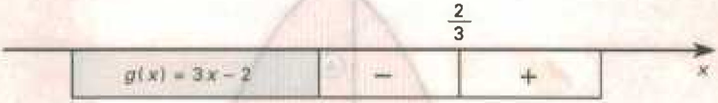


$f(x) = -x^2 + 2x - 6$	$-$

- Raiz de g: $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.
- Variação de sinal de g: $a > 0 \Rightarrow g$ é crescente.

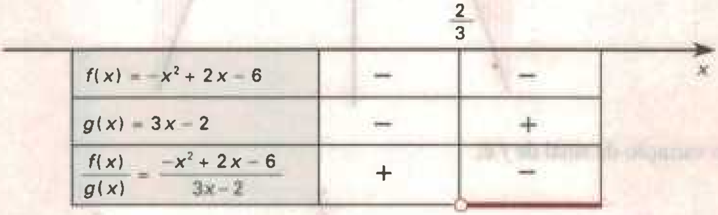


A variação de sinal de g é:



$g(x) = 3x - 2$	$-$	$+$

Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:



$f(x) = -x^2 + 2x - 6$	$-$	$-$
$g(x) = 3x - 2$	$-$	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x^2 + 2x - 6}{3x - 2}$	$+$	$-$

Como a inequação exige que $\frac{f}{g}$ seja negativo ou nulo, isto é, $\frac{-x^2 + 2x - 6}{3x - 2} \leqslant 0$, temos como conjunto solução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\} \text{ ou } S = \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[.$$

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{x + 3}{x} \geqslant x + \frac{1}{2}$.

Resolução

Quando uma inequação do tipo $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$ apresentar a variável no denominador, devemos transformá-la numa outra equivalente com **zero** num dos membros da desigualdade e, a seguir, resolver a inequação quociente assim obtida.

Transformando a inequação dada na equivalente,

$$\frac{x + 3}{x} - x - \frac{1}{2} \geqslant 0,$$

e reduzindo o primeiro membro ao mesmo denominador, recaímos em uma inequação quociente:

$$\frac{2(x + 3) - 2x^2 - x}{2x} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{2x + 6 - 2x^2 - x}{2x} \geqslant 0 \therefore \frac{-2x^2 + x + 6}{2x} \geqslant 0.$$

Condição de existência: $2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = -2x^2 + x + 6$ e $g(x) = 2x$, temos:

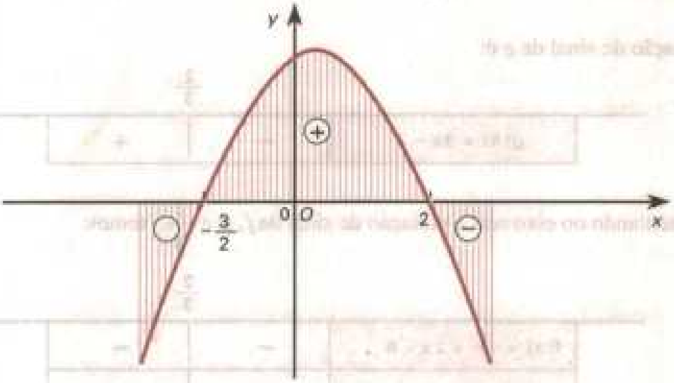
- Raízes de f

$$-2x^2 + x + 6 = 0.$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(-2)(6) = 49.$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(-2)} \therefore x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 2.$$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = -\frac{3}{2}$ e $x_2 = 2$.

- Gráfico de f

Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a parábola tem a concavidade voltada para baixo:

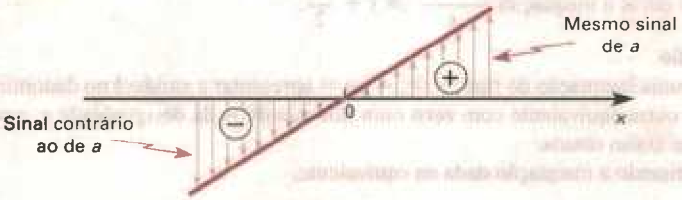


Portanto a variação de sinal de f é:

	$-\frac{3}{2}$		2	
$f(x) = -2x^2 + x + 6$	−		+	−

x

- Raiz de g: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Variação de sinal de g: $a > 0 \Rightarrow g$ é crescente.



Mesmo sinal de a

Sinal contrário ao de a

Assim, a variação de sinal de g é:

		0	
$g(x) = 2x$	−		+

x

Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:

	$-\frac{3}{2}$	0		2
$f(x) = -2x^2 + x + 6$	−	+	+	−
$g(x) = 2x$	−	−	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2x^2 + x + 6}{2x}$	+	−	+	−

Devemos ter $\frac{-2x^2 + x + 6}{2x} \geqslant 0$; logo, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{3}{2} \text{ ou } 0 < x \leqslant 2\right\} \text{ ou } S = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left]0, 2\right].$$

R.5 Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{(1 - x)(x^2 - 4)}{2x - 1}}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto formado por todos os valores reais de x, de modo que $f(x) \in \mathbb{R}$. Para garantir a existência de $f(x)$, basta impormos:

$$\frac{(1 - x)(x^2 - 4)}{2x - 1} \geqslant 0.$$

A condição de existência para a fração $\frac{(1 - x)(x^2 - 4)}{2x - 1}$ é: $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções,

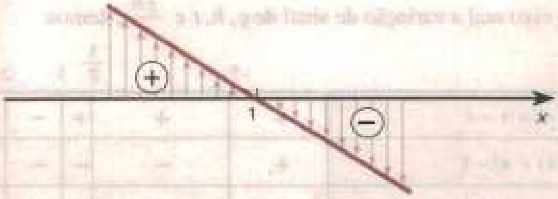
$$g(x) = 1 - x,\ h(x) = x^2 - 4 \text{ e } t(x) = 2x - 1,$$

temos:

- Raiz de g

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

- Variação de sinal de g: $a < 0 \Rightarrow g$ é decrescente.



Logo, temos:

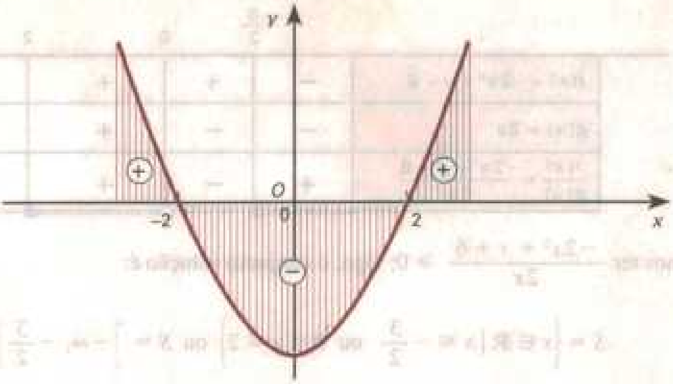
		1
$g(x) = 1 - x$	+	−

- Raízes de h: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \therefore x_1 = 2, x_2 = -2.$

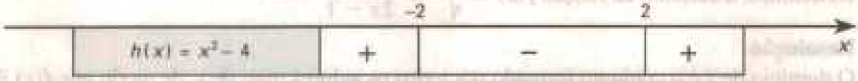
Portanto a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

- **Gráfico de h**

  O coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para cima:

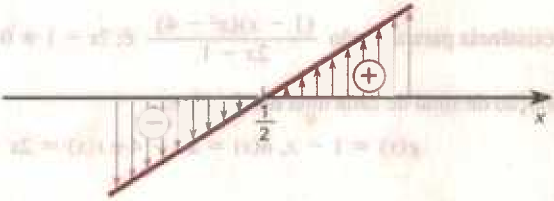


Logo, temos:

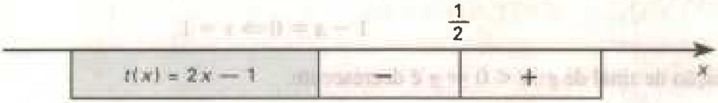


	-2		2	
$h(x) = x^2 - 4$	+	−		+

- Raiz de t: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.
- Variação de sinal de t: $a > 0 \Rightarrow t$ é crescente

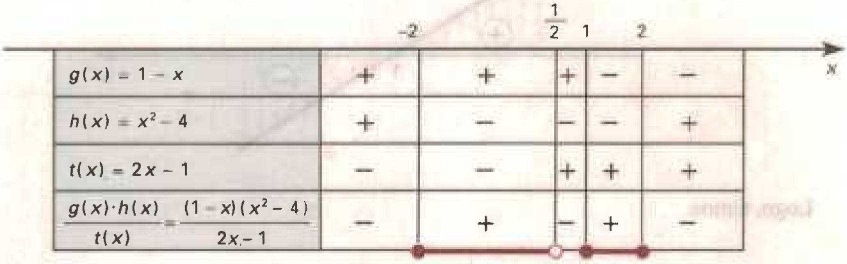


Logo, temos:



	$\frac{1}{2}$	
$t(x) = 2x - 1$	−	+

Representando no eixo real a variação de sinal de g, h, t e $\frac{gh}{t}$, temos:



	$x < -2$	-2 a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a 1	1 a 2	$x > 2$
$g(x) = 1 - x$	+	+	+	−	−
$h(x) = x^2 - 4$	+	−	−	−	+
$t(x) = 2x - 1$	−	−	+	+	+
$\frac{g(x) \cdot h(x)}{t(x)} = \frac{(1 - x)(x^2 - 4)}{2x - 1}$	−	+	−	+	−

Portanto o domínio da função f é: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d), B.2 (a, b, c, d), B.3 (a, b, c), C.1 (a, b, c), C.2 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g, h), B.2 (e, f, g, h), B.3 (d, e, f), C.1 (d, e, f), C.2 (b, c).

Exercícios básicos

B.1 Resolva em IR as inequações:

a) $(x^2 - 8x + 7)(3x^2 - 9) \geqslant 0$

b) $(x^2 - 5x)(2x - 4) < 0$

c) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 2x + 1) \geqslant 0$

d) $(x^2 + 2x + 2)(-x^2 + 2x - 5) < 0$

e) $(x^2 - 8x + 12)(x^2 - 7x + 12) \geqslant 0$

f) $(-3x + 1)(2x^2 - 8) < 0$

g) $(x^2 - 6x + 9)(-x^2 + 2x + 1) > 0$

h) $(x^2 - 6x + 9)(-x^2 + 2x + 1) \geqslant 0$

B.2 Determine, em IR, o conjunto solução de cada uma das inequações.

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 15} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{2x + 4} < 0$

c) $\dfrac{x^2 + 4x + 5}{2x - 6} > 0$

d) $\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{-x^2 - 9} < 0$

e) $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x} \geqslant 0$

f) $\dfrac{4x - 8}{x^2 - 8x + 12} > 0$

g) $\dfrac{1 - x}{-x^2 + 2x - 1} \leqslant 0$

h) $\dfrac{-2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} > 0$

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in$ IR, de modo que:

a) $\dfrac{(2x - 6)(x^2 - 5x + 4)}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$

b) $(x^2 - 9)(3x^2 - 12)(x - 1) < 0$

c) $\dfrac{(3x - 4)(x^2 + 2x + 5)}{-x^2 + 4x - 6} \geqslant 0$

d) $\dfrac{(5x - 1)(x^2 - 3x + 2)}{x - 2} \geqslant 0$

e) $\dfrac{(2x - 3)(x^2 + 9x)}{x^2 + 2x + 1} < 0$

f) $\dfrac{(x^2 + 9)(x^2 - 4x)}{x + 5} \geqslant 0$

Exercícios complementares

C.1 Resolva em IR as inequações:

a) $\dfrac{1 + x}{x} \leqslant \dfrac{4}{2x - 3}$ $\left(\right.$**Sugestão:** escreva a inequação na forma $\dfrac{1 + x}{x} - \dfrac{4}{2x - 3} \leqslant 0.\left.\right)$

b) $\dfrac{x + 3}{x + 1} > \dfrac{2x + 1}{3x - 3}$

c) $\dfrac{1}{x} < x$

d) $x^3 - 3x^2 + 2x \geqslant 0$ (**Sugestão:** coloque x em evidência.)

e) $\dfrac{3 + x^2}{3 - x^2} \leqslant \dfrac{1 + x}{1 - x}$

f) $\dfrac{2}{x} \geqslant 2 + x$

C.2 Determine o domínio de cada uma das funções.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 6x - 10}{-x^2 - 9}}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x^2 + 2x - 1}}$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) O conjunto solução de $(-x^2 + 7x - 15)(x^2 + 1) < 0$ é:

a) $\varnothing$
b) $[3, 5]$
[✓ c) $\mathbb{R}$]
d) $[-1, 1]$
e) $\mathbb{R}_+$

V.2 (Fuvest-SP) De $x^4 - x^3 < 0$ pode-se concluir que:

[✓ a) $0 < x < 1$]
b) $1 < x < 2$
c) $-1 < x < 0$
d) $-2 < x < -1$
e) $x < -1$ ou $x > 1$.

V.3 (UFSE) O conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{(x-3)^2} \leq 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $3 \leq x \leq 4\}$.
[✓ b) $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $3 < x \leq 4\}$.]
c) $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 3\}$.
d) $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 3$ ou $x \geq 4\}$.
e) $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 4\}$.

V.4 (U.F. Uberlândia-MG) Determine o conjunto solução da inequação $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + \dfrac{3x}{2} - 1} > 0$.

V.5 (FGV-SP) Para que $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2 + 2x - 8)}{x^2 + 4x + 3}}$, y real, seja definida, devemos ter:

a) $-4 \leq x < -1$ ou $1 < x < 2$.
[✓ b) $-4 \leq x < -3$ ou $-1 < x \leq 2$ ou $x \geq 3$.]
c) $-3 < x < -1$ ou $2 \leq x \leq 3$.
d) $x < 3$ ou $x > -1$.
e) $x \leq -4$ ou $-3 < x < -1$ ou $2 \leq x \leq 3$.

Capítulo 25

Função definida por mais de uma sentença

1. Conceituação

Um elevador é construído segundo as seguintes especificações:

- para carga de massa menor ou igual a 1 000 kg, são usados cabos de aço de 20 mm de diâmetro.
- para carga de massa x kg, $x > 1000$, são usados cabos de aço de $\frac{x}{50}$ mm de diâmetro.

A função seguinte mostra o diâmetro $f(x)$ de cada cabo, em função da massa x, $f(x)$ em mm e x em kg:

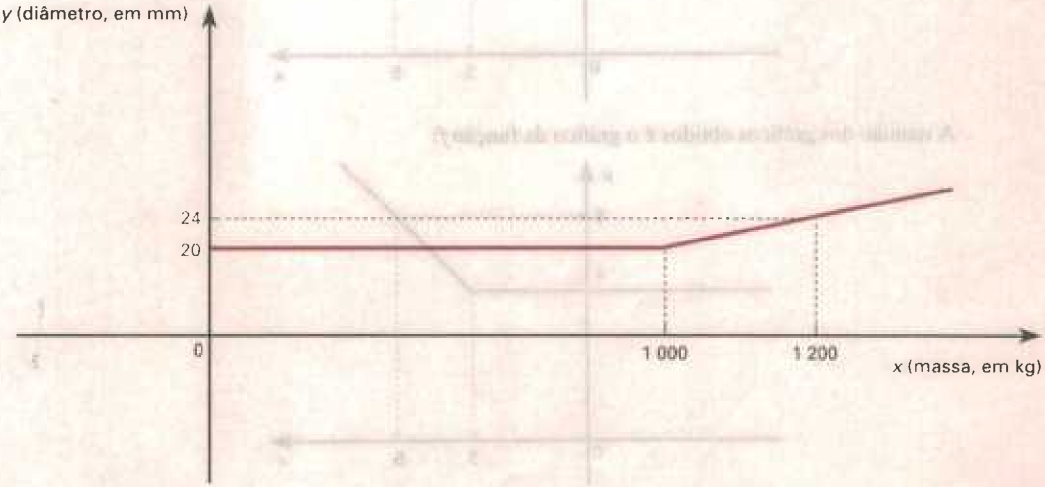
$$f(x) = \begin{cases} 20, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1000 \\ \frac{x}{50}, \text{ se } x > 1000 \end{cases}$$

Note que essa função é definida por duas sentenças:

$$f(x) = 20, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1000;$$

$$f(x) = \frac{x}{50}, \text{ se } x > 1000.$$

O gráfico de f é:



Perceba, por esse exemplo, que nem sempre é possível definir uma função através de uma única sentença $y = f(x)$. Por isso estudaremos neste capítulo as funções definidas por duas ou mais sentenças.

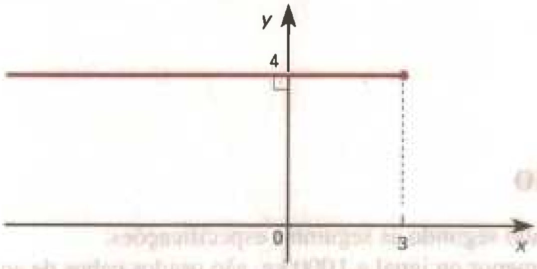
Exercícios resolvidos

R.1 Construir o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x + 1, \text{ se } x > 3 \end{cases}$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Para construir o gráfico, analisamos cada sentença:

1ª) $f(x) = 4$, se $x \leqslant 3$. O gráfico de f, para $x \leqslant 3$, é:

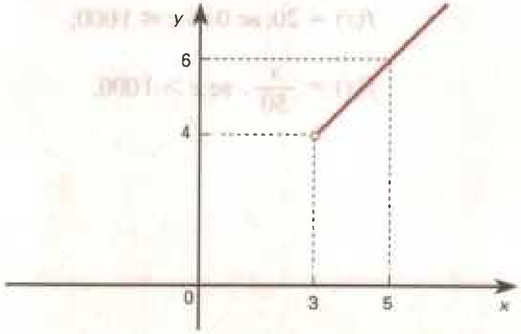


2ª) $f(x) = x + 1$, para $x > 3$

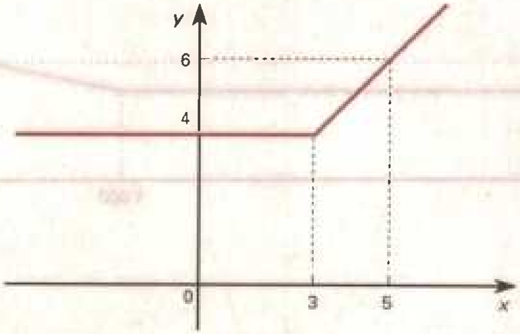
Embora a variável x não possa assumir o valor 3, pois $x > 3$, atribuímos a ela o valor 3 para obtermos um extremo aberto do gráfico.

	$\overbrace{}^{f(x)}$
x	$x + 1$
3	4
5	6

Assim, o gráfico de f para $x > 3$ é:



A reunião dos gráficos obtidos é o gráfico da função f:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

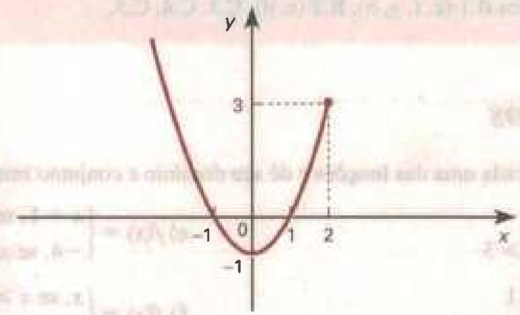
$$D = \mathbb{R} \text{ e } Im = [4, +\infty[.$$

R.2 Construir o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ para } x \leqslant 2 \\ x + 4, \text{ para } x > 2 \end{cases}$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Analisemos cada sentença:

1ª) $f(x) = x^2 - 1$, para $x \leqslant 2$. O gráfico de f, para $x \leqslant 2$, é:

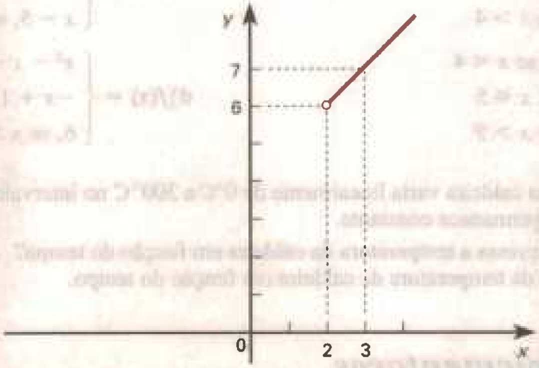


2ª) $f(x) = x + 4$, para $x > 2$.

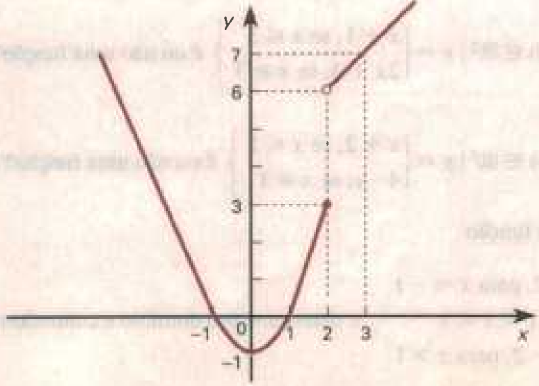
Embora a variável x não possa assumir o valor 2, pois $x > 2$, atribuímos a ela o valor 2, para obtermos um extremo aberto do gráfico.

x	$\overbrace{x + 4}^{f(x)}$
2	6
3	7

O gráfico de f, para $x > 2$, é:



A reunião dos gráficos obtidos é o gráfico da função f:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente: $D = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = [-1, +\infty[$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d), B.2 (a, b), B.3, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g, h), B.2 (c, d), C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Construa o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \leqslant 5 \\ x - 2, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ x + 3, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ se } x \leqslant 3 \\ 6, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x + 4, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -4, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -2x + 1, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x^2 + 5x - 6, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

B.2 Construa o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 \\ x - 1, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, \text{ se } x \leqslant 4 \\ 6, \text{ se } 4 < x \leqslant 5 \\ x + 1, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x + 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 \\ x - 5, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x + 1, \text{ se } 2 < x \leqslant 5 \\ 6, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

B.3 A temperatura de uma caldeira varia linearmente de 0°C a 300°C no intervalo de 0 min a 10 min e, a partir daí, sua temperatura permanece constante.

a) Qual é a lei que expressa a temperatura da caldeira em função do tempo?
b) Construa o gráfico da temperatura da caldeira em função do tempo.

Exercícios complementares

C.1 A relação $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ 2x + 3, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases} \right\}$ é ou não uma função? Por quê?

C.2 A relação $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 4 - x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases} \right\}$ é ou não uma função? Por quê?

C.3 Construa o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, \text{ para } x \leqslant -1 \\ -x, \text{ para } -1 < x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x - 2, \text{ para } x > 1 \end{cases}$$

e determine seu domínio e contradomínio.

C.4 Lembre-se de que duas funções f e g são **idênticas** se, e somente se, têm o mesmo domínio D e $f(x) = g(x)$, $\forall x, x \in D$. Verifique se as funções f e g a seguir são ou não idênticas:

a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2}$

Nota
Duas funções são idênticas se, e somente se, têm o mesmo gráfico. Logo, você pode verificar se f e g são ou não idênticas através dos gráficos.

C.5 Ao nível do mar, um mergulhador é submetido, como todos nós, à pressão de 1 atm. A cada 10 m de profundidade a pressão aumenta de 1 atm. Se esse mergulhador submergir 20 m, à velocidade constante de 10 m por minuto, e lá permanecer por 3 min,

a) qual é a lei que expressa a pressão sofrida pelo mergulhador em função do tempo, desde o instante em que submergiu até o final de 5 min?

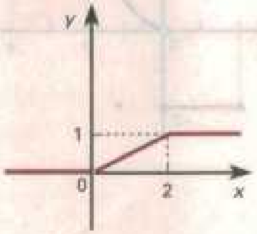
b) qual é o gráfico da função do item (a)?

Questões dos vestibulares

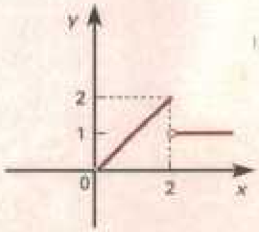
V.1 (FGV-SP) O gráfico da função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{2}, \text{ se } 0 < x \leqslant 2 \\ 1, \text{ se } x > 2 \end{cases} \quad \text{é:}$$

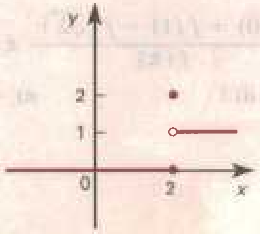
a)



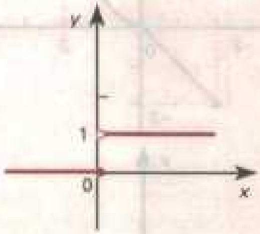
b)



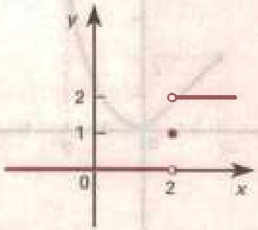
c)



d)



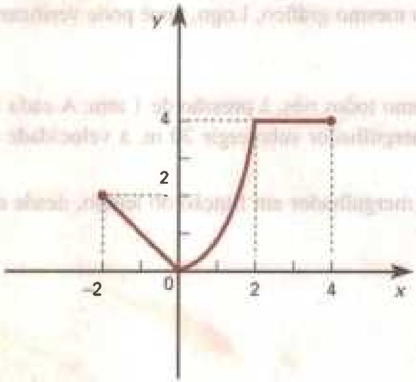
e)



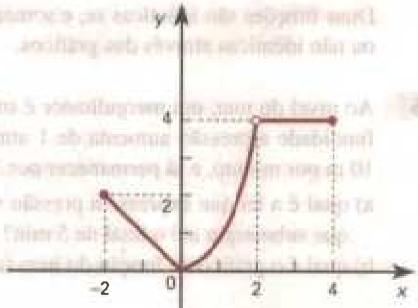
V.2 (U. Uberaba-MG) Seja $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ para } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2, \text{ para } 0 < x \leq 2 \\ 4, \text{ para } 2 < x < 4. \end{cases}$

O gráfico de f é:

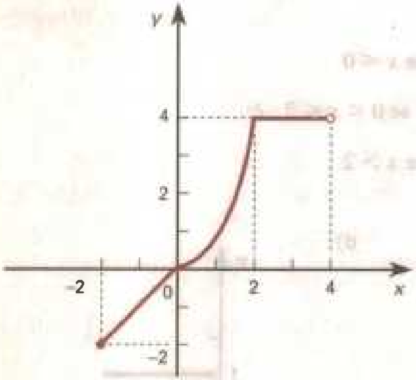
a)



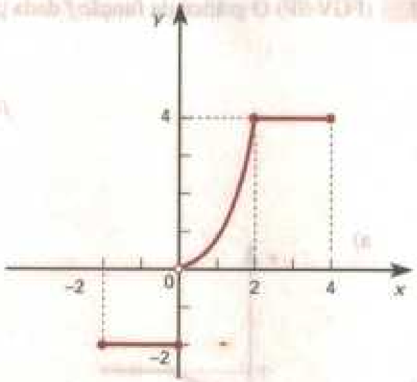
d)



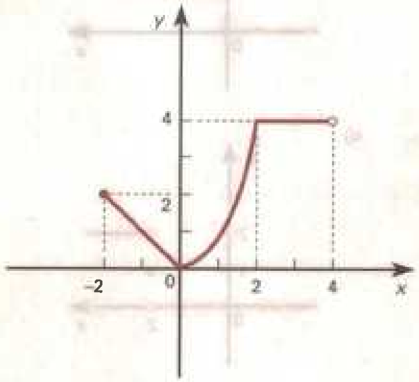
b)



e)



c)



V.3 (Faap-SP) Seja $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é racional} \\ -1, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$. A expressão $E = \dfrac{f(0) + f(1) - f(\sqrt{2})}{f(\pi)}$ é igual a:

a) -2
b) 2
c) -1
d) 1
e) -3

Capítulo 26

O conceito de módulo

1. Distância entre dois pontos do eixo real

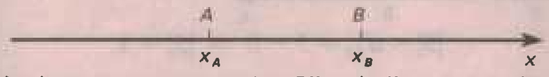
Num dia de inverno o termômetro marcou a temperatura mínima $-5°C$ e a máxima $+6°C$. Dizemos que a variação da temperatura nesse dia foi de $11°C$. Para chegarmos a esse resultado, calculamos a diferença entre a temperatura máxima $+6°C$ e a mínima $-5°C$:

$$+6°C - (-5°C) = +11°C.$$

O cálculo **abscissa máxima menos abscissa mínima** dá origem à definição de **distância entre dois pontos do eixo real**.

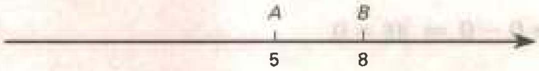
Definição

Sejam A e B dois pontos do eixo real com abscissas x_A e x_B, respectivamente, tal que $x_B \geqslant x_A$:

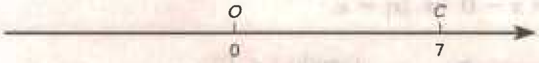


Chama-se "distância entre os pontos A e B", e indica-se por d_{AB} ou d_{BA}, a diferença $x_B - x_A$.

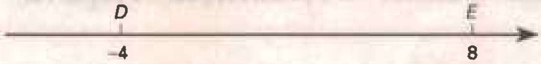
Exemplos

a)


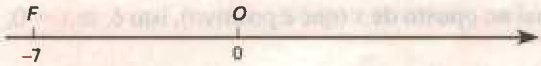
$d_{AB} = 8 - 5 = 3$. **(Note bem: a abscissa maior menos a menor.)**

b)


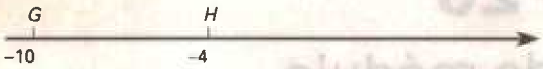
$d_{OC} = 7 - 0 = 7$.

c)


$d_{DE} = 8 - (-4) = 12$. **(Note bem: a abscissa maior menos a menor.)**

d)


$d_{OF} = 0 - (-7) = 7$.

e) 

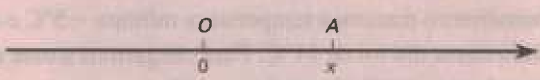
$$d_{GH} = -4 - (-10) = 6.$$

Observe que a distância entre dois pontos é um número real positivo ou nulo.

2. Módulo de um número real

Definição

Considere no eixo real de origem O um ponto A de abscissa x:

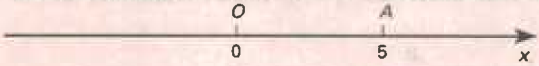


Chama-se "módulo de x", e indica-se por $|x|$, a distância entre os pontos A e O:

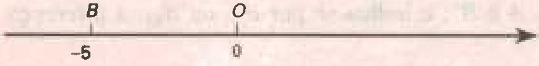
$$|x| = d_{OA}.$$

Note que, como $|x|$ é a distância entre dois pontos, tem-se que $|x|$ é um número real positivo ou nulo.

Exemplos

a) 

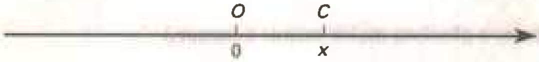
$$|5| = d_{OA} = 5 - 0 \Rightarrow |5| = 5.$$

b) 

$$|-5| = d_{OB} = 0 - (-5) \Rightarrow |-5| = 5.$$

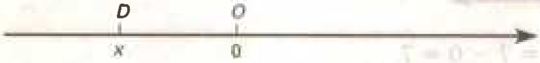
c)

$$|0| = d_{OO} = 0 - 0 \Rightarrow |0| = 0.$$

d) 

(sendo $x > 0$)

$$|x| = d_{OC} = x - 0 \Rightarrow |x| = x.$$

e) 

(sendo $x < 0$)

$|x| = d_{OD} = 0 - x \Rightarrow |x| = -x.$ (Cuidado! O número $-x$ é positivo, pois x é negativo.)

Temos então que:

I. o módulo de um número positivo x é igual ao próprio x, isto é, se $x > 0$, então $|x| = x$;

II. o módulo de um número negativo x é igual **ao oposto de** x (que é positivo), isto é, se $x < 0$, então $|x| = -x$;

III. o módulo de zero é igual ao próprio zero: $|0| = 0$.

Sintetizando as conclusões (I), (II) e (III), podemos dar uma definição algébrica para $|x|$ da seguinte maneira:

$$|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0 \quad \forall x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

a) $\left|\dfrac{8}{3}\right| = \dfrac{8}{3}$ (O módulo de um número positivo é o próprio número.)

b) $|-4| = -(-4) = +4$ (O módulo de um número negativo é o oposto desse número.)

c) $|0| = 0$ (O módulo de zero é o próprio zero; poderíamos dizer também que $|0| = -0$, pois $-0 = 0$.)

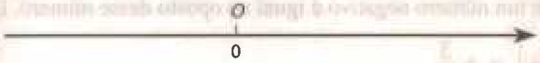
3. Propriedades dos módulos

M.1 $|x| \geq 0,\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}.$

Essa propriedade decorre imediatamente da definição de módulo, pois, sendo uma distância entre dois pontos, o módulo é um número real positivo ou nulo.

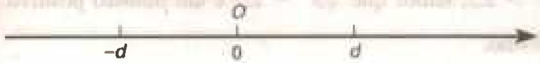
M.2 $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Tal propriedade afirma que existe um único ponto do eixo real que dista **zero** unidade da origem O. É o próprio ponto O:



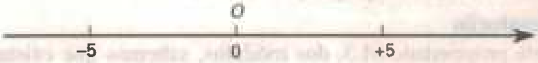
M.3 Sendo $d \in \mathbb{R}_+$, tem-se $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d.$

A propriedade M.2 é uma particularidade da M.3, quando $d = 0$. Para $d > 0$, a propriedade M.3 garante que existem apenas dois pontos distintos do eixo real que distam da origem a distância d. São os pontos de abscissa d e $-d$:



Exemplo

$|x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 5.$



M.4 $|x| \cdot |y| = |xy|,\ \forall \{x, y\},\ \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$

Isto é, o produto dos módulos de dois números é igual ao módulo do produto deles.

Exemplo

$$|-3| \cdot |4| = |-3 \cdot 4|.$$

M.5 $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n$ é par, $\forall x,\ x \in \mathbb{R}$, e $\forall n,\ n \in \mathbb{N}.$

Note que essa propriedade decorre imediatamente da anterior, pois:

- para $n = 0$, temos $|x|^0 = 1 = x^0$;
- para $n \neq 0$, temos: $x^n = \underbrace{|x| \cdot |x| \cdot |x| \cdot \ldots |x|}_{n \text{ fatores}} \underset{\text{Extensão da M.4}}{=} |x \cdot x \cdot x \cdot \ldots x| = |x^n|$. **(I)**

Como n é par, temos $x^n \geq 0$; logo, temos: $|x^n| = x^n$. **(II)**

Por (I) e (II), temos $|x|^n = x^n$ (se n é par).

Exemplos a) $|x|^2 = x^2$ b) $|x|^6 = x^6$

M.6 $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$ $\forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$ e $y \neq 0$.

Isto é, o quociente entre os módulos de dois números é igual ao módulo do quociente entre eles.

Exemplo

$$\frac{|-8|}{|2|} = \left|\frac{-8}{2}\right|.$$

Existem ainda outras propriedades dos módulos, que veremos nos próximos capítulos.

Exercícios resolvidos

R.1 Classificar cada uma das sentenças como V ou F:

a) $|5| = 5$

b) $|0| = 0$

c) $\left|-\frac{3}{4}\right| = -\frac{3}{4}$

d) $|1 - \sqrt{2}\,| = 1 - \sqrt{2}$

e) $|\sqrt{5} - 2{,}2| = \sqrt{5} - 2{,}2$

Resolução

a) V, pois o módulo de um número positivo é igual ao próprio número.

b) V, pois o módulo de zero é igual ao próprio zero (e ao mesmo tempo é igual ao oposto de zero).

c) F, pois o módulo de um número negativo é igual ao oposto desse número. Logo,

$$\left|-\frac{3}{4}\right| = -\left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{3}{4}.$$

d) F, pois, como $1 < \sqrt{2}$, temos que $1 - \sqrt{2}$ é um número negativo. Logo,

$$|1 - \sqrt{2}\,| = -(1 - \sqrt{2}\,) = \sqrt{2} - 1.$$

e) V, pois, como $\sqrt{5} > 2{,}2$, temos que $\sqrt{5} - 2{,}2$ é um número positivo. Logo, o módulo do número $\sqrt{5} - 2{,}2$ é ele mesmo.

R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|x - 3| = 4$.

Resolução

Pela propriedade M.3, dos módulos, sabemos que existem dois e somente dois números cujo módulo é igual a 4. São eles: 4 e -4. Logo, temos:

$$|x - 3| = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \text{ ou } x - 3 = -4$$
$$\therefore x = 7 \text{ ou } x = -1.$$
$$S = \{7, -1\}.$$

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|x| \cdot |x - 5| = 6$.

Resolução

Pela propriedade M.4, dos módulos, temos:

$$|x| \cdot |x - 5| = 6 \Leftrightarrow |x(x - 5)| = 6 \therefore |x^2 - 5x| = 6.$$

Pela propriedade M.3, temos:

$$x^2 - 5x = 6 \text{ ou } x^2 - 5x = -6$$
$$\therefore x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 6$$
$$\text{ou}$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Logo, $S = \{-1, 6, 2, 3\}$.

R.4 Resolver em IR a equação $x^2 - 3|x| - 4 = 0$.

Resolução

Pela propriedade M.5, dos módulos, temos que $x^2 = |x|^2$. Logo, a equação pode ser escrita na forma:

$$|x|^2 - 3|x| - 4 = 0.$$

Fazendo $|x| = t$, temos: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ ou $t = -1$.

Assim, $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$ ou $|x| = -1 \Rightarrow \nexists x$.

Logo, $S = \{4, -4\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4 (a, b, c, d), B.5 (a, b), C.2, (a, b), C.3 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4 (e, f, g), B.5 (c, d), C.2 (c, d), C.3 (b), C.4.

Exercícios básicos

B.1 Classifique cada uma das sentenças abaixo como V ou F:

a) $|8| = 8$
b) $|0| = -0$
c) $|-8| = 8$
d) $|\sqrt{2} - 2| = \sqrt{2} - 2$
e) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$
f) $|\sqrt[3]{10} - 2{,}3| = 2{,}3 - \sqrt[3]{10}$
g) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}| = 0$
h) $|\pi - 3| = \pi - 3$
i) $|\pi - 3{,}14| = 0$
j) $|\pi - 3{,}15| = 3{,}15 - \pi$

B.2 Calcule os valores dos módulos:

a) $\big||\sqrt{3} - 1{,}6| + 1{,}6\big|$
b) $\big||\sqrt{5} - 2{,}4| + \sqrt{5}\big|$
c) $\big||1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|\big|$
d) $\big||\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15|\big|$

B.3 Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $|x| = x$, para todo x, $x \in$ IR.
b) $|x^2| = x^2$, para todo x, $x \in$ IR.
c) $|x^3| = x^3$, para todo x, $x \in$ IR.
d) $|x^4| = x^4$, para todo x, $x \in$ IR.
e) $|ab| = |a| \cdot |b|$, para quaisquer a e b reais.
f) $|a + b| = |a| + |b|$, para quaisquer a e b reais.
g) Existe número real x tal que $|x| = x$ e $|x| = -x$.
h) $|x| \geqslant 0$, para todo x, $x \in$ IR.
i) $|5| \cdot |x| = |5x|$, $\forall x, x \in$ IR.
j) $5|x| = |5x|$, $\forall x, x \in$ IR.
k) $-5 \cdot |x| = |-5x|$, $\forall x, x \in$ IR.
l) $\dfrac{5}{|x|} = \left|\dfrac{5}{x}\right|$, $\forall x, x \in$ IR*.
m) $|x|^4 = x^4$, $\forall x, x \in$ IR.
n) $|x|^5 = x^5$, $\forall x, x \in$ IR.

B.4 Resolva em IR as equações:

a) $|x - 8| = 3$
b) $|2x - 1| = 7$
c) $|3x - 1| = 0$
d) $|x^2 - 2x| = 1$
e) $|x^2 - 5x| = 6$
f) $|x^3 - 4| = 4$
g) $|4x^2 - 3x| = 0$

B.5 Resolva em IR as equações:

a) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$
b) $x^2 - |5x| + 4 = 0$
c) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$
d) $2x^2 - |9x| + 7 = 0$

Exercícios complementares

C.1 Classifique cada uma das sentenças como V ou F:

a) $\left|\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}\right| = \sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$

b) $\left|\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}\right| = \sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$

c) $\left|\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^5 - \left(\sqrt[3]{2^5}\right)^2\right| = 0$

d) $\left|\sqrt[3]{\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt[3]{2}}\right| = 2$

e) $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x, x \in \mathbb{R}$

C.2 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x| \cdot |2x - 1| = 1$

b) $\left|\dfrac{1}{x}\right| \cdot |2x - 3| = 1$

c) $|x + 1| \cdot |x + 4| - 2 = 0$

d) $\left|\dfrac{4}{x - 1}\right| = |2x - 2|$

C.3 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $(x - 3)^2 + |x - 3| - 2 = 0$ **(Sugestão: como $(x - 3)^2 = |x - 3|^2$, faça $|x - 3| = t$.)**

b) $2(3x - 1)^2 - |3x - 1| - 1 = 0$

C.4 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $|x| - |y| = |x - y|, \forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

b) $|x|^n = -x^n, \forall x, x \in \mathbb{R}_-$, e $\forall n$, n ímpar.

c) $(|x| + |y|)^2 - 2|xy| = x^2 + y^2, \forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

d) $\sqrt{|x|} = \left|\sqrt{x}\right|, \forall x, x \in \mathbb{R}$.

e) $\sqrt[3]{|x|} = \left|\sqrt[3]{x}\right|, \forall x, x \in \mathbb{R}$.

f) $|x|^n = |x^n|, \forall x, x \in \mathbb{R}$, e $\forall n, n \in \mathbb{Z}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (F. M. Santa Casa-SP) A soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 2|x| - 8 = 0$ são, respectivamente:

a) 0 e -16. b) 0 e 16. c) 1 e -16. d) 2 e -8. e) -2 e 8.

V.2 (UFCE) A soma dos valores reais de x que satisfazem a igualdade $\dfrac{3|x + 1|}{|x - 1|} = 1$ é:

a) $-\dfrac{5}{2}$ b) $-\dfrac{3}{2}$ c) -5 d) -3 e) n. d. a.

V.3 (PUC-RJ) O conjunto solução da equação $|x - 1| = |x - 1|^2$ em $\mathbb{R}$:

a) possui apenas um elemento.

b) possui exatamente dois elementos.

c) é vazio.

d) possui exatamente três elementos.

e) possui exatamente quatro elementos.

V.4 (Fuvest-SP) Qual o conjunto dos valores assumidos pela expressão $\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{c}{|c|} + \dfrac{abc}{|abc|}$, quando a, b e c variam no conjunto dos números reais não-nulos?

a) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

c) $\{-4, 0, 4\}$

d) $\{4\}$

e) $\mathbb{R}$

Capítulo 27

Função modular

1. Conceituação

Consideremos a função: $f(x) = |x|$. Pela definição de módulo, sabemos que $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0. \end{cases}$

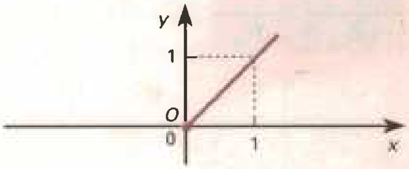
Logo, $f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0. \end{cases}$

Analisando cada sentença da função f, temos:

1ª) $f(x) = x$, se $x \geqslant 0$

x	$\overbrace{x}^{f(x)}$
0	0
1	1

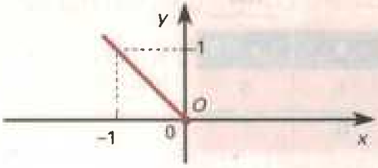
O gráfico de f, para $x \geqslant 0$, é:



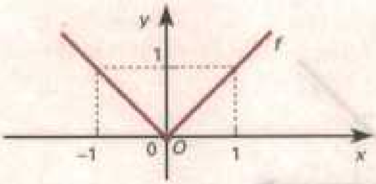
2ª) $f(x) = -x$, se $x \leqslant 0$

x	$\overbrace{-x}^{f(x)}$
0	0
−1	1

O gráfico de f, para $x \leqslant 0$, é:



A reunião dos gráficos obtidos é o gráfico da função f:



Note que o domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[.$$

A função $f(x) = |x|$ é chamada de **função modular**.

Exercício resolvido

R.1 Construir o gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Para construir o gráfico de f, vamos transformá-la numa função dada por duas sentenças. Sabemos que:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x - 1 \geqslant 0 \\ -(x - 1), \text{ se } x - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x \leqslant 1. \end{cases}$$

Assim, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x \leqslant 1. \end{cases}$$

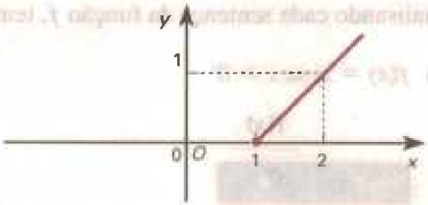
Analisando cada sentença de f, temos:

1ª) $f(x) = x - 1$, se $x \geqslant 1$

f(x)

x	$x - 1$
1	0
2	1

O gráfico de f, para $x \geqslant 1$, é:

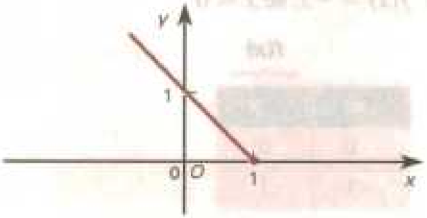


2ª) $f(x) = -x + 1$, para $x \leqslant 1$

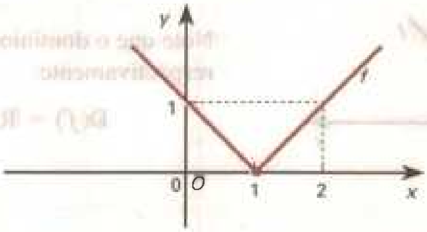
f(x)

x	$-x + 1$
1	0
0	1

O gráfico de f, para $x \leqslant 1$, é:



A reunião dos gráficos obtidos é o gráfico da função f:

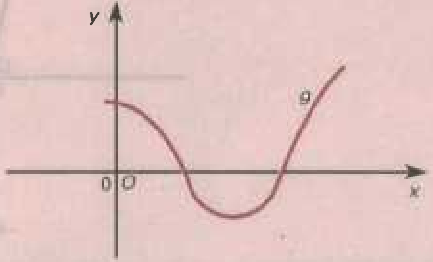


O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty[$.

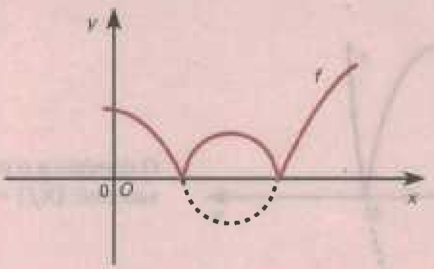
Regra prática

Para construirmos o gráfico de uma função f do tipo $f(x) = |g(x)|$, executamos os seguintes passos:

1º) construímos o gráfico da função g:



2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos os de **ordenadas negativas** em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f:



Exercícios resolvidos

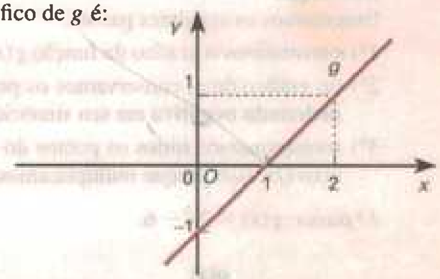
R.2 Construir o gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ utilizando a regra prática.

Resolução

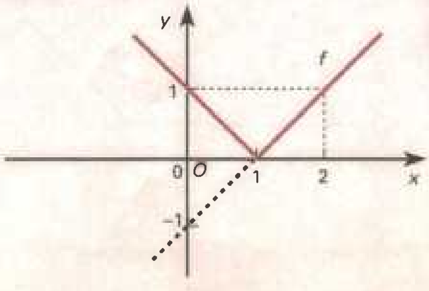
Inicialmente construímos o gráfico da função $g(x) = x - 1$.

	$g(x)$
x	$x - 1$
0	−1
2	1

O gráfico de g é:



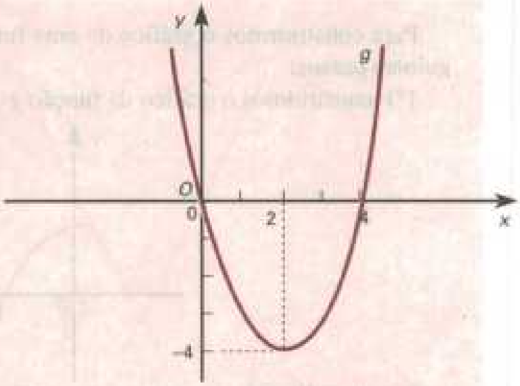
A seguir, no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** em seu simétrico em relação ao eixo Ox, obtendo assim o gráfico da função f:



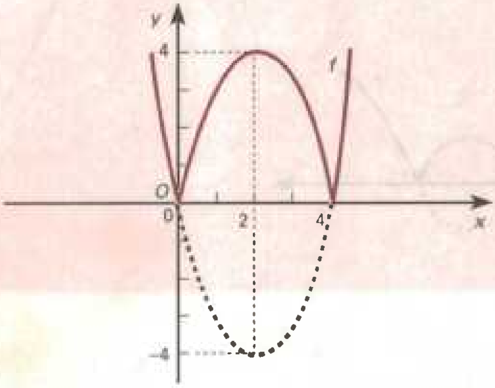
R.3 Construir o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x|$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Utilizando a regra prática, vamos inicialmente construir o gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x$.
Observe ao lado o gráfico de g.



A seguir, no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** em seu simétrico em relação ao eixo Ox, obtendo assim o gráfico de f:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty[$.

R.4 Construir o gráfico da função $f(x) = -|2x - 6|$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Executamos os seguintes passos:

1º) construímos o gráfico da função $g(x) = 2x - 6$;

2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** em seu simétrico em relação ao eixo Ox;

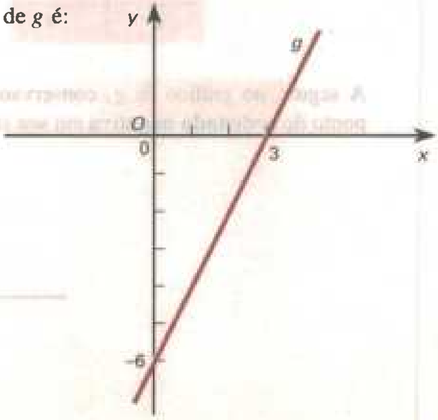
3º) transformamos **todos** os pontos do gráfico obtido no passo anterior em seus simétricos em relação ao eixo Ox; isso porque multiplicamos por −1 a ordenada de cada ponto do gráfico anterior.

1º passo: $g(x) = 2x - 6$.

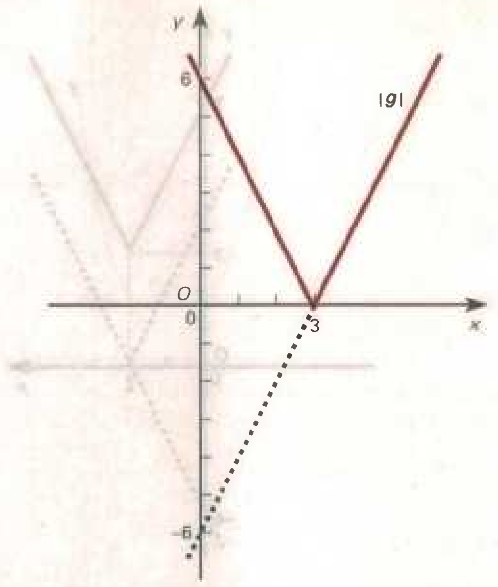
g(x)

x	2x − 6
0	−6
3	0

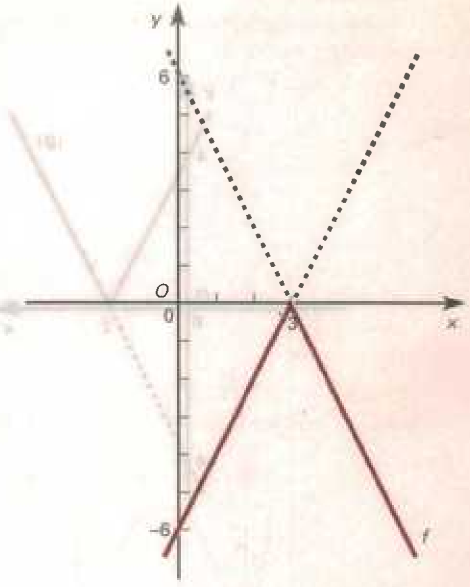
O gráfico de g é:



2º passo:



3º passo: finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = -|2x - 6|$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) =]-\infty, 0].$$

R.5 Construir o gráfico da função $f(x) = |2x - 4| + 3$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Executamos os seguintes passos:

1º) construímos o gráfico da função $g(x) = 2x - 4$;

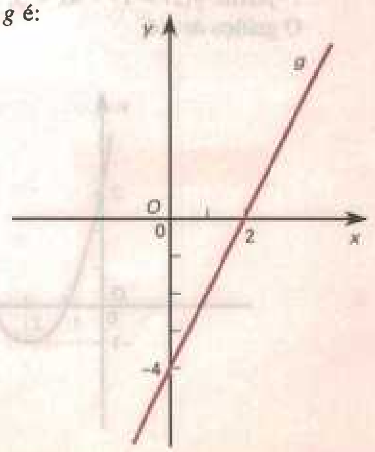
2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** no seu simétrico em relação ao eixo Ox;

3º) transladamos o gráfico, paralelamente do eixo Oy, 3 unidades para "cima". Isso porque vamos somar 3 unidades à ordenada de cada ponto da função obtida no passo anterior.

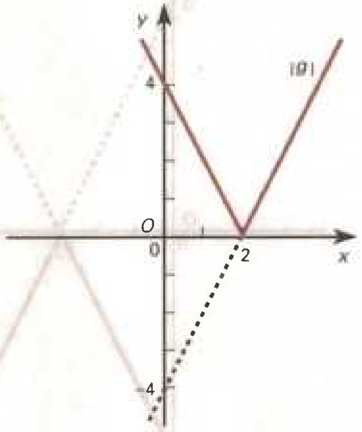
1º passo: $g(x) = 2x - 4$.

	$g(x)$
x	$2x - 4$
0	−4
2	0

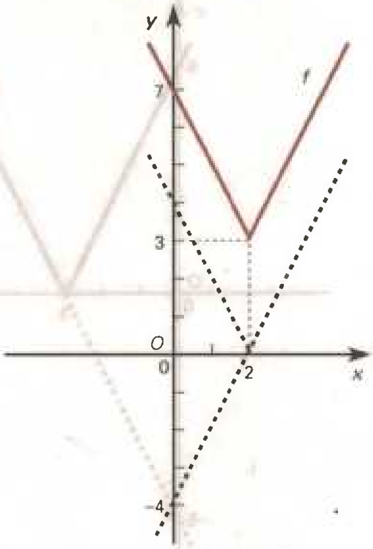
O gráfico de g é:



2º passo:



3º passo: finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = |2x - 4| + 3$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) = [3, +\infty[.$$

R.6 Construir o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Executamos os seguintes passos:

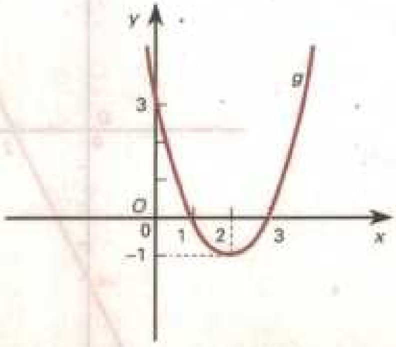
1º) construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$;

2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** no seu simétrico em relação ao eixo Ox;

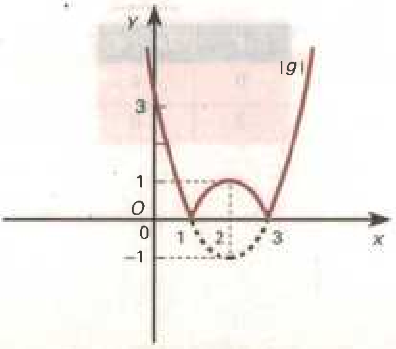
3º) transladamos o gráfico, paralelamente ao eixo Oy, 2 unidades para "baixo". Isso porque vamos subtrair 2 unidades da ordenada de cada ponto da função obtida no passo anterior.

1º passo: $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

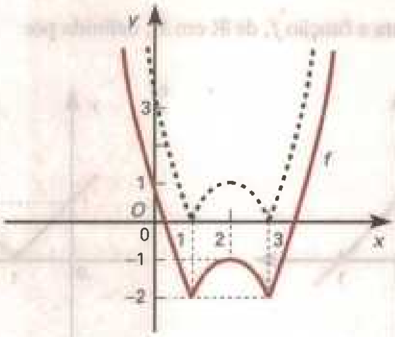
O gráfico de g é:



2º passo:



3º passo: finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-2, +\infty[$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até f), B.2 (a, b, c, d), B.3 (a, b), C.1 (a, b, c, d).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (de g até k), B.2 (e, f, g, h), B.3 (c, d), C.1 (e, f, g, h), C.2.

Exercícios básicos

B.1 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

a) $y = |2x - 1|$
b) $f(x) = |-3x + 6|$
c) $f(x) = |2x^2 - 4x|$
d) $y = |-x^2 + 2x - 2|$
e) $f(x) = -|3x + 1|$
f) $f(x) = -|x^2 - 5x + 6|$
g) $y = |3x|$
h) $f(x) = -|2x + 8|$
i) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
j) $y = |x^2 + 4x + 6|$
k) $f(x) = -|x^2 - 2x|$

B.2 Esboce o gráfico e dê o domínio e o conjunto imagem de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = |2x - 6| + 3$
b) $y = |-x + 2| - 3$
c) $f(x) = |2x^2 - 2x| + 4$
d) $f(x) = |-x^2 + 9| + 2$
e) $y = |3x - 1| - 2$
f) $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 1$
g) $y = |-x^2 + 2x + 8| - 8$
h) $f(x) = |1 + x^2| - 2$

B.3 Determine o gráfico, o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

a) $f(x) = 2 - |3x - 6|$ (**Sugestão:** construa o gráfico da função $g(x) = -|3x - 6|$ e translade-o, paralelamente ao eixo Oy, duas unidades para cima.)
b) $f(x) = -2 - |3x^2 - 9x|$
c) $f(x) = 4 - |3x - 1|$
d) $y = -1 - |3x^2 - 12|$

Exercícios complementares

C.1 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

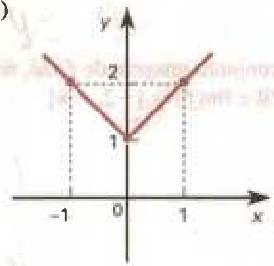
a) $f(x) = 3|2x - 4|$ (**Sugestão:** como $3 = |3|$, temos que: $f(x) = |3| \cdot |2x - 4| = |3(2x - 4)|$.)
b) $f(x) = (-2) \cdot |3x + 1|$
c) $f(x) = |x| \cdot |3x - 6|$
d) $f(x) = \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right|$
e) $f(x) = 3|2x - 1| + 2$
f) $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 1| - 4$
g) $f(x) = 4 - 3|x - 1|$
h) $f(x) = 2 - |x| \cdot |2x - 4|$

C.2 Construa o gráfico da função $f(x) = |2x - 8|$ e determine os valores de x para os quais $f(x) \leq 2$.

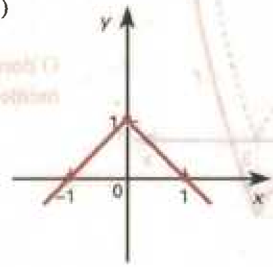
Questões dos vestibulares

V.1 (UFSE) Das figuras seguintes, a que melhor representa a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x| + 1$, é:

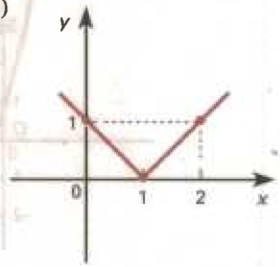
a)



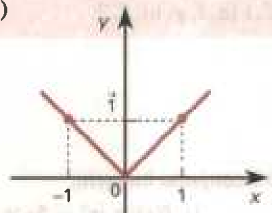
c)



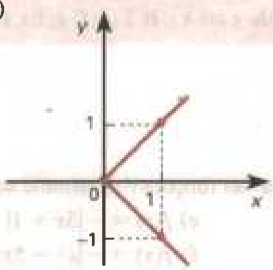
e)



b)

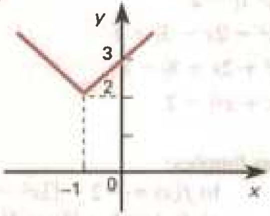


d)

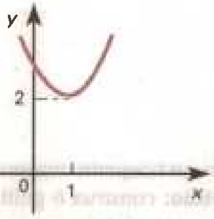


V.2 (Mackenzie-SP) O gráfico da relação $y = |x - 1| + 2$ é:

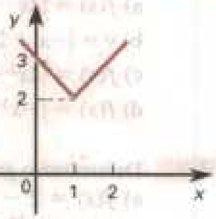
a)



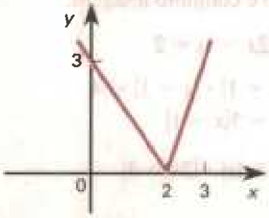
c)



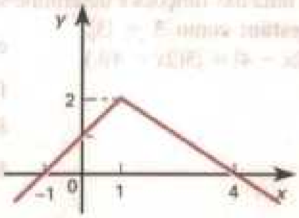
e)



b)

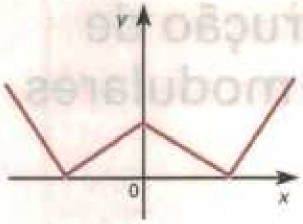


d)

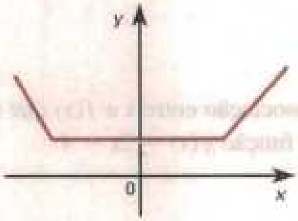


V.3 (Cescem-SP) O gráfico de $y = |x| - 2$ é:

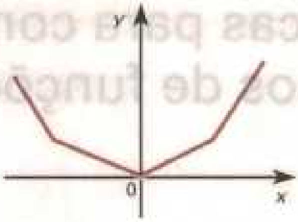
a)



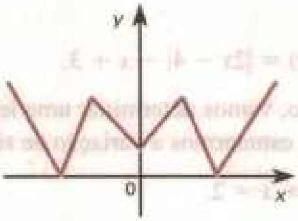
b)



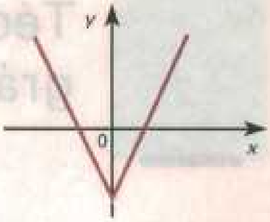
c)



d)

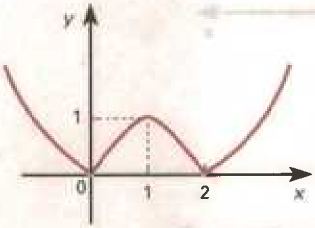


e)

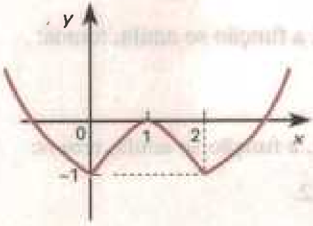


V.4 (Vunesp) O gráfico da função $f(x) = |x^2 - 2x| - 1$ é:

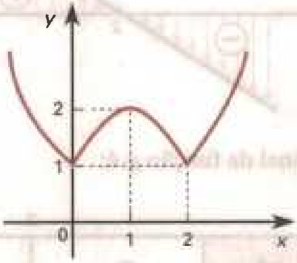
a)



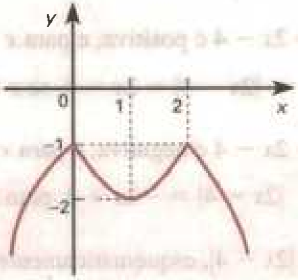
b)



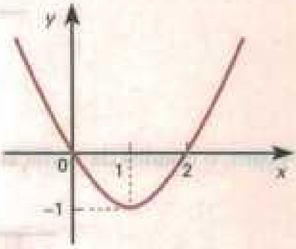
c)



d)



e)



Capítulo 28

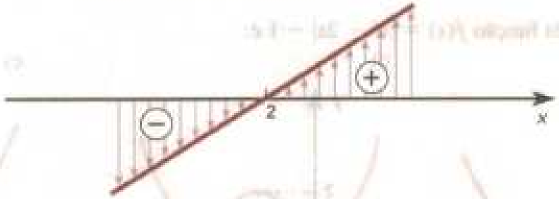
Técnicas para construção de gráficos de funções modulares

1. Conceituação

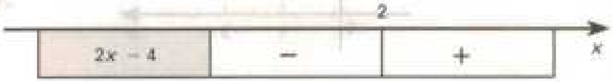
Consideremos a função: $f(x) = |2x - 4| - x + 3$.

Para construirmos o seu gráfico, vamos determinar uma lei de associação entre x e $f(x)$ que não apresente módulo. Basta, para isso, estudarmos a variação de sinal da função $g(x) = 2x - 4$:

- Raiz de g: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- Variação de sinal de g: $a > 0 \Rightarrow g$ é crescente.



Assim, o quadro da variação de sinal da função g é:



Observando que:

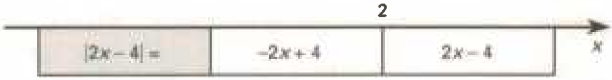
- para $x > 2$, a função $f(x) = 2x - 4$ é positiva, e para $x = 2$, a função se anula, temos:

$$|2x - 4| = 2x - 4, \text{ se } x \geqslant 2.$$

- para $x < 2$, a função $f(x) = 2x - 4$ é negativa, e para $x = 2$, a função se anula, temos:

$$|2x - 4| = -2x + 4, \text{ para } x \leqslant 2.$$

Podemos descrever os valores do $|2x - 4|$, esquematicamente, pelo quadro:



Esse esquema está indicando que:

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -2x + 4, \text{ se } x \leqslant 2. \end{cases}$$

Somando $-x + 3$ a cada expressão do quadro anterior, teremos a função f dada por duas sentenças:

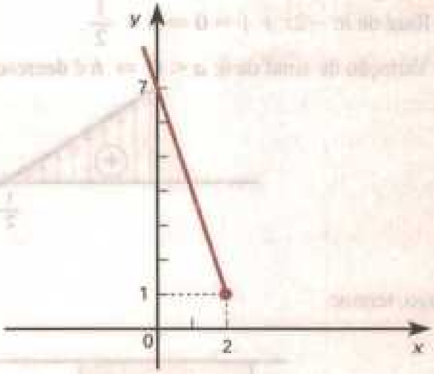
		2	x
⊕	$\|2x - 4\| =$	$-2x + 4$	$2x - 4$
	$-x + 3 =$	$-x + 3$	$-x + 3$
⊖	$\|2x - 4\| - x + 3 =$	$-3x + 7$	$x - 1$

Logo, temos que: $f(x) = |2x - 4| - x + 3 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -3x + 7, \text{ se } x \leq 2 \\ x - 1, \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$

Analisando cada sentença de f, temos:

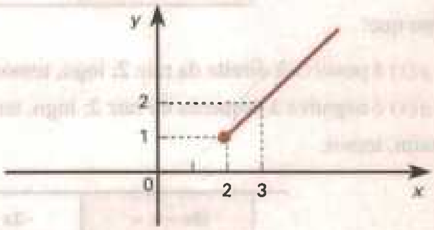
1ª) $f(x) = -3x + 7$, se $x \leq 2$

x	$\overbrace{-3x + 7}^{f(x)}$
0	7
2	1

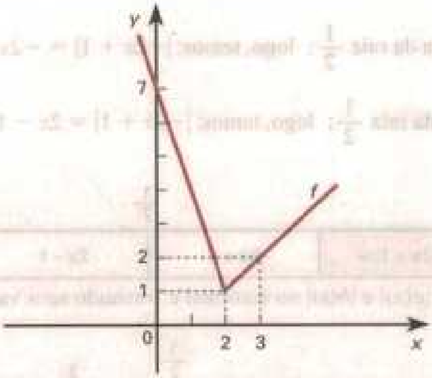


2ª) $f(x) = x - 1$, se $x \geq 2$

x	$\overbrace{x - 1}^{f(x)}$
2	1
3	2



A reunião dos gráficos obtidos é o gráfico da função f:



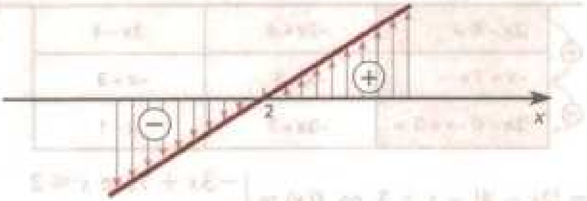
Exercícios resolvidos

R.1 Construir o gráfico da função $f(x) = |3x - 6| + |-2x + 1|$.

Resolução

Inicialmente estudamos a variação de sinal de: $g(x) = 3x - 6$ e de $h(x) = -2x + 1$.

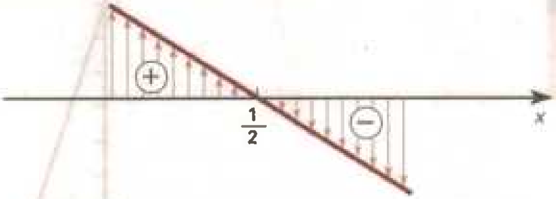
- Raiz de g: $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- Variação de sinal de g: $a > 0 \Rightarrow g$ é crescente.



Logo, temos:

		2
$g(x) = 3x - 6$	−	+

- Raiz de h: $-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.
- Variação de sinal de h: $a < 0 \Rightarrow h$ é decrescente.



Logo, temos:

		$\frac{1}{2}$
$h(x) = -2x + 1$	+	−

Note que:

- $g(x)$ é positiva à direita da raiz 2; logo, temos: $|3x - 6| = 3x - 6$, para $x \geqslant 2$;
- $g(x)$ é negativa à esquerda da raiz 2; logo, temos: $|3x - 6| = -3x + 6$, para $x \leqslant 2$.

Assim, temos:

		2
$\|3x - 6\| =$	$-3x + 6$	$3x - 6$

Note, ainda, que:

- $h(x)$ é positiva à esquerda da raiz $\frac{1}{2}$; logo, temos: $|-2x + 1| = -2x + 1$ para $x \leqslant \frac{1}{2}$;
- $h(x)$ é negativa à direita da raiz $\frac{1}{2}$; logo, temos: $|-2x + 1| = 2x - 1$ para $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Assim, temos:

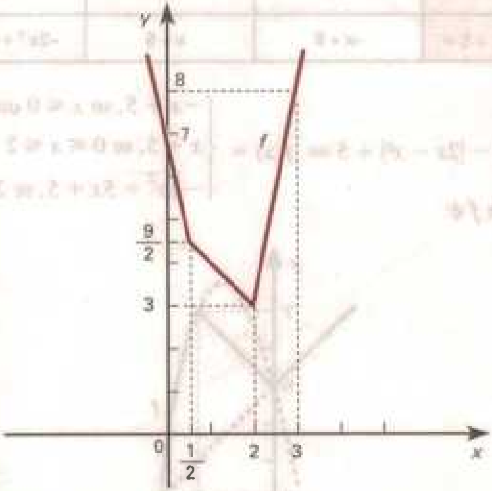
		$\frac{1}{2}$
$\|-2x + 1\| =$	$-2x + 1$	$2x - 1$

Descrevendo os valores de $|g(x)|$ e $|h(x)|$ no eixo real e somando seus valores (pois $f(x) = |g(x)| + |h(x)|$), temos:

		$\frac{1}{2}$	2
$\|3x - 6\| =$	$-3x + 6$	$-3x + 6$	$3x - 6$
$\|-2x + 1\| =$	$-2x + 1$	$2x - 1$	$2x - 1$
$\|3x - 6\| + \|-2x + 1\| =$	$-5x + 7$	$-x + 5$	$5x - 7$

Temos, então: $f(x) = |3x - 6| + |-2x + 1| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -5x + 7, \text{ se } x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ -x + 5, \text{ se } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ 5x - 7, \text{ se } x \geqslant 2. \end{cases}$

Finalmente, o gráfico de f é:

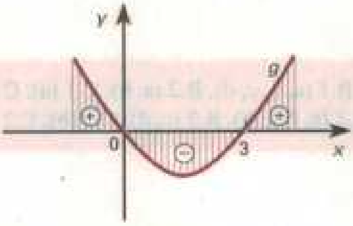


[illegible] Construir o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 3x| - |2x - x^2| + 5$.

Resolução

Estudamos a variação de sinal das funções $g(x) = x^2 - 3x$ e $h(x) = 2x - x^2$.

O gráfico de $g(x) = x^2 - 3x$ é:



0 3

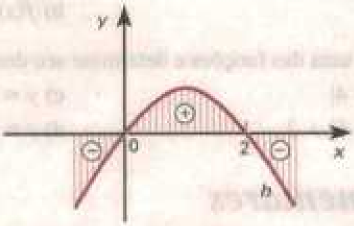
$x^2 - 3x$	+	−	+

⇒

0 3

$\lvert x^2 - 3x \rvert =$	$x^2 - 3x$	$-x^2 + 3x$	$x^2 - 3x$

O gráfico de $h(x) = -x^2 + 2x$ é:



0 2

$-x^2 + 2x$	−	+	−

⇒

0 2

$\lvert -x^2 + 2x \rvert =$	$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$

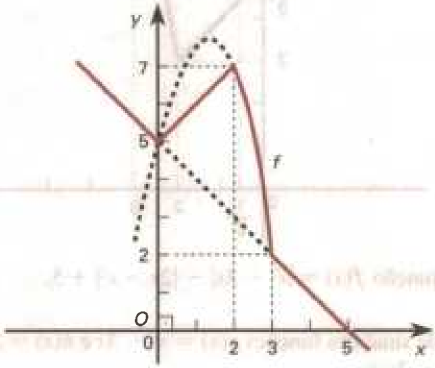
Descrevendo no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$, da função constante $k(x) = 5$ e construindo a função $f(x) = |g(x)| - |h(x)| + 5$, temos:

0 2 3 x

$\|x^2 - 3x\| =$	$x^2 - 3x$	$-x^2 + 3x$	$-x^2 + 3x$	$x^2 - 3x$
⊖ $\|2x - x^2\| =$	$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$
⊕ $5 =$	5	5	5	5
⊖ $\|x^2 - 3x\| - \|2x - x^2\| + 5 =$	$-x + 5$	$x + 5$	$-2x^2 + 5x + 5$	$-x + 5$

$$\text{Então: } f(x) = |x^2 - 3x| - |2x - x^2| + 5 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x + 5, \text{ se } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3 \\ x + 5, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2x^2 + 5x + 5, \text{ se } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de f é:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d), B.2 (a, b), C.1 (a), C.2 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g, h), B.2 (c, d), C.1 (b), C.2 (b).

Exercícios básicos

B.1 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = |3x + 6| + 2x - 3$
b) $y = |x^2 - 3x| + x + 1$
c) $f(x) = -x + 2 - |x - 8|$
d) $y = 3x^2 - |4x^2 - x|$
e) $f(x) = |5x + 5| + 3x - 1$
f) $f(x) = |x^2 - 4x + 4| + x - 1$
g) $y = 2x - 1 - |3x + 1|$
h) $f(x) = 2x^2 + 1 - |4x^2 + x + 4|$

B.2 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = |3x - 1| + |4x - 4|$
b) $f(x) = |2x - 5| - |2x - 6| + 2$
c) $y = |x^2 - 3x| - |x^2 - x|$
d) $y = |2x - 4| + |6x - 1|$

Exercícios complementares

C.1 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = 3|x + 3| - |1 - x| + 4$ (**Sugestão:** como $|3| = 3$, a função f pode ser escrita sob a forma: $f(x) = |3| \cdot |x + 3| - |1 - x| + 4 \Rightarrow f(x) = |3x + 9| - |1 - x| + 4$.)
b) $y = 2|x^2 - 1| - |x| \cdot |2x + 1| - 2$

Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = \left|-2x^2 + |2x^2 - 8|\right| - 3$ (**Sugestão:** dê os seguintes passos: • construa o gráfico da função $g(x) = -2x^2 + |2x^2 - 8|$; • transforme cada ponto de ordenada negativa do gráfico de g no seu simétrico em relação ao eixo Ox; • translade, paralelamente ao eixo Oy, 3 unidades para baixo o gráfico da função $|g|$ obtida no passo anterior.)

b) $f(x) = \left|x^2 - 7 + |x^2 - 1|\right| + 3$

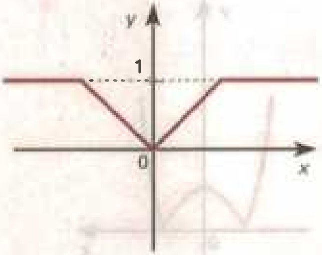
Questões dos vestibulares

V.1 (Unisinos-RS) Dentre os gráficos seguintes, o que representa a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x| + 1$ é:

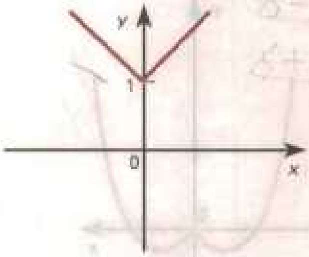
$x - x + 1 = 1$

$x + x + 1$

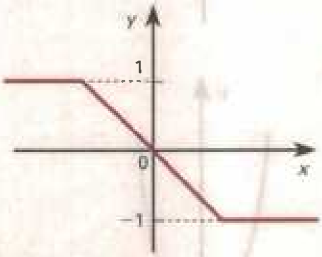
a)



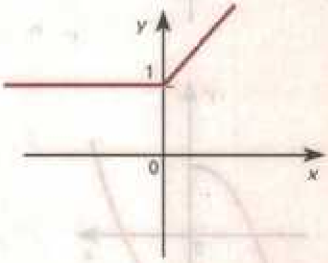
d)



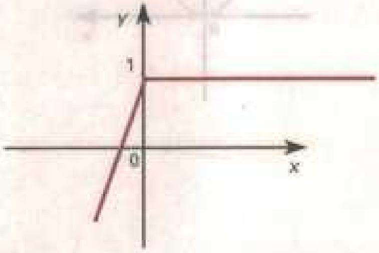
b)



e)



c)

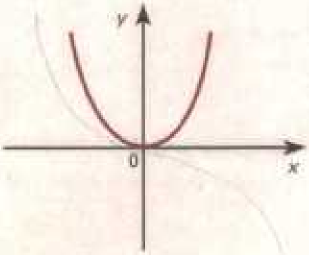


V.2 (Mackenzie-SP) O gráfico cartesiano da função definida por $y = -x|x|$ pode ser:

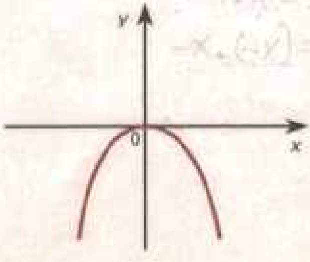
$-x \cdot x = -x^2, x \geq 0$

$-x \cdot (-x) = x^2, x < 0$

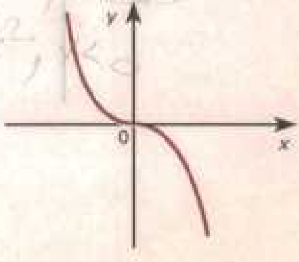
a)



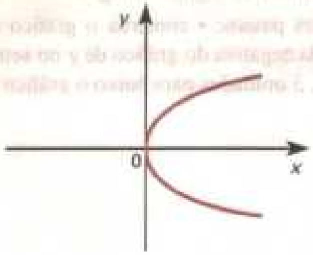
b)



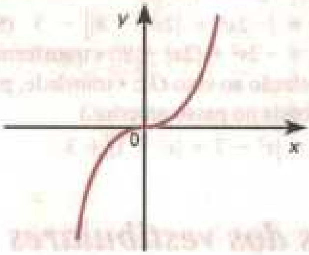
c)



d)

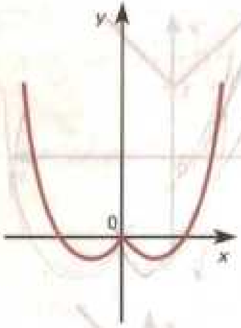


e)

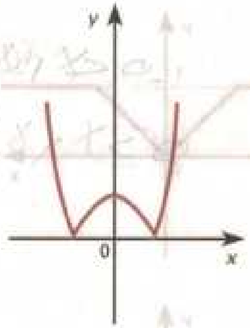


V.3 (Cescem-SP) A representação gráfica da função $y = x^2 - |x|$ é:

a)



d)



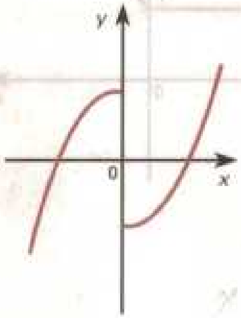
x = 0 x = 1

x² + x = 0

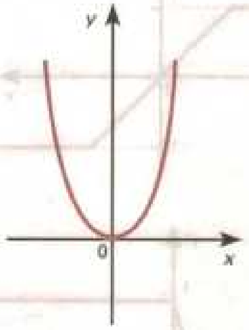
x(x + 1) = 0

x = 0 x = −1

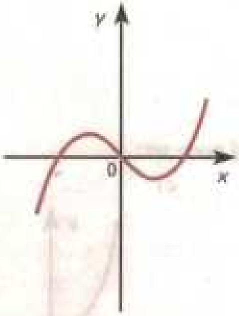
b)



e)



c)



Capítulo 29

Equações modulares

Já estudamos equações modulares da forma: $|f(x)| = a$, com $a \in \mathbb{R}_+$.

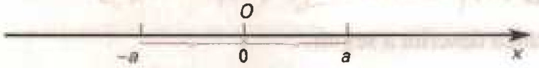
Continuando esse estudo, vamos aprender a resolver outros tipos de equações modulares.

1. Equações do tipo $|f(x)| = |g(x)|$

Equações como essa são resolvidas pela propriedade:

M.7 $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a, \quad \forall \{x, a\}, \{x, a\} \subset \mathbb{R}.$

Para entender essa propriedade, pense na definição de módulo: $|x| = |a|$ se, e somente se, os pontos de abscissa x e a estiverem à mesma distância da origem O do eixo real.



Note que os pontos de abscissa a e $-a$ equidistam da origem O. Assim, temos:

$$|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a.$$

Exercício resolvido

R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|3x - 1| = |2x + 6|$.

Resolução

Pela propriedade M.7, temos que:

$$|3x - 1| = |2x + 6| \Leftrightarrow 3x - 1 = 2x + 6 \text{ ou } 3x - 1 = -2x - 6 \;\therefore\; x = 7 \text{ ou } x = -1.$$

Logo, o conjunto solução S da equação proposta é: $S = \{7, -1\}$.

2. Equações do tipo $|f(x)| = t(x)$, em que $t(x)$ é uma função que não apresenta módulo

Para resolver esse tipo de equação adotaremos a técnica descrita a seguir.

- Impomos a condição de existência $t(x) \geqslant 0$, pois o módulo não pode ser negativo.
- Aplicamos a propriedade M.3 (sendo $d \geqslant 0$, tem-se $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$), obtendo assim:

$$f(x) = t(x) \quad \textbf{(I)} \quad \text{ou} \quad f(x) = -t(x). \quad \textbf{(II)}$$

- As raízes das equações anteriores que satisfizerem a condição de existência formarão o conjunto solução da equação $|f(x)| = t(x)$.

Exercício resolvido

R.2 Resolver em ℝ a equação $|x^2 - 5x| = -5x + 9$.

Resolução

- Impomos a condição de existência: $-5x + 9 \geqslant 0 \Rightarrow -5x \geqslant -9 \quad \therefore \quad 5x \leqslant 9 \quad \therefore \quad x \leqslant \frac{9}{5}$.
- Aplicamos a propriedade M.3:

$$|x^2 - 5x| = -5x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 5x = \pm(-5x + 9)$$
$$\therefore x^2 - 5x = -5x + 9 \quad \text{(I)} \quad \text{ou} \quad x^2 - 5x = 5x - 9. \quad \text{(II)}$$

Resolvendo as equações:

I. $x^2 - 5x = -5x + 9 \Rightarrow x^2 = 9$.

$\therefore x = 3$ (não convém, pois não satisfaz a condição de existência) ou $x = -3$.

II. $x^2 - 5x = 5x - 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1}$$

$\therefore x = 9$ (não convém, pois não satisfaz a condição de existência) ou $x = 1$.

Logo, $S = \{-3, 1\}$.

3. Equações do tipo $|f(x)| \pm |g(x)| \pm ... \pm |h(x)| = t(x)$

Resolveremos equações como essa através da técnica descrita a seguir.

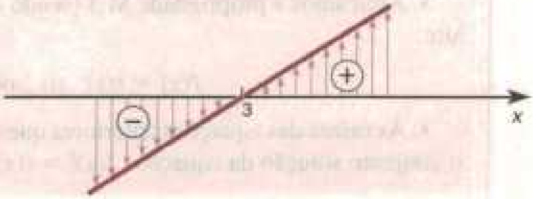
- Transformamos a equação na equivalente: $|f(x)| \pm |g(x)| \pm ... \pm |h(x)| - t(x) = 0$.
- Transformamos a função do primeiro membro dessa igualdade em uma **idêntica** a ela, dada por mais de uma sentença (sem módulos). Igualamos a zero cada uma dessas sentenças e resolvemos as equações assim obtidas.

Exercícios resolvidos

R.3 Resolver em ℝ a equação $|3x - 9| + |2x + 12| = 6x$.

Resolução

- Transformamos a equação na equivalente: $|3x - 9| + |2x + 12| - 6x = 0$.
- Transformamos a função do primeiro membro dessa igualdade em uma **idêntica** a ela, dada por mais de uma sentença (sem módulos). Para isso, vamos estudar a variação de sinal de cada uma das funções: $f(x) = 3x - 9$ e $g(x) = 2x + 12$.
- Raiz de f: $3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$.
- Variação de sinal de f



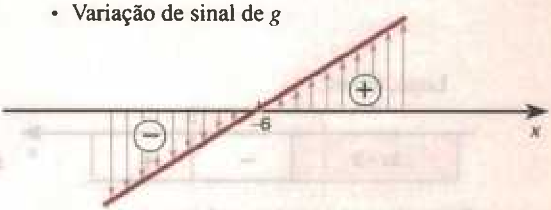
Logo, temos:

	3		x
$f(x) = 3x - 9$	$-$	$+$	

$\Longrightarrow$

	3		x
$\|3x - 9\| =$	$-3x + 9$	$3x - 9$	

- Raiz de g: $2x + 12 = 0 \Rightarrow x = -6$.
- Variação de sinal de g



Logo, temos:

	-6		x
$g(x) = 2x + 12$	$-$	$+$	

$\Longrightarrow$

	-6		x
$\|2x + 12\| =$	$-2x - 12$	$2x + 12$	

Representando no eixo real, temos:

		-6	3	x
$\|3x - 9\| =$	$-3x + 9$	$-3x + 9$	$3x - 9$	
⊕ $\|2x + 12\| =$	$-2x - 12$	$2x + 12$	$2x + 12$	
⊕ $-6x =$	$-6x$	$-6x$	$-6x$	
$\|3x - 9\| + \|2x + 12\| -6x =$	$-11x - 3$	$-7x + 21$	$-x + 3$	

Portanto temos:

$$|3x - 9| + |2x + 12| - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -11x - 3 = 0, \text{ se } x \leqslant -6 \\ -7x + 21 = 0, \text{ se } -6 \leqslant x \leqslant 3 \\ -x + 3 = 0, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\dfrac{3}{11}, \text{ se } x \leqslant -6 \Rightarrow \nexists x \left(\text{pois } x = -\dfrac{3}{11} \text{ não satisfaz a condição } x \leqslant -6\right) \\ x = 3, \text{ se } -6 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow x = 3 \\ x = 3, \text{ se } x \geqslant 3 \Rightarrow x = 3. \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \{3\}$.

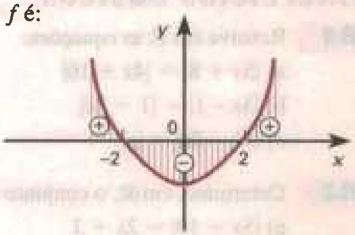
R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|x^2 - 4| + |3x - 9| - x^2 = -1$.

Resolução

- Transformamos a equação na equivalente: $|x^2 - 4| + |3x - 9| - x^2 + 1 = 0$.
- Transformamos a função do primeiro membro dessa igualdade em uma **idêntica** a ela, dada por mais de uma sentença (sem módulos). Para isso, estudamos o sinal de cada uma das funções:

  $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 3x - 9$.

O gráfico de f é:



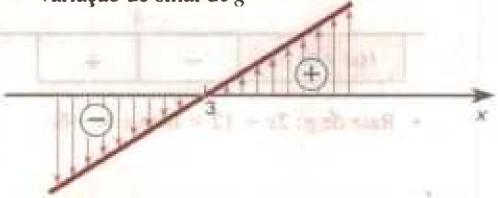
	-2	2		x
$x^2 - 4$	$+$	$-$	$+$	

$\Longrightarrow$

	-2	2		x
$\|x^2 - 4\| =$	$x^2 - 4$	$-x^2 + 4$	$x^2 - 4$	

- Raiz de g: $3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$.

- Variação de sinal de g



Logo, temos:

3

$3x - 9$	−	+	x

$\Longrightarrow$

3

$\lvert 3x - 9\rvert =$	$-3x + 9$	$3x - 9$	x

Representando no eixo real, temos:

−2   2   3

$\lvert x^2 - 4\rvert =$	$x^2 - 4$	$-x^2 + 4$	$x^2 - 4$	$x^2 - 4$
⊕ $\lvert 3x - 9\rvert =$	$-3x + 9$	$-3x + 9$	$-3x + 9$	$3x - 9$
⊕ $-x^2 + 1 =$	$-x^2 + 1$	$-x^2 + 1$	$-x^2 + 1$	$-x^2 + 1$
⊖ $\lvert x^2 - 4\rvert + \lvert 3x - 9\rvert - x^2 + 1 =$	$-3x + 6$	$-2x^2 - 3x + 14$	$-3x + 6$	$3x - 12$

x

Portanto, concluímos que:

$$|x^2 - 4| + |3x - 9| - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 6 = 0, \text{ se } x \leqslant -2 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2x^2 - 3x + 14 = 0, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3x - 12 = 0, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2, \text{ se } x \leqslant -2 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow x = 2 \\ x = -\dfrac{7}{2} \text{ ou } x = 2, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x = 2 \\ \qquad \left(\text{note que } x = -\dfrac{7}{2} \text{ não convém, pois não satisfaz a condição } -2 \leqslant x \leqslant 2\right) \\ x = 4, \text{ se } x \geqslant 3 \Rightarrow x = 4. \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \{2, 4\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d), B.2 (a, b, c, d), B.3 (a, b, c, d), C.1 (a, b), C.2 (a, b).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g, h), B.2 (e, f, g, h), B.3 (e, f, g, h), C.1 (c, d), C.2 (c, d).

Exercícios básicos

B.1 Resolva em ℝ as equações:

a) $|5x + 8| = |4x + 10|$
b) $|3x - 1| = |1 - 2x|$
c) $|x^2 - 3x| = |x|$
d) $|x^2 - 5x| = |x - 5|$
e) $|8x - 1| = |x - 4|$
f) $|x - 2| = |x + 3|$
g) $|2x^2 - 3x| = |x - 2|$
h) $|x^2 - x| = |2x|$

B.2 Determine, em ℝ, o conjunto solução de cada uma das equações.

a) $|5x - 10| = 2x + 3$
b) $|6 - 3x| = x + 4$
c) $|x^2 - x| = x$
d) $|x^2 - 3x| = x - 3$
e) $|8x - 16| = 7x + 1$
f) $|2 - 3x| = 1 - x$
g) $|x^2 - 4x| = 5x$
h) $|x^2 - 5x| = x - 5$

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam cada uma das equações:

a) $|3x + 12| + |x + 6| = 13x$

b) $|3x - 6| + |4 - x| = 6$

c) $|5x + 1| - |1 - x| = 6x$

d) $|x^2 - 3x| + |3x - 1| = 8$

e) $|3x - 1| + |x + 2| = 2x + 7$

f) $|1 - 2x| - |3 - x| = x - 2$

g) $|2x^2 + x| + |1 - x| = 3$

h) $|x^2 + 3x| + |x^2 - 6x| = 2$

Exercícios complementares

C.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x^3 - x| = |x^2 + x|$

b) $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 2}\right| = \left|\dfrac{x}{x + 2}\right|$

c) $|x^4 - 2x^2| = |2x^2 - 3|$

d) $\left|\dfrac{x^2 - x}{x}\right| = \left|\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 4}\right|$

C.2 Considerando o conjunto universo $U = \mathbb{R}$, resolva cada uma das equações:

a) $\sqrt{(x - 3)^2} + |x| = 3x$ **(Cuidado! Lembre-se de que** $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$.**)**

b) $|x - 1| + |2x - 1| - |3x - 5| = 0$

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 2| = 3$ **(Note que** $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.**)**

d) $|x^2 - x| + |x^2 + x| = |2x|$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Determine as raízes das equações seguintes:

a) $|2x - 3| = 5$

b) $|2x^2 - 1| + x = 0$

V.2 (PUC-MG) O conjunto S das soluções da equação $|2x - 1| = x - 1$ é:

a) $S = \left\{0, \dfrac{2}{3}\right\}$

b) $S = \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{0, -1\}$

e) $S = \left\{0, \dfrac{4}{5}\right\}$

V.3 (Combitec/Combimed) A equação $|x + 1| - |x| = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$:

a) tem duas soluções distintas cuja soma é 2.

b) tem somente as soluções -1 e 0.

c) não tem solução.

d) tem uma infinidade de soluções.

e) tem três soluções distintas cuja soma é 4.

V.4 (Cesgranrio) Resolva a equação $|x - 1| + |x - 2| = 1$.

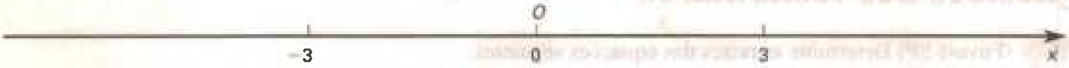
Capítulo 30
Desigualdades e módulos

1. Propriedades

Considere o eixo real de origem *O*:

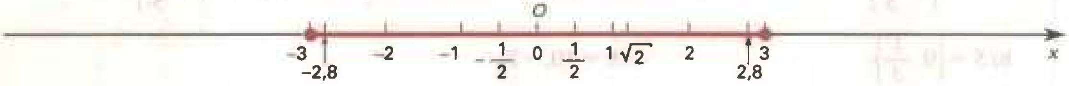
a) Quais as abscissas *x* dos pontos desse eixo cujas distâncias à origem *O* são menores ou iguais a 3?
b) Quais as abscissas *x* dos pontos desse eixo cujas distâncias à origem *O* são maiores ou iguais a 3?

Para responder a essas questões, note que os pontos de abscissa 3 e -3 distam três unidades da origem:

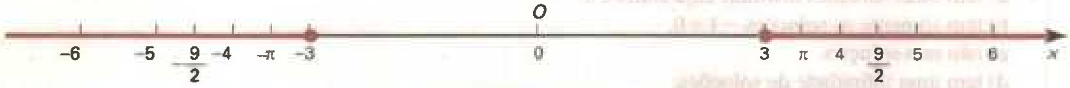


Assim, temos:

a) qualquer ponto de abscissa *x*, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, localiza-se a uma distância menor ou igual a 3 da origem; observe:



b) qualquer ponto de abscissa *x*, $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$, localiza-se a uma distância maior ou igual a 3 da origem; observe:



As perguntas feitas nos itens (a) e (b) poderiam ter sido formuladas da seguinte maneira:

a) Quais as abscissas *x* dos pontos do eixo real tais que $|x| \leqslant 3$?
b) Quais as abscissas *x* dos pontos do eixo real tais que $|x| \geqslant 3$?

Temos, então:

a) $|x| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$;
b) $|x| \geqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$.

Raciocinando dessa maneira, podemos concluir as seguintes propriedades:

M.8 $\boxed{|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a,}$ $\forall a, a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo

$$|x| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5.$$

M.9 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \quad \forall a, a \in \mathbb{R}_+.$

Exemplo

$$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$$

M.10 $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a, \quad \forall a, a \in \mathbb{R}_+.$

Exemplo

$$|x| \geqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant -6 \text{ ou } x \geqslant 6.$$

M.11 $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a, \quad \forall a, a \in \mathbb{R}_+.$

Exemplo

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2.$$

2. Inequações modulares

Do mesmo modo como fizemos o estudo das equações modulares, faremos o estudo das inequações modulares, classificando-as em alguns tipos.

2.1. Inequações do tipo:

$$|f(x)| \leqslant a \text{ ou } |f(x)| < a \text{ ou } |f(x)| \geqslant a \text{ ou } |f(x)| > a, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+$$

Para resolvermos essas inequações usaremos as propriedades M.8, M.9, M.10 ou M.11.

Exercícios resolvidos

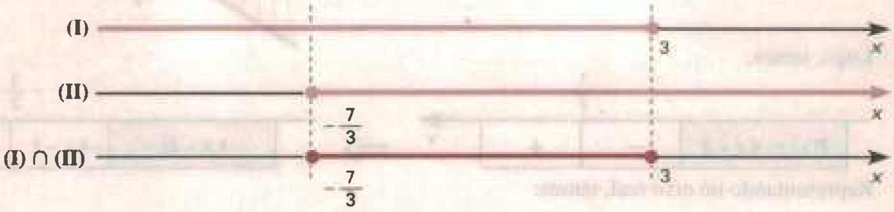
R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|3x - 1| \leqslant 8$.

Resolução

Pela propriedade M.8, temos que: $|3x - 1| \leqslant 8 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x - 1 \leqslant 8$.

Essa dupla desigualdade é equivalente a: $\begin{cases} 3x - 1 \leqslant 8 \\ 3x - 1 \geqslant -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 & \text{(I)} \\ x \geqslant -\dfrac{7}{3}. & \text{(II)} \end{cases}$

O conjunto solução S do sistema é (I) ∩ (II), ou seja:



Assim, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{7}{3} \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|x^2 - 5x| > 6$.

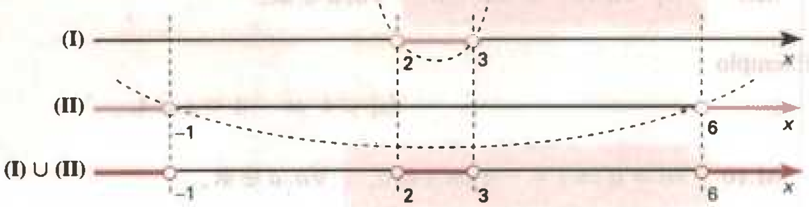
Resolução

Pela propriedade M.11, temos que: $|x^2 - 5x| > 6 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 5x < -6}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{x^2 - 5x > 6}_{\text{(II)}}$.

O conjunto solução S da inequação é (I) ∪ (II), ou seja:

$x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow$

$x^2 - 5x - 6 > 0 \Rightarrow$



Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}$.

2.2. Inequações do tipo:

$$|f(x)| > g(x) \text{ ou } |f(x)| \geq g(x) \text{ ou } |f(x)| < g(x) \text{ ou } |f(x)| \leq g(x)$$

Resolveremos essas inequações usando a seguinte técnica:

- Transformamos a inequação proposta na inequação **equivalente**:

$$|f(x)| - g(x) > 0 \text{ ou } |f(x)| - g(x) \geq 0 \text{ ou } |f(x)| - g(x) < 0 \text{ ou } |f(x)| - g(x) \leq 0.$$

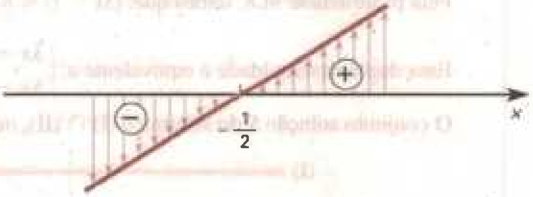
- Transformamos a função do primeiro membro da desigualdade em uma **idêntica** a ela, dada por mais de uma sentença (sem módulo). A seguir resolvemos as inequações assim obtidas.

Exercícios resolvidos

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|4x + 2| > -5x + 7$.

Resolução

- Transformamos a inequação na equivalente: $|4x + 2| + 5x - 7 > 0$.
- Transformamos a função do primeiro membro da desigualdade em uma idêntica a ela, dada por mais de uma sentença (sem módulo). Para isso, estudamos a variação de sinal da função $f(x) = 4x + 2$.
- Raiz de f: $4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.
- Variação de sinal de f



Logo, temos:

$-\frac{1}{2}$

$f(x) = 4x + 2$	−	+

$\Longrightarrow$

$-\frac{1}{2}$

$\|4x + 2\| =$	$-4x - 2$	$4x + 2$

Representando no eixo real, temos:

$-\frac{1}{2}$

	$\|4x + 2\| =$	$-4x - 2$	$4x + 2$
⊕	$5x - 7 =$	$5x - 7$	$5x - 7$
⊜	$\|4x + 2\| + 5x - 7 =$	$x - 9$	$9x - 5$

Portanto temos:

$$|4x+2|+5x-7>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-9>0, \text{ se } x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ 9x-5>0, \text{ se } x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} x>9, \text{ se } x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ x>\dfrac{5}{9}, \text{ se } x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

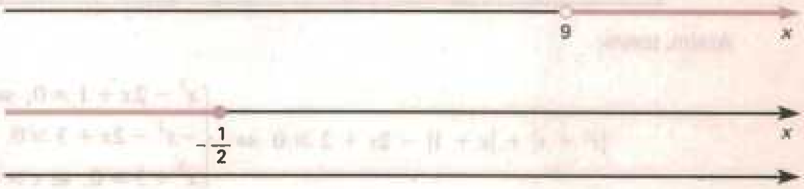
Note que a primeira sentença exige que:

$x > 9 \Rightarrow$ (I)

e

$x \leqslant -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (II)

(I) ∩ (II) = ∅



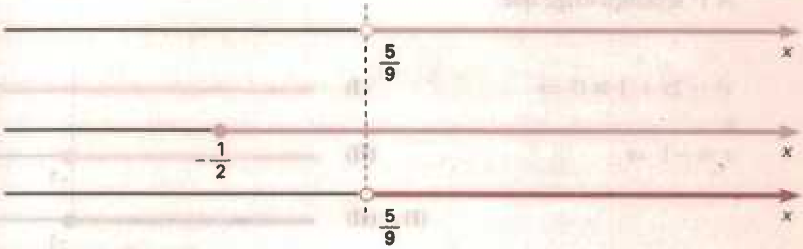
A segunda sentença exige que:

$x > \dfrac{5}{9} \Rightarrow$ (III)

e

$x \geqslant -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ (IV)

(III) ∩ (IV)



Assim, o conjunto solução S da inequação proposta é:

$$S = ((\text{I}) \cap (\text{II})) \cup ((\text{III}) \cap (\text{IV})), \text{ ou seja: } S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{9}\right\}.$$

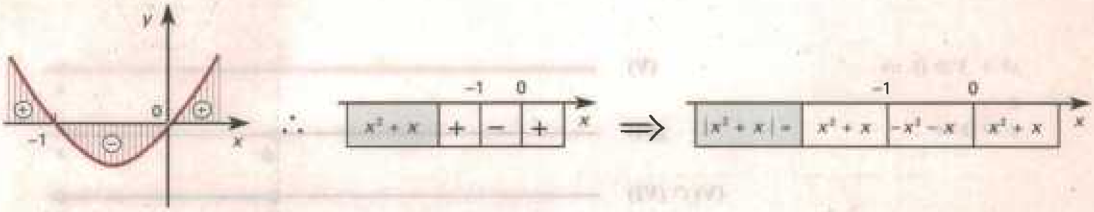
R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|x^2+x|+|x+1| \geqslant 2x-2$.

Resolução

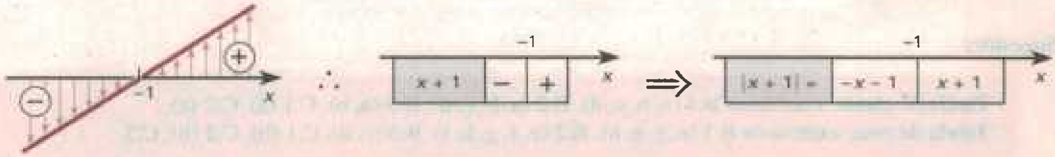
- Transformamos a inequação na equivalente: $|x^2+x|+|x+1|-2x+2 \geqslant 0$.
- Transformamos a função do primeiro membro dessa desigualdade em uma idêntica a ela, dada por mais de uma sentença (sem módulo). Para isso, estudamos a variação de sinal das funções:

$$f(x) = x^2 + x \text{ e } g(x) = x + 1.$$

O gráfico de f é:



Para a função g, temos:



Representando no eixo real, temos:

		$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 0$	$x \geq 0$
	$\lvert x^2 + x\rvert =$	$x^2 + x$	$-x^2 - x$	$x^2 + x$
⊕	$\lvert x + 1\rvert =$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
⊕	$-2x + 2 =$	$-2x + 2$	$-2x + 2$	$-2x + 2$
⊖	$\lvert x^2 + x\rvert + \lvert x + 1\rvert - 2x + 2 =$	$x^2 - 2x + 1$	$-x^2 - 2x + 3$	$x^2 + 3$

Assim, temos:

$$|x^2 + x| + |x + 1| - 2x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geqslant 0, \text{ se } x \leqslant -1 \\ -x^2 - 2x + 3 \geqslant 0, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 + 3 \geqslant 0, \text{ se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

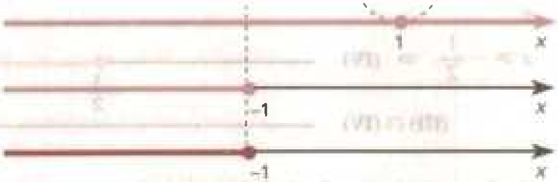
A 1ª sentença exige que:

$x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow$ **(I)**

e

$x \leqslant -1 \Rightarrow$ **(II)**

(I) ∩ (II)



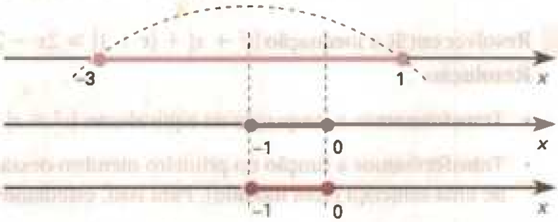
A 2ª sentença exige que:

$-x^2 - 2x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow$ **(III)**

e

$-1 \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow$ **(IV)**

(III) ∩ (IV)



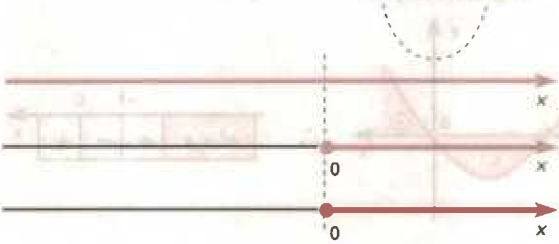
A 3ª sentença exige que:

$x^2 + 3 \geqslant 0 \Rightarrow$ **(V)**

e

$x \geqslant 0 \Rightarrow$ **(VI)**

(V) ∩ (VI)



Assim, o conjunto solução S da inequação é: $S = ((\text{I}) \cap (\text{II})) \cup ((\text{III}) \cap (\text{IV})) \cup ((\text{V}) \cap (\text{VI}))$, ou seja: $S =]-\infty, -1] \cup [-1, 0] \cup [0, +\infty[\;\therefore\; S = \mathbb{R}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c, d), B.2 (a, b, c, d), B.3 (a, b), C.1 (a), C.2 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g, h), B.2 (e, f, g, h, i), B.3 (c, d), C.1 (b), C.2 (b), C.3.

Exercícios básicos

B.1 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|3x + 5| \leqslant 11$

b) $\left|2x + \frac{3}{2}\right| > 6$

c) $|x^2 - 5| \leqslant 4$

d) $|2x^2 - x - 2| < 1$

e) $|1 - x| < 5$

f) $\left|\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| > 4$

g) $|x^2 - 3| \geqslant 1$

h) $|x^2 + 2x| < 3$

B.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $|5x - 4| \leqslant 4x + 5$

b) $|2 - 3x| > 2x - 12$

c) $|x^2 - 2x| < 3x$

d) $|2x^2 - 8| \leqslant 2x^2 - 4x$

e) $|6x - 1| \geqslant 5x - 10$

f) $\left|\frac{3x}{2} - 1\right| < x + 1$

g) $|x^2 - 3x + 2| < x^2$

h) $|3x - 1| \leqslant x^2 + 1$

i) $|5x - 4| \leqslant 4x - 5$

B.3 Obtenha o conjunto de todos os números reais x que satisfaçam cada uma das desigualdades:

a) $|3x - 3| + |x - 2| \geqslant x$

b) $|x^2 - x| + |x - 1| < x + 2$

c) $|5x - 10| + |2 - x| \leqslant 6x$

d) $|x^2 - 3x| + |3x - 6| < x$

Exercícios complementares

C.1 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|3x - 9| + |x - 2| < |4x - 1| + x$

b) $|x^2 - 4x| + |x^2 - 2x| + 4 < |2x^2 - 8|$

C.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\big||3x - 6| - 2x\big| < 4$

b) $\big||x^2 - 2x| + x^2\big| \geqslant 4$

C.3 Obtenha o conjunto de todos os números reais x que satisfaçam a desigualdade: $\big||x + |x + 1|| - 5\big| \leqslant 0$

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) A intersecção dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$ é um intervalo de comprimento:

a) 2
b) 5
c) 1
d) 3
e) 4

V.2 (Mackenzie-SP) O conjunto solução de $1 < |x - 3| < 4$ é o conjunto dos números x tais que:

a) $4 < x < 7$ ou $-1 < x < 2$

b) $-1 < x < 7$ ou $-3 < x < -1$.

c) $-1 < x < 7$ ou $2 < x < 4$

d) $0 < x < 4$

e) $-1 < x < 4$ ou $2 < x < 7$

V.3 (Cesgranrio) O conjunto solução da desigualdade $|x + 1| - |x| \leqslant x + 2$ é:

a) $[-3, 0] \cup [1, 73]$

b) $\{x \mid x \leqslant 0\} \cup [3, 15]$

c) $[-3, 0] \cup \{x \mid x \geqslant 0\}$

d) $\{x \mid -5 < x < -1\} \cup \{x \mid 1 < x < 17\}$

e) $[-4, 2] \cup [-2, 1]$

V.4 (Mapofei-SP) Resolva a inequação $|x - 2| + |x - 4| \geqslant 6$

V.5 (Mapofei-SP) Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

Capítulo 31

Composição de funções

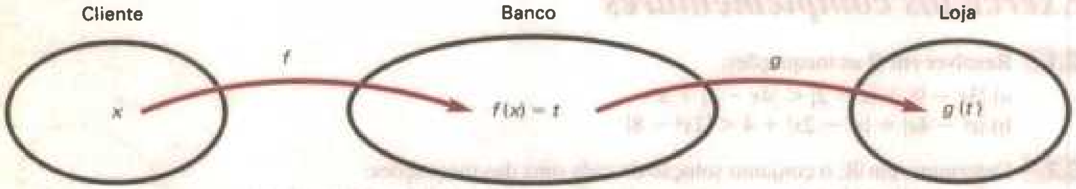
1. Conceituação

Uma loja de eletrodomésticos recebe, através de um banco, as prestações dos produtos vendidos em crediário.

No mês de outubro a loja fará a seguinte promoção: o cliente que pagar a prestação na primeira quinzena do mês terá um desconto sobre o valor x da prestação. O cliente pagará apenas o valor $f(x)$, dado pela função: $f(x) = 0{,}8x$.

O banco que faz a intermediação desse dinheiro cobra da loja uma taxa de serviços. Para cada quantia de t reais recebidos, o banco transfere para a conta da loja a quantia $g(t)$ dada pela função: $g(t) = 0{,}95t$.

Entenda bem o esquema:



A prestação do mês de outubro de um cliente é de 150 reais. Se esse cliente pagá-la na primeira quinzena do mês, quanto pagará?

A resposta para essa questão é dada pela função $f(x) = 0{,}8x$. O cliente vai pagar:

$$f(150) = 0{,}8 \cdot 150 = 120 \text{ reais.}$$

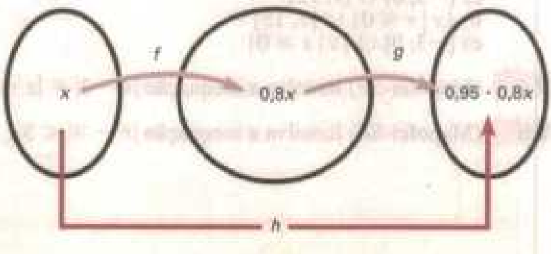
Que parcela desse dinheiro será transferida pelo banco para a conta da loja?

A resposta é dada pela função $g(t) = 0{,}95t$. Como o banco terá recebido $t = 120$ reais do cliente, a loja receberá do banco:

$$g(120) = 0{,}95 \cdot 120 = 114 \text{ reais.}$$

A prestação de um cliente para o mês de outubro é de x reais. Se esse cliente pagá-la na primeira quinzena de outubro, terá o desconto oferecido pela loja. Qual a função que dá o valor recebido pela loja em função de x, sabendo que esse cliente pagará a prestação na primeira quinzena?

Vejamos o esquema:



A função h é a que expressa o valor recebido pela loja em função de x, ou seja,

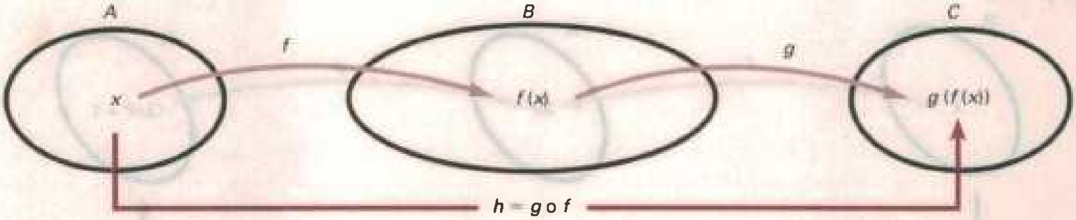
$$h(x) = 0{,}95 \cdot 0{,}8x \Rightarrow h(x) = 0{,}76x.$$

A função h é chamada de **função composta de g com f.**

Definição

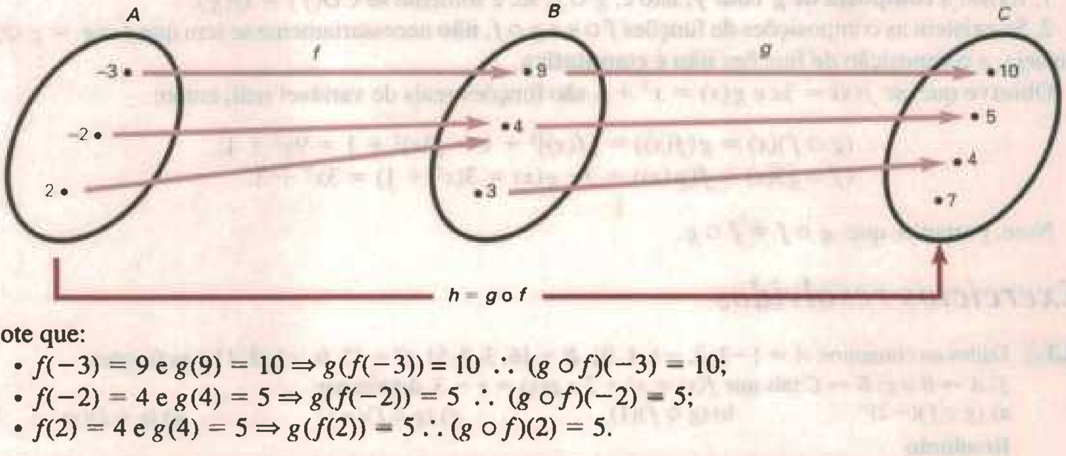
Sejam A, B e C conjuntos e sejam as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$.
A função $h\colon A \to C$ tal que $h(x) = g(f(x))$ é chamada de **função composta de g com f.** Indicaremos essa composição por $g \circ f$, lê-se **g composta com f.**

Esquematicamente, temos:



Exemplos

a) São dadas as funções f e g:

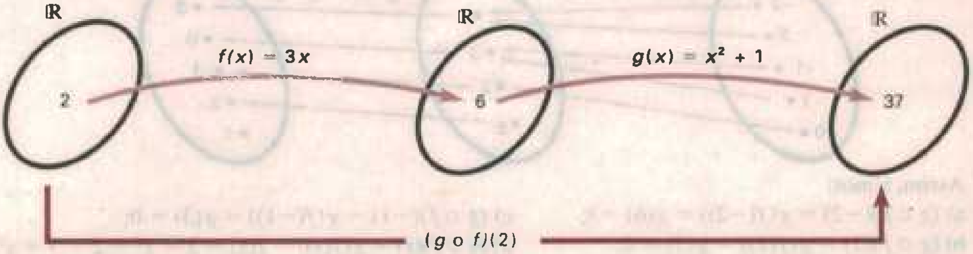


Note que:

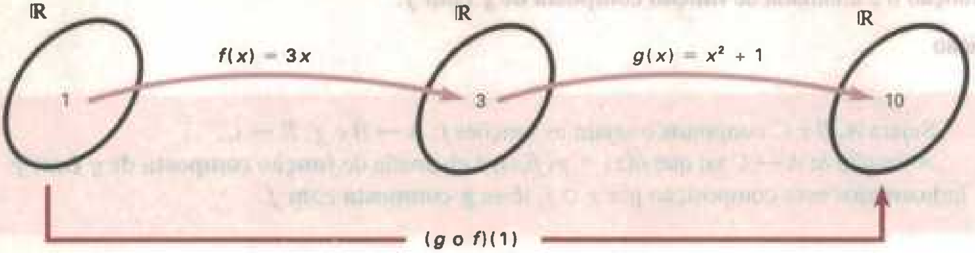
- $f(-3) = 9$ e $g(9) = 10 \Rightarrow g(f(-3)) = 10 \therefore (g \circ f)(-3) = 10$;
- $f(-2) = 4$ e $g(4) = 5 \Rightarrow g(f(-2)) = 5 \therefore (g \circ f)(-2) = 5$;
- $f(2) = 4$ e $g(4) = 5 \Rightarrow g(f(2)) = 5 \therefore (g \circ f)(2) = 5$.

b) Considere as funções reais de variável real: $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Note que:

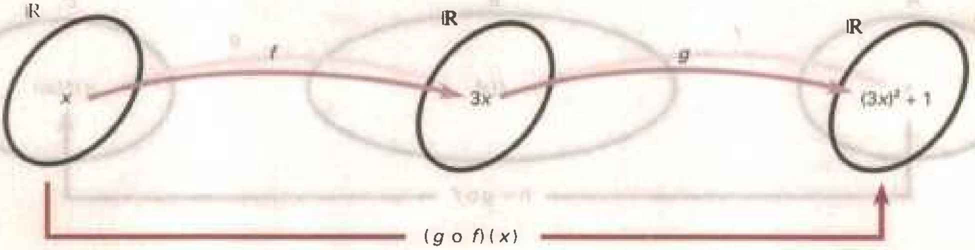
- $f(2) = 6$ e $g(6) = 37 \Rightarrow g(f(2)) = 37 \therefore (g \circ f)(2) = 37$; observe o esquema:



- $(g \circ f)(1) = \underbrace{g(f(1))}_{f(1) = 3 \cdot 1 = 3} = g(3) = 3^2 + 1 = 10$; observe o esquema:



- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = [3x]^2 + 1 = 9x^2 + 1 \therefore (g \circ f)(x) = 9x^2 + 1$; observe o esquema:



Notas

1. Existe a **composta de g com f**, isto é, $g \circ f$, se, e somente se $CD(f) = D(g)$.
2. Se existem as composições de funções $f \circ g$ e $g \circ f$, **não** necessariamente se tem que $f \circ g = g \circ f$. Ou seja, a composição de funções **não é comutativa**.

Observe que, se $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2 + 1$ são funções reais de variável real, então:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 1 = [3x]^2 + 1 = 9x^2 + 1;$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) = 3(x^2 + 1) = 3x^2 + 3.$$

Note, portanto, que: $g \circ f \neq f \circ g$.

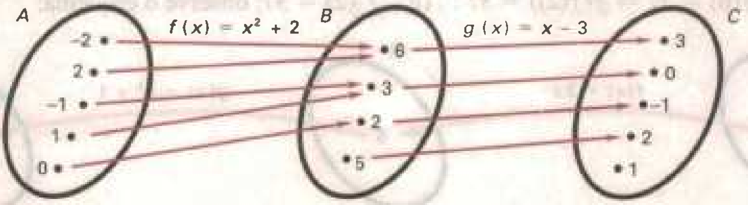
Exercícios resolvidos

R.1 Dados os conjuntos: $A = \{-2, 2, -1, 1, 0\}$, $B = \{6, 3, 2, 5\}$, $C = \{3, 0, -1, 2, 1\}$ e as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ tais que $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, determinar:

a) $(g \circ f)(-2)$
b) $(g \circ f)(1)$
c) $(g \circ f)(-1)$
d) $(g \circ f)(x)$

Resolução

Representando f e g em diagramas de flechas:



Assim, temos:

a) $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(6) = 3$;
b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 0$;
c) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(3) = 0$;
d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 3 = x^2 + 2 - 3 = x^2 - 1$.

R.2 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ e $g(x) = x^3 + 8$, determinar:

a) $(g \circ f)(1)$ b) $(f \circ g)(1)$ c) $(g \circ f)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

Resolução

a) $(g \circ f)(1) = g(f(1))$;

$f(1) = \sqrt[3]{1-1} = 0.$

Logo, temos: $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 0^3 + 8 \therefore (g \circ f)(1) = 8.$

b) $(f \circ g)(1) = f(g(1))$;

$g(1) = 1^3 + 8 = 9.$

Logo, temos: $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(9) = \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{8} \therefore (f \circ g)(1) = 2.$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^3 + 8 = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 8 = x - 1 + 8 \therefore (g \circ f)(x) = x + 7.$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{g(x) - 1} = \sqrt[3]{x^3 + 8 - 1} \therefore (f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7}$.

R.3 Seja f uma função real de variável real tal que $f(6x + 2) = 12x - 1$. Determinar:

a) $f(20)$ b) $f(x)$

Resolução

a) Determinemos x, de modo que $6x + 2 = 20$.

Temos que $6x + 2 = 20 \Rightarrow x = 3$.

Assim sendo, para calcular $f(20)$, basta substituirmos a variável x por 3, ou seja,

$$f(20) = f(6 \cdot \underset{\overset{\uparrow}{x}}{3} + 2) = 12 \cdot \underset{\overset{\uparrow}{x}}{3} - 1 = 35.$$

Logo, $f(20) = 35$.

b) Fazendo $6x + 2 = t \Rightarrow x = \dfrac{t-2}{6}$, temos

$$f(t) = f\left(6\underbrace{\left(\frac{t-2}{6}\right)}_{x} + 2\right) = 12\underbrace{\left(\frac{t-2}{6}\right)}_{x} - 1 = 2(t-2) - 1 = 2t - 4 - 1 = 2t - 5.$$

Assim, $f(t) = 2t - 5$. Fazendo $t = x$, temos: $f(x) = 2x - 5$.

R.4 Sejam f, g e h três funções reais de variável real tais que $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = x + 6$ e $h(x) = x^2 + 2$. Determinar:

a) $[(h \circ g) \circ f](2)$ b) $[(h \circ g) \circ f](x)$ c) $[(f \circ f) \circ f](1)$ d) $[(f \circ f) \circ f](x)$

Resolução

a) $[(h \circ g) \circ f](2) = (h \circ g)(f(2))$.

Temos que $f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7 \therefore [(h \circ g) \circ f](2) = (h \circ g)(7) = h(g(7))$.

Temos que $g(7) = 7 + 6 = 13 \therefore [(h \circ g) \circ f](2) = h(13) = 13^2 + 2 = 171$.

b) $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x))$.

Temos que $f(x) = 5x - 3 \therefore [(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(5x - 3) = h(g(5x - 3))$.

Temos que $g(5x - 3) = 5x - 3 + 6 = 5x + 3$

$$\therefore [(h \circ g) \circ f](x) = h(5x + 3) = (5x + 3)^2 + 2 = 25x^2 + 30x + 9 + 2$$
$$\therefore [(h \circ g) \circ f](x) = 25x^2 + 30x + 11.$$

c) $[(f \circ f) \circ f](1) = (f \circ f)(f(1))$.

Temos que $f(1) = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \therefore [(f \circ f) \circ f](1) = (f \circ f)(2) = f(f(2))$.

Temos que $f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7 \therefore [(f \circ f) \circ f](1) = f(7) = 5 \cdot 7 - 3 = 32$.

d) $[(f \circ f) \circ f](x) = (f \circ f)(f(x))$.

Temos que $f(x) = 5x - 3 \therefore [(f \circ f) \circ f](x) = (f \circ f)(5x - 3) = f(f(5x - 3))$.

Temos que $f(5x - 3) = 5(5x - 3) - 3 = 25x - 15 - 3 = 25x - 18$

$$\therefore [(f \circ f) \circ f](x) = f(25x - 18) = 5\,(25x - 18) - 3 = \\ = 125x - 90 - 3 = 125x - 93.$$

R.5 **Seja a função $f(x) = 3x + a$. Sabendo que $(f \circ f)(a) = 2a + 10$, determinar o valor de a.**

Resolução

$$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(3a + a) = f(4a) = 3 \cdot 4a + a = 13a.$$

Logo, $13a = 2a + 10 \therefore 11a = 10 \Rightarrow a = \dfrac{10}{11}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.8, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7, B.9, C.2, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Dados os conjuntos $A = \{2, -2, 0\}$, $B = \{3, \sqrt{5}, 2\}$, $C = \{81, 25, 16, 11\}$ e as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ tais que $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ e $g(x) = x^4$, construa o diagrama de flechas e determine:

a) $(g \circ f)(2)$ b) $(g \circ f)(-2)$ c) $(g \circ f)(0)$ d) $(g \circ f)(x)$

B.2 Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 4\}$, $B = \left\{3, 2, \dfrac{3}{2}, 1, 8\right\}$, $C = \{13, 9, 7, 5, 33\}$ e as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ tais que $f(x) = \dfrac{6}{x + 2}$ e $g(x) = 4x + 1$, construa o diagrama de flechas e determine:

a) $(g \circ f)(0)$ b) $(g \circ f)(2)$ c) $(g \circ f)(4)$ d) $(g \circ f)(x)$

B.3 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 3x + 2$, determine:

a) $(g \circ f)(5)$ b) $(f \circ g)(5)$ c) $(g \circ f)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

B.4 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = x^3 + 7$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, determine:

a) $(g \circ f)(1)$ b) $(f \circ g)(1)$ c) $(f \circ g)(-8)$ d) $(g \circ f)(x)$ e) $(f \circ g)(x)$

B.5 Seja f uma função real de variável real tal que $f(3x + 5) = 12x - 1$. Determine:

a) $f(11)$ b) $f(2)$ c) $f(x)$

B.6 Seja f uma função real de variável real tal que $f(2x + 6) = 14x - 1$. Determine:

a) $f(10)$ b) $f(2)$ c) $f(x)$

B.7 Sendo f uma função real de variável real tal que $f(x^3) = 2x + 1$, determine:

a) $f(8)$ b) $f(-1)$ c) $f(x)$

B.8 Sejam f e g funções reais de variável real tais que $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^4 - 1$. Resolva a equação $(g \circ f)(x) = 0$.

B.9 Sejam f e g funções reais de variável real tais que $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 - 49$. Determine as raízes da equação $(g \circ f)(x) = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Dizemos que duas funções f e g **comutam** na operação de **composição de funções** se, e somente se, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo x do domínio $D = D(f \circ g) = D(g \circ f)$. Mostre que as funções $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$ e $g(x) = x^3 + 4$ comutam na operação de composição de funções. (**Sugestão:** mostre que • $D(f \circ g) = D(g \circ f)$; • $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \forall x, x \in D(f \circ g)$.)

C.2 Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Determine:

a) $(g \circ f)(0)$ b) $(g \circ f)(1)$ c) $(g \circ f)(x)$

C.3 Sejam f, g e h três funções reais de variável real tais que $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x^2 - 1$. Determine:

a) $[(h \circ g) \circ f](1)$ b) $[(h \circ g) \circ f](0)$ c) $[(h \circ g) \circ f](x)$ d) $[(f \circ f) \circ f](x)$

C.4 Sendo f uma função real de variável real tal que $f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right) = 3x - 2$, determine:

a) $f(3)$ b) $f(5)$ c) $f(x)$ d) $f(3x)$ e) $f(x^3)$

C.5 Seja a função $f(x) = ax + b$. Sabendo-se que $(f \circ f)(a) = a^3$ e que $b \neq 0$, determine o valor de a.

C.6 Dadas as funções $f(x) = 3x - k$ e $g(x) = \dfrac{x+5}{3}$, determine k de modo que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo $x, x \in \mathbb{R}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Sendo $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x - 2$, então $g(f(0))$ é igual a:

a) 1 b) 3 c) 0 d) 2 e) −1

V.2 (Cesgranrio) Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(2) = 7$, $f(9) = 3$, $f(0) = 0$, $f(5) = 16$ e $f(7) = 4$; seja g uma outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que a imagem de cada ponto x do seu domínio seja $2x + 3$. Então, chamando-se de h a função composta $g \circ f$, tem-se que:

a) $h(1) = 16$
b) $h(9) = 9$
c) $h(2) = 49$
d) não existe essa função h.
e) nada se pode afirmar, pois a lei de formação da f não é conhecida.

V.3 (Faap-SP) Dadas as funções reais $f(x) = 2 - 3x$ e $g(x) = 3x + k$, determine o valor de k de modo que $f[g(x)] = g[f(x)]$.

V.4 (UFMG) Considere a função definida por: $f(x) = \begin{cases} 3^x, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 5, \text{ se } 1 < x \leqslant 4 \\ x - 4, \text{ se } x > 4. \end{cases}$

Pode-se afirmar que o valor de $f(f(f(2)))$ é:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) 1 c) 3 d) 5 e) 9

V.5 (Mackenzie-SP) Sendo $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ x + 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = x + 3$:

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -(x+3)^2, \text{ se } x \leqslant -2 \\ x + 4, \text{ se } x > -2. \end{cases}$

b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, \text{ se } x \leqslant 1 \\ x + 4, \text{ se } x > 1. \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -(x+3)^2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ x + 4, \text{ se } x > 1. \end{cases}$

d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ x + 4, \text{ se } x > -2. \end{cases}$

e) Nenhuma das anteriores está correta.

Capítulo 32

Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

1. Funções sobrejetoras

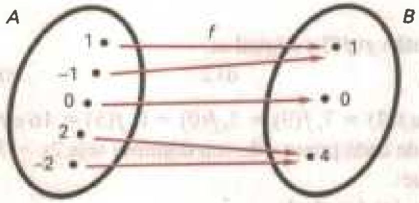
Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo y, $y \in B$, existe x, $x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f) = B$.

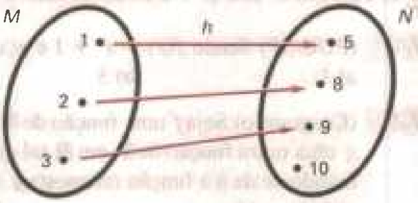
Exemplos

a)



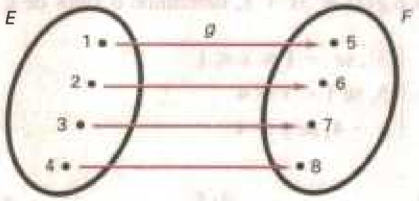
f é uma função sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f) = B$.

c)



A função h **não** é sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(h) \neq \mathrm{CD}(h)$.

b)



g é uma função sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{CD}(g) = F$.

2. Funções injetoras

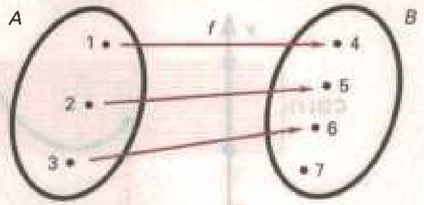
Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, $\boxed{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$, $\forall \{x_1, x_2\} \subset A$.

Em outras palavras, uma função $f\colon A \to B$ é injetora se, e somente se, elementos quaisquer do domínio de f, **distintos** entre si, tiverem imagens também **distintas** entre si, através de f.

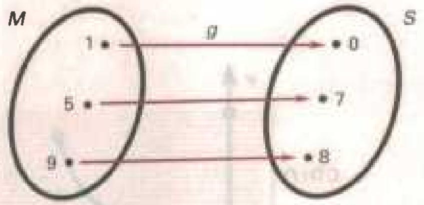
Exemplos

a)



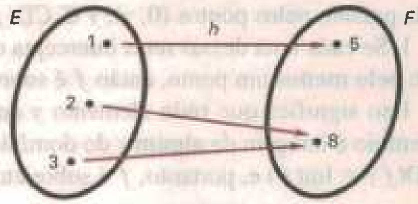
f é uma função injetora, pois elementos quaisquer, distintos de A, têm imagens também distintas.

b)



g é uma função injetora, pois elementos distintos de M têm imagens também distintas.

c)



A função h **não** é injetora, pois os elementos distintos 2 e 3 de E têm a mesma imagem.

3. Funções bijetoras

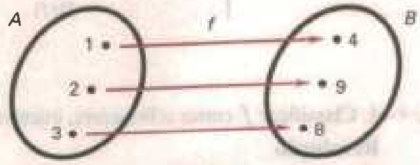
Definição

Uma função $f\colon A \to B$ é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.

Em outras palavras, uma função $f\colon A \to B$ é bijetora se, e somente se, **todo** elemento y, $y \in B$, for imagem, através de f, de um **único** x, $x \in A$.

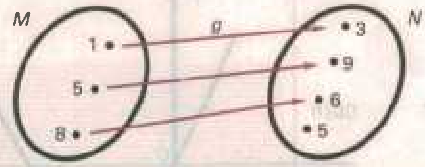
Exemplos

a)



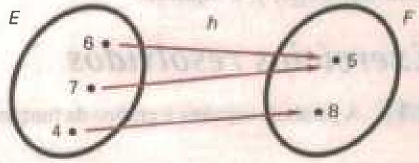
A função f é bijetora, pois é injetora e sobrejetora.

b)



A função g não é bijetora, pois não é sobrejetora.

c)



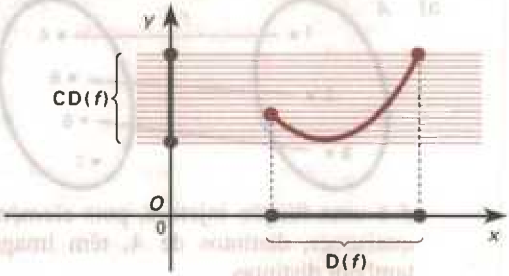
A função h não é bijetora, pois não é injetora.

4. Classificação de uma função através do gráfico

Dado o gráfico de uma função f, sobrejetora, injetora ou bijetora, a conclusão sobre qual dessas classificações ocorre pode ser feita da seguinte maneira: consideramos **todas** as retas paralelas ao eixo Ox que passam pelos pontos $(0, y)$, $y \in CD(f)$.

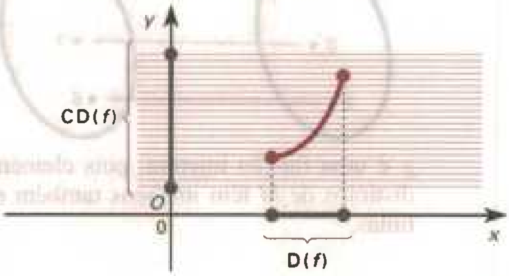
I. Se cada uma dessas retas intercepta o gráfico em **pelo menos** um ponto, então f é sobrejetora.

Isso significa que **todo** elemento y do contradomínio é imagem de **algum** x do domínio. Logo, $CD(f) = Im(f)$ e, portanto, f é sobrejetora.



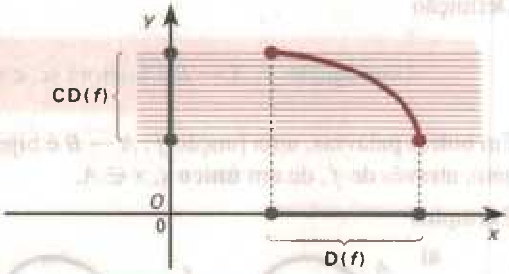
II. Se toda reta que intercepta o gráfico o faz num único ponto, então f é injetora.

Isso significa que não existem elementos distintos x_1 e x_2 do domínio de f que possuem a mesma imagem. Portanto, f é injetora.



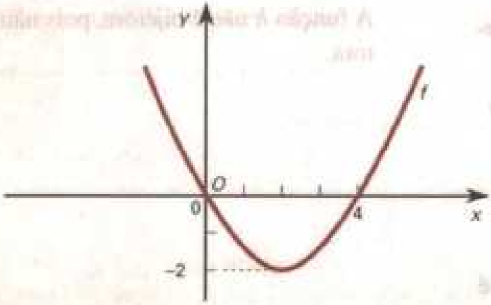
III. Se ocorrerem (I) e (II) simultaneamente, então f é bijetora. Ou seja, se cada uma dessas retas intercepta o gráfico num único ponto, então f é bijetora.

Isso significa que todo elemento y do contradomínio é imagem de um **único** elemento x do domínio. Logo, f é bijetora.



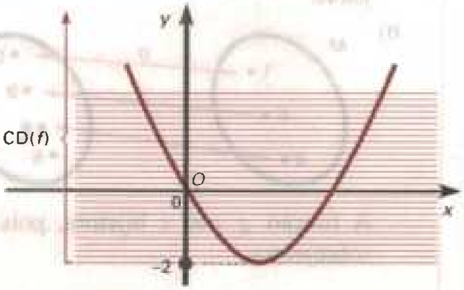
Exercícios resolvidos

R.1 A parábola seguinte é gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow [-2, +\infty[$. Classificar f como sobrejetora, injetora ou bijetora.



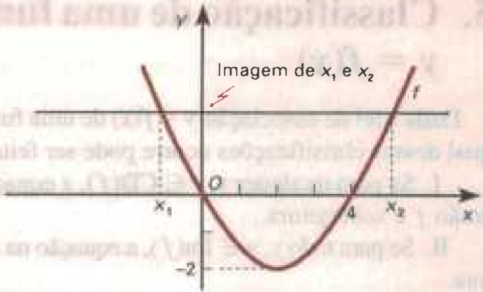
Resolução

Consideremos todas as retas paralelas ao eixo Ox que passam pelos pontos $(0, y)$, $y \in [-2, +\infty[$.



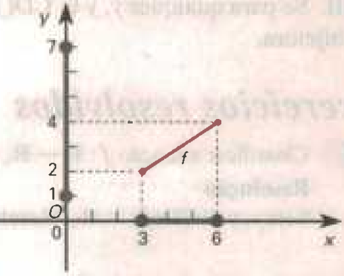
Note que cada uma dessas retas intercepta o gráfico em pelo menos um ponto; logo, CD(f) = Im(f) e, portanto, f é sobrejetora.

Note, também, que existe reta que intercepta o gráfico em dois pontos distintos. Isso significa que existem elementos distintos x_1 e x_2 do domínio que têm a mesma imagem. Observe o gráfico ao lado.



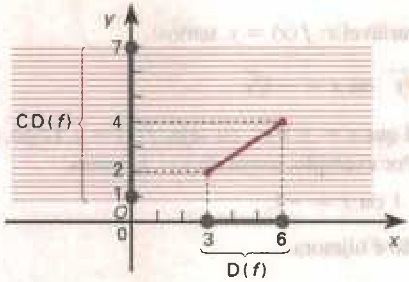
Logo, f não é injetora e, portanto, também não é bijetora.
Portanto f é apenas sobrejetora.

R.2 O gráfico ao lado representa a função f: [3, 6] → [1, 7]. Classificar f como sobrejetora, injetora ou bijetora.



Resolução

Consideremos todas as retas paralelas ao eixo Ox que passam pelos pontos (0, y) com $y \in [1, 7]$.

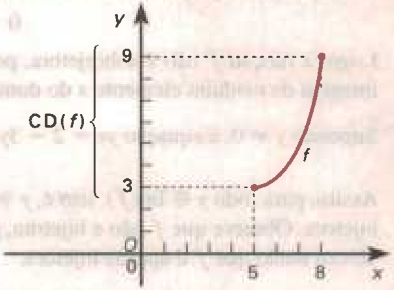


Note que cada reta que intercepta o gráfico o faz num único ponto. Logo, a função é injetora.

Note, também, que existe pelo menos uma dessas retas que não intercepta o gráfico. Isso significa que existe y, $y \in$ CD(f), que não é imagem de nenhum x, $x \in$ D(f), e, portanto, Im(f) ≠ CD(f), isto é, f não é sobrejetora. Não sendo sobrejetora, f também não é bijetora.

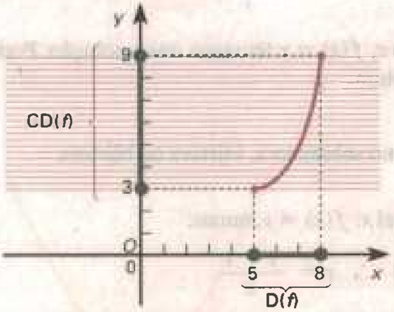
Temos então que f é apenas injetora.

R.3 O gráfico ao lado representa a função f: [5, 8] → [3, 9]. Classificar f como sobrejetora, injetora ou bijetora.



Resolução

Consideremos todas as retas paralelas ao eixo Ox que passam pelos pontos (0, y), com $y \in [3, 9]$.



Note que cada uma dessas retas intercepta o gráfico num **único** ponto. Logo, a função f é sobrejetora e injetora e, portanto, é bijetora.

5. Classificação de uma função f através da lei de associação $y = f(x)$

Dada a lei de associação $y = f(x)$ de uma função f, sobrejetora, injetora ou bijetora, a conclusão sobre qual dessas classificações ocorre pode ser feita da seguinte maneira:

I. Se para qualquer y, $y \in CD(f)$, a equação na variável x: $f(x) = y$ tem **pelo menos** uma solução, então f é sobrejetora.

II. Se para todo y, $y \in Im(f)$, a equação na variável x: $f(x) = y$ tem uma **única** solução, então f é injetora.

Note que, se essa condição é obedecida, então temos: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall \{x_1, x_2\} \subset D(f)$. Por isso, a função é injetora.

III. Se para qualquer y, $y \in CD(f)$, a equação na variável x: $f(x) = y$ tem **uma única** solução, então f é bijetora.

Exercícios resolvidos

R.4 Classificar a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^6$ como sobrejetora, injetora ou bijetora.

Resolução

Seja y, $y \in CD(f) = \mathbb{R}_+$. Resolvendo a equação na variável x: $f(x) = y$, temos:

$$x^6 = y \Rightarrow x = +\sqrt[6]{y} \text{ ou } x = -\sqrt[6]{y}\ .$$

Note que para **qualquer** $y \in CD(f) = \mathbb{R}_+$ existe x tal que $x = \pm\sqrt[6]{y}$, ou seja, $f(x) = y$. Logo, f é **sobrejetora**. Note, porém, que, para $y > 0$, x não é único. Por exemplo, tomando $y = 1$, temos:

$$x^6 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Assim sendo, a função f não é injetora e, portanto, não é bijetora.

Temos então que f é apenas sobrejetora.

R.5 Classificar a função $f: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{2}{x + 3}$ como sobrejetora, injetora ou bijetora.

Resolução

Seja y, $y \in CD(f) = \mathbb{R}$. Resolvendo a equação na variável x: $f(x) = y$, temos:

$$\frac{2}{x + 3} = y \Rightarrow y(x + 3) = 2 \ \therefore\ yx + 3y = 2 \ \therefore\ yx = 2 - 3y.$$

Note que essa equação, em x, só tem solução se $y \neq 0$. Pois para $y = 0$ teríamos:

$$0 \cdot x = 2 - 3 \cdot 0. \text{ (Absurdo!)}$$

Logo, a função f não é sobrejetora, pois existe o elemento 0 (zero) do contradomínio $\mathbb{R}$ de f que não é imagem de nenhum elemento x do domínio.

Supondo $y \neq 0$, a equação $yx = 2 - 3y$ pode ser escrita como: $x = \dfrac{2 - 3y}{y}$.

Assim, para todo $y \in Im(f)$, isto é, $y \neq 0$, a equação, em x, $f(x) = y$ tem uma única solução. Portanto f é injetora. Observe que f não é bijetora, pois não é sobrejetora.

Temos então que f é apenas injetora.

R.6 Classificar a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$ como sobrejetora, injetora ou bijetora.

Resolução

Seja y, $y \in CD(f) = \mathbb{R}$. Resolvendo a equação na variável x: $f(x) = y$, temos:

$$2x - 1 = y \Rightarrow 2x = y + 1 \ \therefore\ x = \frac{y + 1}{2}.$$

Note que para **qualquer** y, $y \in CD(f) = \mathbb{R}$, a equação, em x, $2x - 1 = y$ tem solução **única**. Logo, f é bijetora.

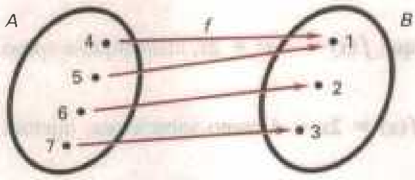
Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.6, B.12 (a, b, c), C.1, C.2, C.5 (a, b), C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.7, B.8, B.9, B.10, B.11, B.12 (d, e), C.3, C.4, C.5 (c, d), C.6.

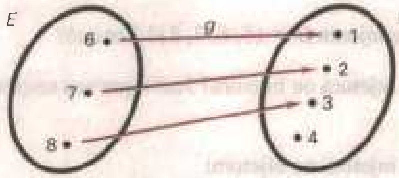
Exercícios básicos

B.1 Classifique cada uma das funções como sobrejetora, injetora ou bijetora:

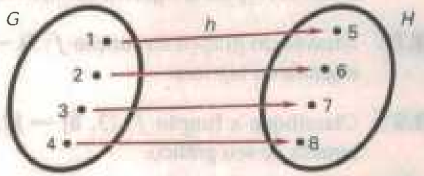
a)



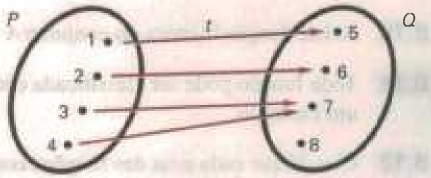
b)



c)



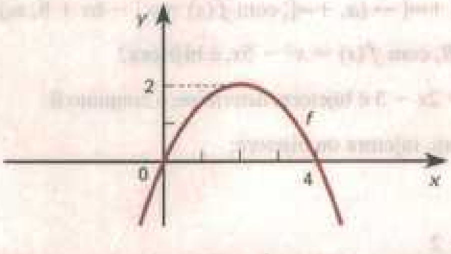
d)



B.2 Dados os conjuntos $A = \{-4, 4, 0, -5, 5\}$, $B = \{16, 0, 25\}$, $C = \{-3, 5, 1, -4, 6, 8\}$, $D = \{0, 8, 4, -1, 9\}$ e $E = \{16, 0, 25, 1\}$, classifique cada uma das funções como sobrejetora, injetora ou bijetora:

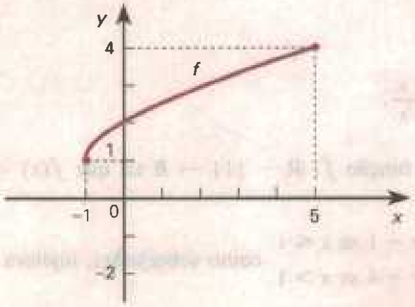
a) $f: A \rightarrow B$ tal que $f(x) = x^2$;
b) $g: A \rightarrow C$ tal que $f(x) = x + 1$;
c) $h: A \rightarrow D$ tal que $f(x) = x + 4$;
d) $t: A \rightarrow E$ tal que $t(x) = x^2$.

B.3 O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 2]$ é a parábola:



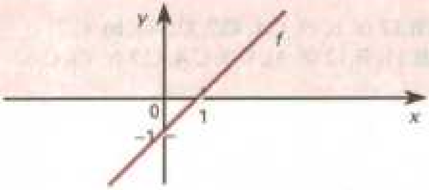
Classifique f como sobrejetora, injetora ou bijetora.

B.4 Analise o gráfico da função $f: [-1, 5] \rightarrow [-2, 4]$:



Classifique-a como sobrejetora, injetora ou bijetora.

B.5 Tem-se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é a seguinte reta:



Essa função é sobrejetora, injetora ou bijetora?

B.6 Construa o gráfico da função $f: [3, +\infty[\rightarrow [-4, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e depois classifique-a como sobrejetora, injetora ou bijetora.

B.7 Através do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 1]$ tal que $f(x) = -x^2 + 2x$, classifique-a como sobrejetora, injetora ou bijetora.

B.8 Classifique a função $f: [3, 8] \rightarrow [2, 12]$ tal que $f(x) = 2x - 4$ como sobrejetora, injetora ou bijetora, através de seu gráfico.

B.9 Construa o gráfico da função $f: [4, 6] \rightarrow [1, 5]$ tal que $f(x) = x - 3$ e depois classifique-a como sobrejetora, injetora ou bijetora.

B.10 Existe função bijetora do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ no conjunto $B = \{5, 6, 7, 8\}$? Por quê?

B.11 Toda função pode ser classificada como sobrejetora, injetora ou bijetora? Justifique sua resposta através de um exemplo.

B.12 Classifique cada uma das funções como sobrejetora, injetora ou bijetora:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^4$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = |x|$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x - 6$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

Exercícios complementares

C.1 Determine o conjunto B tal que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow B$, com $f(x) = x^2 - 4x$, seja sobrejetora.

C.2 Determine o número real a tal que a função $f: [3, +\infty[\rightarrow [a, +\infty[$, com $f(x) = x^2 - 6x + 8$, seja bijetora.

C.3 Qual é o conjunto B tal que a função $f: [6, 8] \rightarrow B$, com $f(x) = x^2 - 5x$, é bijetora?

C.4 Sabendo que a função $f: [2, 5] \rightarrow B$ tal que $f(x) = 2x - 3$ é bijetora, determine o conjunto B.

C.5 Classifique cada uma das funções como sobrejetora, injetora ou bijetora:

a) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$;

b) $f: \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 3}$;

c) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$;

d) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$ tal que $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

C.6 Determine o conjunto B, $B \subset \mathbb{R}$, sabendo que a função $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow B$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ é sobrejetora.

C.7 Classifique a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \leq 1 \\ x + 4 \text{ se } x > 1 \end{cases}$ como sobrejetora, injetora ou bijetora. (**Sugestão:** construa o gráfico de f.)

Questões dos vestibulares

V.1 (UFMG) Seja $f: A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B = \{1, 4, 6, 9\}$ a função sobrejetora tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Então A é igual a:

a) $\{1, -1, 2, -2, \sqrt{6}, -\sqrt{6}, 3, -3\}$

b) $\{1, 2, \sqrt{6}, 3\}$

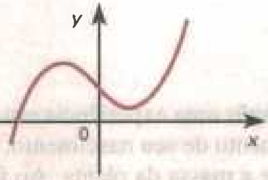
c) $\{1, -1, 16, -16, 36, -36, 81, -81\}$

d) $\{1, 16, 36, 81\}$

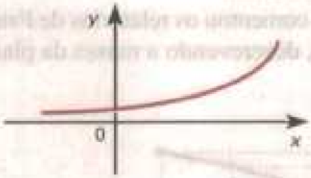
e) $\{x \in \mathbb{R}: x \geqslant 0\}$

V.2 (Cescem-SP) Dentre os gráficos, o que melhor se adapta a uma função bijetora (injetora e sobrejetora) com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ é:

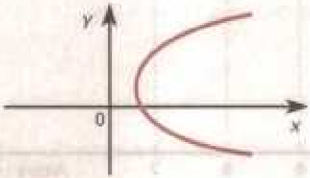
a)



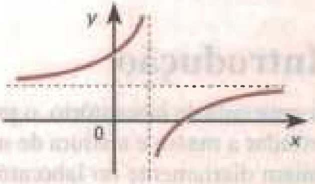
b)



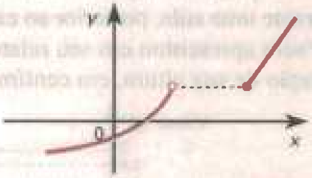
c)



d)



e)



V.3 (Mackenzie-SP) A aplicação $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é:

a) somente injetora.

b) somente sobrejetora.

c) bijetora.

d) nem injetora nem sobrejetora.

e) nenhuma das anteriores.

V.4 (Cescem-SP) Considere a função $f: \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$. Pode-se afirmar que:

a) f é injetora e não sobrejetora.

b) f é sobrejetora e não injetora.

c) f é bijetora.

d) existe x tal que $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

e) nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.

Capítulo 33

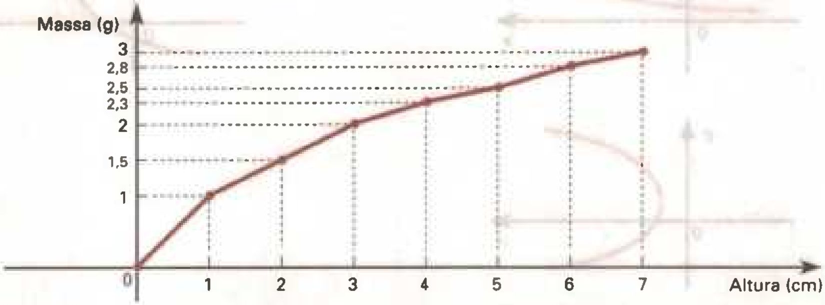
Conceito de funções inversas

1. Introdução

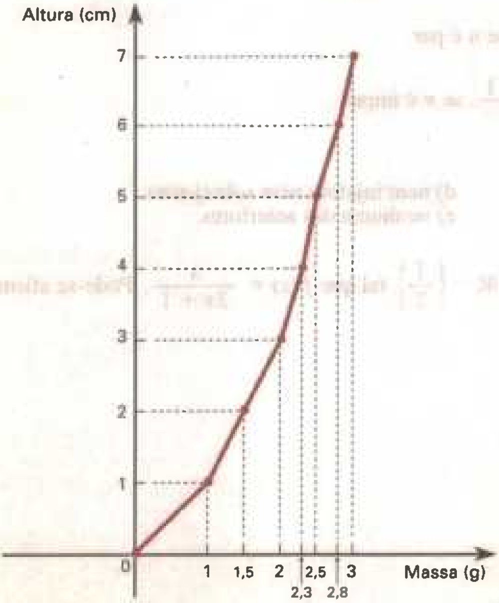
Em uma aula de laboratório, o professor de biologia propôs uma experiência em que os alunos deveriam estudar a massa e a altura de um planta, desde o momento de seu nascimento. Para isso, os alunos se reuniam diariamente no laboratório e mediam a altura e a massa da planta. Ao final da experiência, os alunos apresentaram relatórios sobre as observações realizadas.

Durante uma aula, posterior ao experimento, o professor comentou os relatórios de Paulo e Ana Maria:

- Paulo apresentou em seu relatório o seguinte gráfico, descrevendo a massa da planta, em gramas, em função de sua altura, em centímetros:



- Ana Maria apresentou em seu relatório o seguinte gráfico, descrevendo a altura da planta, em centímetros, em função da massa, em gramas:

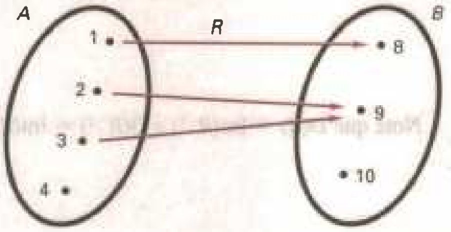


O professsor explicou que ambos os gráficos estavam corretos e que Paulo e Ana Maria apresentaram gráficos de "funções inversas entre si, ou seja, cada ponto (x, y) de um gráfico corresponde ao ponto (y, x) do outro. Por exemplo, o ponto $(7, 3)$ do gráfico de Paulo corresponde ao ponto $(3, 7)$ do gráfico de Ana Maria.

Formalizaremos agora o conceito de relações inversas e o de funções inversas.

2. Relações inversas

Consideremos a relação R de A em B, descrita pelo diagrama:

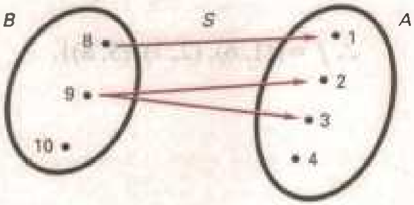


$\therefore R = \{(1, 8), (2, 9), (3, 9)\}$.

Vamos construir a relação S de B em A tal que: $(x, y) \in S \Leftrightarrow (y, x) \in R$, ou seja, cada par ordenado (x, y) de S é obtido invertendo-se a ordem dos elementos do par (y, x) de R. Assim, temos:

$(1, 8) \in R \Rightarrow (8, 1) \in S$; $(2, 9) \in R \Rightarrow (9, 2) \in S$; $(3, 9) \in R \Rightarrow (9, 3) \in S$.

A representação da relação S em diagrama de flechas é:



$\therefore S = \{(8, 1), (9, 2), (9, 3)\}$.

As relações R e S são chamadas de **relações inversas entre si.**

Definição

Seja R uma relação de A em B e seja S uma relação de B em A tal que

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (y, x) \in R.$$

Nessas condições, e somente nessas condições, as relações R e S são inversas entre si.

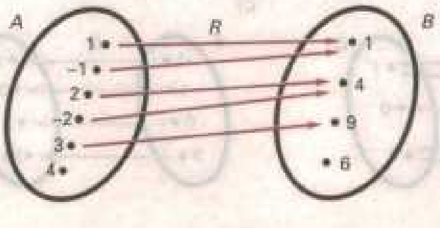
Indicaremos que R e S são relações inversas entre si por $S = R^{-1}$ (lê-se "S é igual à inversa da relação R"). Podemos indicar tal fato também por $R = S^{-1}$.

Exercício resolvido

R.1 Dados os conjuntos $A = \{1, -1, 2, -2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 4, 9, 6\}$, determinar a inversa da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$.

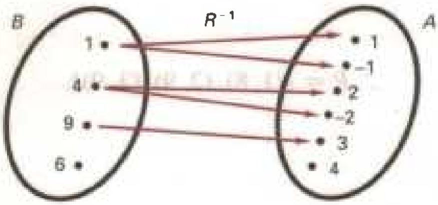
Resolução

A representação da relação R em diagrama de flechas é:



$\therefore R = \{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9)\}$.

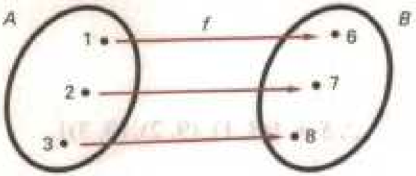
A relação R^{-1} é tal que $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$. Assim sendo, para obter R^{-1} basta inverter a ordem das coordenadas de cada par ordenado de R.
Logo, $R^{-1} = \{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3)\}$.
A representação de R^{-1} em diagrama de flechas é:



Note que $D(R) = Im(R^{-1})$ e $D(R^{-1}) = Im(R)$.

3. Funções inversas

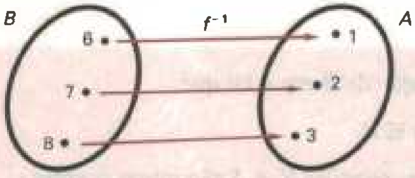
Consideremos a função $f: A \rightarrow B$, descrita pelo diagrama:



$\therefore f = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$.

A relação inversa de f é: $f^{-1} = \{(6, 1), (7, 2), (8, 3)\}$.

A representação de f^{-1} em diagrama de flechas é:



Note que f^{-1} **também** é função.

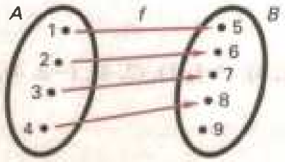
Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **invertível** se, e somente se, sua relação inversa f^{-1} de B em A **também** for função.
As funções f e f^{-1} são chamadas de "**funções inversas entre si**".

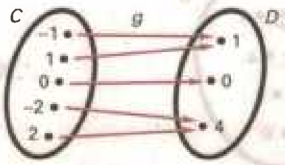
Exercício resolvido

R.2 Verificar se cada uma das funções é ou não invertível. Em caso afirmativo, determinar a inversa da função:

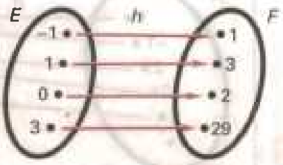
a)



b)

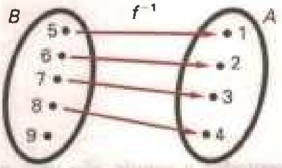


c)



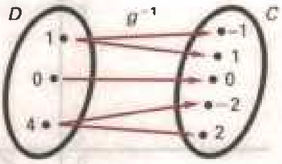
Resolução

a) A relação inversa de f é:



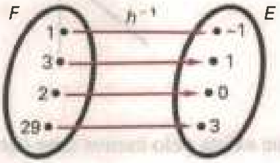
Note que f^{-1} **não** é função. Logo, f não é invertível.

b) A relação inversa de g é:



Note que g^{-1} **não** é função. Logo, g não é invertível.

c) A relação inversa de h é:



Note que h^{-1} é função. Logo, h é invertível e sua inversa é:

$$h^{-1} = \{(1, -1), (3, 1), (2, 0), (29, 3)\}.$$

4. Condição necessária e suficiente para que uma função seja invertível

Teorema

Uma função $f: A \to B$ é invertível se, e somente se, é **bijetora**.

Demonstração

1ª parte: provaremos que, se a função $f: A \to B$ é invertível, então f é bijetora.

De fato, temos por definição que, sendo f uma função de A em B:

$$f \text{ é invertível} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ é função.}$$

Como f^{-1} é função de B em A, temos que para todo y, $y \in B$, existe um **único** x, $x \in A$, tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

Mas $(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$.

Assim, para todo y, $y \in B$, existe um único x, $x \in A$, tal que $(x, y) \in f$. Logo, a função f é bijetora.

2ª parte: provaremos que, se a função $f: A \to B$ é bijetora, então f é invertível.

De fato:

I. sendo $f: A \to B$ uma função bijetora, temos que para todo y, $y \in B$, existe um único x, $x \in A$, tal que $(x, y) \in f$;

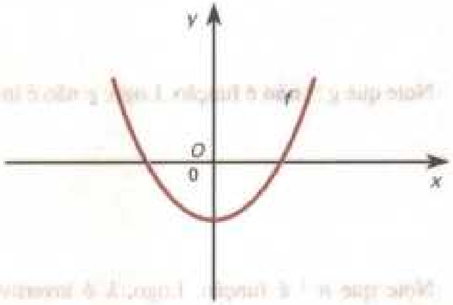
II. por outro lado, temos que a relação f^{-1}, de B em A, é tal que: $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

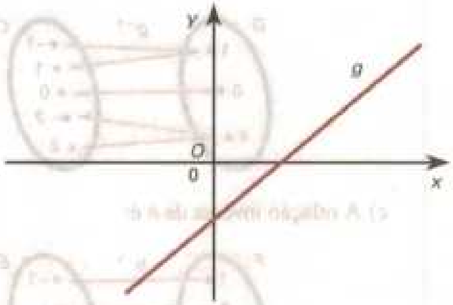
Por (I) e (II), temos que para todo y, $y \in B$, existe um único x, $x \in A$, tal que $(y, x) \in f$. Logo, f^{-1} é função e, portanto, f é invertível.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.3 Os gráficos das funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representados a seguir, são uma parábola e uma reta, respectivamente:

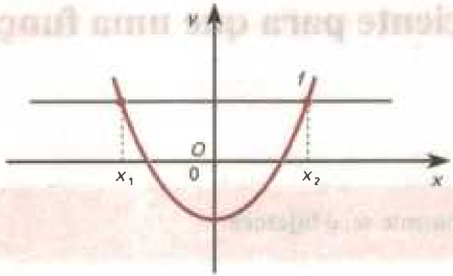




Qual das duas funções, f ou g, é invertível? Por quê?

Resolução

- A função f não é invertível, pois não é bijetora. Note que existe pelo menos uma paralela ao eixo Ox que intercepta o gráfico em mais de um ponto:



Isto é, existem elementos distintos x_1 e x_2, do domínio de f, que possuem a mesma imagem. Logo, f não é injetora e, portanto, não é bijetora.

- A função g é invertível, pois **toda** reta paralela ao eixo Ox intercepta o gráfico num único ponto. Logo, $CD(g) = Im(g) = \mathbb{R}$ e, portanto, g é sobrejetora; e elementos distintos do domínio $\mathbb{R}$ de g têm imagens distintas e, assim, g também é injetora. Logo, g é bijetora e, portanto, é invertível.

R.4 Quais das funções seguintes são invertíveis? Por quê?

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$;

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 1$;

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x|$;

d) $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = x^3$.

Resolução

a) f não é invertível, pois não é bijetora. Note que $f(3) = f(-3) = 9$. Isto é, existem elementos distintos de $D(f)$ que possuem a mesma imagem. Logo, f não é injetora e, portanto, não é bijetora.

b) g é invertível, pois é bijetora. Note que:

- $Im(g) = CD(g) = \mathbb{R}$; logo, g é sobrejetora;
- $2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$; logo, g é injetora.

Portanto g é bijetora.

c) h não é invertível, pois não é bijetora. Note que $h(5) = h(-5) = 5$. Isto é, existem elementos distintos de $D(h)$ que possuem a mesma imagem; logo, h não é injetora e, portanto, não é bijetora.

d) t é invertível, pois é bijetora. Note que:

- $\text{Im}(t) = \text{CD}(t) = \mathbb{R}$; logo, t é sobrejetora;
- $x_1^3 \neq x_2^3 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$; logo, t é injetora.

Portanto t é bijetora.

5. Técnica para a obtenção da inversa de uma função

A inversa de uma função bijetora $y = f(x)$, real de variável real, é obtida do seguinte modo:

I. fazemos a seguinte mudança de variáveis na função $y = f(x)$: trocamos x por y e y por x, escrevendo $x = f(y)$;

II. isolamos a variável y, após a mudança de variáveis, obtendo $y = f^{-1}(x)$.

Pense no porquê dessa técnica.

Exercícios resolvidos

R.5 Determinar a inversa da função bijetora $y = 3x - 1$ de domínio $D = \mathbb{R}$ e contradomínio $CD = \mathbb{R}$.

Resolução

- Trocando x por y e y por x, temos: $x = 3y - 1$.
- Isolando a variável y, temos: $x = 3y - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{3}$.

Assim, a inversa da função $f(x) = 3x - 1$ é a seguinte função: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

R.6 Determinar a inversa da função bijetora $y = \dfrac{x}{2x+4}$ de domínio $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ e contradomínio $CD = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Resolução

- Trocando x por y e y por x, temos: $x = \dfrac{y}{2y+4}$.
- Isolamos a variável y:

$$x = \frac{y}{2y+4} \Rightarrow x(2y+4) = y \therefore 2xy + 4x = y \therefore 4x = y - 2xy \therefore 4x = y(1-2x) \therefore \frac{4x}{1-2x} = y.$$

Assim, a inversa da função $f(x) = \dfrac{x}{2x+4}$ é a seguinte função:

$$f^{-1}(x) = \frac{4x}{1-2x}.$$

R.7 Tem-se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geq 0 & \text{(I)} \\ 3x + 1, \text{ se } x < 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

a) Construir o gráfico de f.

b) Classificar f como injetora, sobrejetora ou bijetora.

c) A função f admite inversa? Em caso afirmativo, determinar f^{-1}.

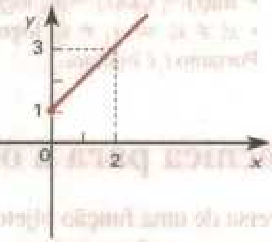
Resolução

a) Para construir o gráfico de f, analisemos cada uma de suas sentenças.

I. $f(x) = x + 1$, se $x \geqslant 0$

$f(x)$

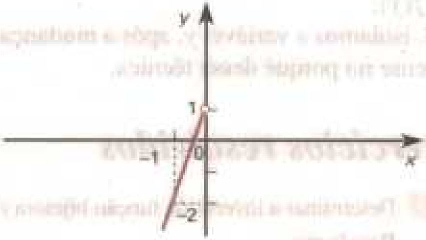
x	$x + 1$
0	1
2	3



II. $f(x) = 3x + 1$, se $x < 0$

$f(x)$

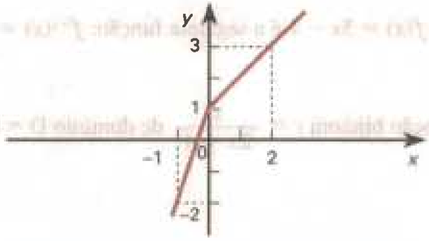
x	$3x + 1$
0	1
−1	−2



Nota

Embora a variável x não possa assumir o valor zero nesse segundo caso, atribuímos a ela o valor zero para obter um extremo **aberto** do gráfico.

A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é o gráfico da função f, ou seja:



b) Através do gráfico percebemos que o conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$ (logo, $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$) e que cada elemento do conjunto imagem é imagem de apenas um elemento do domínio de f. Assim, f é sobrejetora e injetora, ou seja, f é bijetora.

c) Como f é bijetora, concluímos que existe f^{-1}. Para determinar f^{-1}, analisemos cada uma das sentenças que compõem f:

I. $f(x) = x + 1$, se $x \geqslant 0$

Para facilitar, podemos escrever: $y = x + 1$, para $x \geqslant 0$.

- Trocando x por y e y por x, temos: $x = y + 1$, para $y \geqslant 0$.
- Isolando y, temos: $y = x - 1$, para $y \geqslant 0$.

Ou seja, $y = x - 1$, para $x - 1 \geqslant 0$. Ou, ainda, $f^{-1}(x) = x - 1$, para $x \geqslant 1$.

II. $f(x) = 3x + 1$, se $x < 0$

Para facilitar, podemos escrever: $y = 3x + 1$, para $x < 0$.

- Trocando x por y e y por x, temos: $x = 3y + 1$, para $y < 0$.
- Isolando y, temos: $y = \dfrac{x-1}{3}$, para $y < 0$.

Ou seja, $y = \dfrac{x-1}{3}$, para $\dfrac{x-1}{3} < 0$. Ou, ainda, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$, para $x < 1$.

Por (I) e (II), temos: $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ \dfrac{x-1}{3}, \text{ se } x < 1. \end{cases}$

R.8 Considerar a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 5 + |x - 5|$.

a) Construir o gráfico de f.

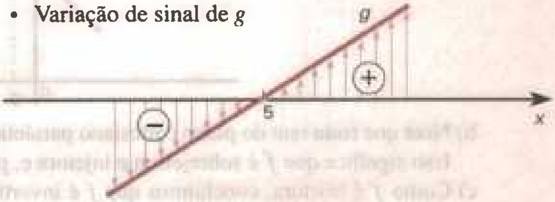
b) Classificar f como injetora, sobrejetora ou bijetora.

c) A função f admite inversa? Em caso afirmativo, determinar f^{-1}.

Resolução

a) Estudamos o sinal da função $g(x) = x - 5$.

- Raiz de g: $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.
- Variação de sinal de g



Logo, temos:

	5	
$g(x) = x - 5$	−	+

$\Longrightarrow$

	5	
$\|x - 5\| =$	$-x + 5$	$x - 5$

Representando a função f no eixo real:

	5	
⊕ $2x + 5 =$	$2x + 5$	$2x + 5$
$\|x - 5\| =$	$-x + 5$	$x - 5$
⊖ $2x + 5 + \|x - 5\| =$	$x + 10$	$3x$

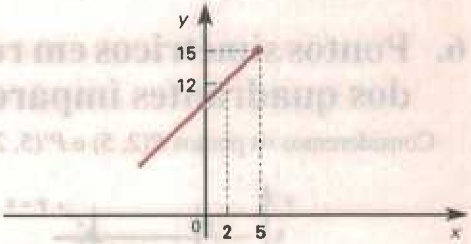
Assim, temos que:

$$f(x) = 2x + 5 + |x - 5| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x + 10, \text{ se } x \leqslant 5 & \text{(I)} \\ 3x, \text{ se } x \geqslant 5. & \text{(II)} \end{cases}$$

I. $f(x) = x + 10$, se $x \leqslant 5$

$f(x)$

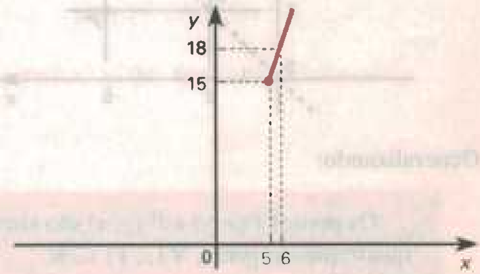
x	$x + 10$
5	15
2	12



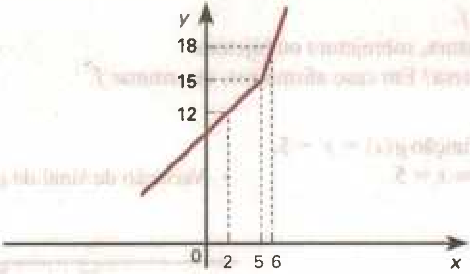
II. $f(x) = 3x$, se $x \geqslant 5$

$f(x)$

x	$3x$
5	15
6	18



A reunião dos gráficos de (I) e de (II) é o gráfico de f, ou seja:



b) Note que **toda** reta do plano cartesiano paralela ao eixo Ox intercepta o gráfico de f em um **único** ponto. Isso significa que f é sobrejetora e injetora e, portanto, f é bijetora.

c) Como f é bijetora, concluímos que f é invertível. Para determinar f^{-1}, analisemos cada uma das sentenças que compõem f:

I. $f(x) = x + 10$, se $x \leqslant 5$

Podemos escrever: $y = x + 10$, para $x \leqslant 5$.

- Trocando x por y e y por x, temos: $x = y + 10$, para $y \leqslant 5$.
- Isolando y, temos: $y = x - 10$, para $y \leqslant 5$.

Ou seja, $y = x - 10$, para $x - 10 \leqslant 5$. Ou, ainda, $f^{-1}(x) = x - 10$, para $x \leqslant 15$.

II. $f(x) = 3x$, se $x \geqslant 5$

Podemos escrever: $y = 3x$, para $x \geqslant 5$.

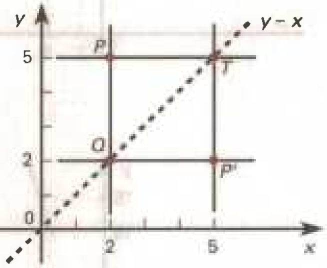
- Trocando x por y e y por x, temos: $x = 3y$, para $y \geqslant 5$.
- Isolando y, temos: $y = \frac{x}{3}$, para $y \geqslant 5$.

Ou seja, $y = \frac{x}{3}$, para $\frac{x}{3} \geqslant 5$. Ou, ainda, $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$, para $x \geqslant 15$.

Por (I) e (II), temos que: $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 10, \text{ se } x \leqslant 15 \\ \frac{x}{3}, \text{ se } x \geqslant 15. \end{cases}$

6. Pontos simétricos em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares

Consideremos os pontos $P(2, 5)$ e $P'(5, 2)$ do plano cartesiano:



Os pontos $Q(2, 2)$ e $T(5, 5)$ pertencem à reta de equação $y = x$, isto é, à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

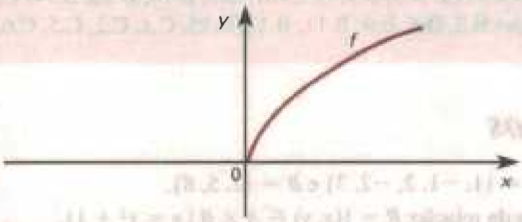
A figura $PTP'Q$ é um quadrado. Como dois vértices opostos de um quadrado são simétricos em relação à diagonal que não passa por eles, temos que os pontos P e P' são simétricos em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Generalizando:

Os pontos $P(x, y)$ e $P'(y, x)$ são simétricos em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares, $\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

7. Gráficos de funções inversas

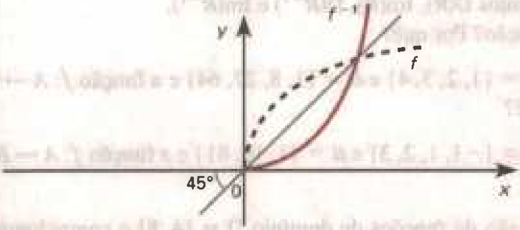
Seja f uma função bijetora cujo gráfico é:



Qual é o gráfico da função f^{-1}, inversa de f?

Sabemos que (x, y) é ponto de f^{-1} se, e somente se, (y, x) é o ponto de f. Assim sendo, para obter o gráfico de f^{-1}, basta transformarmos cada ponto (x, y) do gráfico de f em seu simétrico (y, x) em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Logo, o gráfico de f^{-1} é:



Generalizando:

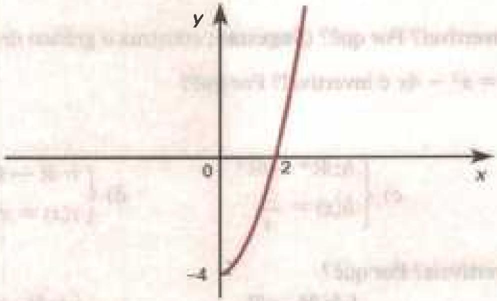
Os gráficos de duas funções inversas f e f^{-1} são simétricos em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Exercício resolvido

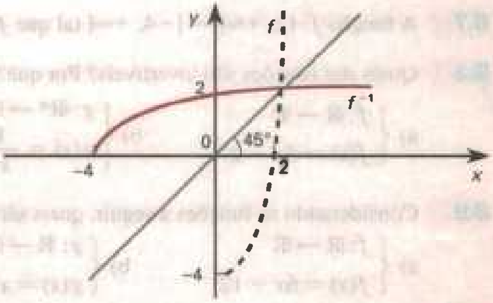
R.9 Construir o gráfico da inversa da função f: $[0, +\infty[\rightarrow [-4, +\infty[$, dada por $f(x) = x^2 - 4$.

Resolução

O gráfico da função f é:



O gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares. Logo, o gráfico de f^{-1} é:



Observe que $D(f) = Im(f^{-1}) = [0, +\infty[$ e $D(f^{-1}) = Im(f) = [-4, +\infty[$.

Generalizando:

Se duas funções f e f^{-1} são inversas entre si, então:

$$D(f) = Im(f^{-1}) \text{ e } D(f^{-1}) = Im(f).$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.6, B.7, B.8, B.10, B.12, B.14, C.3, C.4, C.7, C.8.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.9, B.11, B.13, B.15, C.1, C.2, C.5, C.6, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Sejam os conjuntos $A = \{1, -1, 2, -2, 3\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$.

a) Determine a inversa da relação: $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$.

b) Determine os conjuntos $D(R)$, $Im(R)$, $D(R^{-1})$ e $Im(R^{-1})$.

c) A relação R^{-1} é função? Por quê?

B.2 Considere os conjuntos $A = \{9, 4, 1, 0\}$ e $B = \{3, 2, 1, 0\}$.

a) Determine a inversa da relação: $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x}\}$.

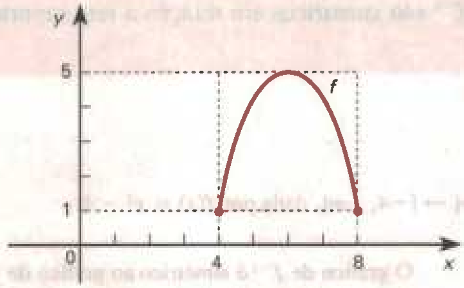
b) Determine os conjuntos $D(R)$, $Im(R)$, $D(R^{-1})$ e $Im(R^{-1})$.

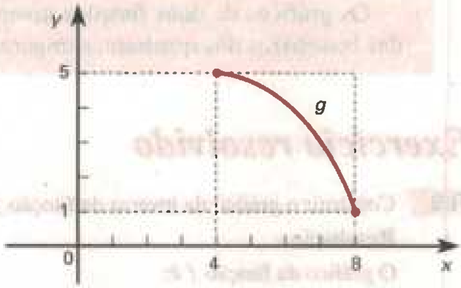
c) A relação R^{-1} é função? Por quê?

B.3 Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 8, 27, 64\}$ e a função $f: A \to B$, tal que $f(x) = x^3$. A função f é invertível? Por quê?

B.4 Dados os conjuntos $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 16, 81\}$ e a função $f: A \to B$ tal que $f(x) = x^4$. A função f é invertível? Por quê?

B.5 Os gráficos seguintes são de funções de domínio $D = [4, 8]$ e contradomínio $CD = [1, 5]$. Qual dessas funções é invertível? Por quê?





B.6 A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4x$ é invertível? Por quê? (**Sugestão:** construa o gráfico de f.)

B.7 A função $f: [2, +\infty[\to [-4, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 4x$ é invertível? Por quê?

B.8 Quais das funções são invertíveis? Por quê?

a) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 5x - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+^* \\ g(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ h(x) = \dfrac{5}{x} \end{cases}$ d) $\begin{cases} t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ t(x) = x^4 \end{cases}$

B.9 Considerando as funções a seguir, quais são invertíveis? Por quê?

a) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 6x - 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ h(x) = |x - 2| \end{cases}$ d) $\begin{cases} t: \mathbb{R} \to \{5\} \\ t(x) = 5 \end{cases}$

B.10 Determine a inversa de cada uma das funções bijetoras, sendo dados o domínio D e o contradomínio CD:

a) $y = 3x - 5$ com $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = 8x + 4$ com $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$;

c) $y = \dfrac{x + 3}{x - 2}$ com $D = \mathbb{R} - \{2\}$ e $CD = \mathbb{R} - \{1\}$;

d) $g(x) = \dfrac{5x - 2}{x + 8}$ com $D = \mathbb{R} - \{-8\}$ e $CD = \mathbb{R} - \{5\}$.

B.11 Cada uma das funções abaixo é bijetora de domínio D e contradomínio CD. Determine a inversa de cada uma:

a) $y = 9 - 3x$ com D = $\mathbb{R}$ e CD = $\mathbb{R}$;

b) $f(x) = 6x - 5$ com D = $\mathbb{R}$ e CD = $\mathbb{R}$;

c) $y = \dfrac{6x - 1}{3 - x}$ com D = $\mathbb{R} - \{3\}$ e CD = $\mathbb{R} - \{-6\}$;

d) $g(x) = \dfrac{4x - 1}{6x - 5}$ com D = $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{6}\right\}$ e CD = $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

B.12 Construa o gráfico da inversa da função f: $[3, +\infty[\to [-9, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 6x$.

B.13 Considere a função f: $[2, +\infty[\to]-\infty, 4]$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x$. Construa o gráfico de f^{-1}.

B.14 Construa o gráfico da função f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. (**Sugestão:** construa primeiro o gráfico da função f^{-1}; o gráfico de f é simétrico ao de f^{-1} em relação à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares.)

B.15 Construa o gráfico da função f: $[-1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

Exercícios complementares

C.1 R e R^{-1} são duas relações inversas entre si. Assinale a afirmação verdadeira:

a) Se $(5, 3) \in R$ então $(3, 5) \notin R^{-1}$.

b) Se $(5, 3) \in R$ e $(a, 5) \in R^{-1}$, então $a = 3$.

c) Se $(5, 3) \in R$ e $(a, 5) \notin R^{-1}$, então $a \neq 3$.

d) Se $(5, 3) \in R$ e $(a^2 + 2a, 5) \notin R^{-1}$, então $a = 1$.

e) $D(R) = D(R^{-1})$.

C.2 f e f^{-1} são duas funções inversas entre si. Assinale a afirmação falsa:

a) Se $(2, a) \in f$ e $(5, 2) \in f^{-1}$, então $a = 5$.

b) $D(f) = Im(f^{-1})$.

c) Se $(2, 5) \in f$, então $f^{-1}(5) = 2$.

d) Se $(2, 5) \in f$, então $f(f^{-1}(5)) = 5$.

e) Se $(2, 5) \in f$, então $f^{-1}(f(2)) = 5$.

C.3 Existe alguma função de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{4, 5, 6, 7\}$ que seja invertível? Por quê?

C.4 Determine a inversa da função f: $[2, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2 - 2x$.

C.5 Determine a inversa da função f: $[4, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

C.6 Dada a função f: $\mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$, determine:

a) $f^{-1}(x)$

b) $(f \circ f^{-1})(x)$

c) $(f^{-1} \circ f)(x)$

C.7 Sendo f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 6x - 1$, obtenha:

a) $(g \circ f)^{-1}$

b) $f^{-1} \circ g^{-1}$

C.8 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x + 4, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

a) Construa o gráfico de f.

b) Classifique f como injetora, sobrejetora ou bijetora.

c) A função f admite inversa? Em caso afirmativo, determine f^{-1}.

C.9 Seja f: $\mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$ a função tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -2x + 1, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

a) Construa o gráfico de f.

b) A função f admite inversa? Em caso afirmativo, determine f^{-1}.

C.10 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x + 2 + |x - 2|$.

a) Construa o gráfico de f.

b) Classifique f como injetora, sobrejetora ou bijetora.

c) A função f admite inversa? Em caso afirmativo, determine f^{-1}.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bijetora definida por $f(x) = x^3 + 1$, sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ e) Nenhuma das anteriores.

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$ d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

V.2 (FEI-SP) Determine a inversa da função bijetora $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$.

V.3 (Consart) O gráfico de uma função f é o segmento de reta cujos extremos são os pontos $(-3, 4)$ e $(3, 0)$. Se f^{-1} é a função inversa de f, então $f^{-1}(2)$ é:

a) 2 b) 0 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $-\dfrac{3}{2}$ e) não-definida.

V.4 (Mackenzie-SP) A função f definida em $\mathbb{R} - \{2\}$ por $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x}$ é invertível. O seu contradomínio é $\mathbb{R} - \{a\}$. O valor de a é:

a) 2 b) -2 c) 1 d) -1 e) Não sei.

Capítulo 34

Potenciação em IR (revisão)

Para estudar **função exponencial** e **logaritmos**, nossos próximos assuntos, necessitamos de pré-requisitos, como potenciação e radiciação em IR. Por isso, faremos uma breve revisão.

1. Potência de base real e expoente inteiro

Definição 1

Sendo a um número real e n um número inteiro maior que 1, define-se:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Exemplos

a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$

Definição 2

Sendo a um número real, define-se: $a^1 = a$.

Exemplos

a) $5^1 = 5$

b) $(-8)^1 = -8$

Definição 3

Sendo a um número real, define-se: $a^0 = 1$.

Exemplos

a) $8^0 = 1$

b) $\left(-\frac{7}{3}\right)^0 = 1$

c) $0^0 = 1$

Nota

Não há unanimidade, entre os matemáticos, quanto à adoção da definição $0^0 = 1$. Nesta obra, seguimos a orientação dos que adotam tal definição.

Definição 4

Sendo a um número real não-nulo e n um número inteiro, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplos

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}} = \frac{4}{3}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{3}} = \frac{125}{8}$

Nota

Para o cálculo de $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$, podemos simplesmente inverter a base da potência e trocar o sinal do expoente. Isto é, $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = \frac{125}{8}$.

2. Propriedades das potências de expoentes inteiros

Obedecidas as condições de existência, tem-se que:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

II. $a^m : a^n = a^{m-n}$,

III. $(a^n)^k = a^{nk}$,

IV. $(ab)^n = a^n b^n$,

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemplos

a) $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

b) $3^6 : 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$

c) $(6^4)^3 = 6^{4 \cdot 3} = 6^{12}$

d) $(5a)^2 = 5^2a^2 = 25a^2$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

Exercícios resolvidos

R.1 Simplificar a expressão $E = \frac{2^{n+2} - 2^n}{3 \cdot 2^{n+1}}$.

Resolução

Temos que: $2^{n+2} = 2^n \cdot 2^2$ e $2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1$.

Portanto a expressão E pode ser escrita como: $E = \frac{2^n \cdot 2^2 - 2^n}{3 \cdot 2^n \cdot 2}$.

Fatorando o numerador, temos que: $E = \frac{2^n(2^2 - 1)}{6 \cdot 2^n}$ $\therefore$ $E = \frac{2^2 - 1}{6} = \frac{3}{6}$ $\therefore$ $E = \frac{1}{2}$.

R.2 Sabendo que $a^{3+x} = b$, com $a \neq 0$, calcular a^{2x}, em função de a e b.

Resolução

Temos que $a^{3+x} = a^3 \cdot a^x$. Logo, a igualdade apresentada pode ser escrita: $a^3 \cdot a^x = b$ $\therefore$ $a^x = \frac{b}{a^3}$.

Elevando ao quadrado ambos os membros, temos que: $(a^x)^2 = \left(\frac{b}{a^3}\right)^2$ $\therefore$ $a^{2x} = \frac{b^2}{a^6}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3.
Tarefa de casa: exercícios C.1, C.2, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule os valores das potências:

a) 6^2

b) $(-6)^2$

c) -6^2

d) $(-2)^3$

e) -2^3

f) 5^0

g) $(-8)^0$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

k) 0^{28}

l) 1^{32}

m) $(-1)^{20}$

n) $(-1)^{17}$

o) 4^{-2}

p) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

q) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

s) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

t) $(-5)^{-3}$

B.2 Obedecidas as condições de existência, efetue:

a) $(3x)^4$

b) $(x^3)^5$

c) $(2x^2)^3$

d) $(5a^2b^3)^3$

e) $\left(\frac{3a}{b^2}\right)^4$

f) $\left(\frac{2ab^3}{5x^4}\right)^{-2}$

g) $\left(-\frac{1}{3a^2}\right)^{-4}$

B.3 Obedecidas as condições de existência, efetue:

a) $a^6 \cdot a^4$

b) $a^8 : a^3$

c) $\left(\frac{2ab^2}{c^3}\right)^2\left(\frac{a^2c}{b}\right)^3$

d) $\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2 : \left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3$

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $(1{,}2)^{10} = 6{,}19$ e que $(1{,}2)^7 = 3{,}58$, calcule $(1{,}2)^{17}$.

C.2 Calcule o valor da expressão: $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$

C.3 Calcule o valor da expressão: $A = (0{,}25)^{-2} - (0{,}5)^{-3} + (0{,}125)^{-1}$

C.4 Simplifique a expressão: $E = \dfrac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1}}$.

C.5 Simplifique a expressão: $E = \dfrac{2^{n+4} + 2^{n+3}}{3 \cdot 2^{n+3} - 2^{n+3}}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é:
a) 0,0264 b) 0,0336 c) 0,1056 d) 0,2568 e) 0,6256

V.2 (Fuvest-SP) Se $4^{16} \cdot 5^{25} = \alpha \cdot 10^n$, com $1 \leqslant \alpha < 10$, então n é igual a:
a) 24 b) 25 c) 26 d) 27 e) 28

V.3 (F. Santo André-SP) Simplifique $\dfrac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}}$.

Capítulo 35

Radiciação em ℝ (revisão)

1. Radiciação em ℝ

Definição 1

> Sendo *a* um número real não-negativo e *n* um inteiro positivo, define-se:
>
> $$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0, \text{ com } b \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ e $2 \geqslant 0$.

b) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$ e $3 \geqslant 0$.

c) $\sqrt[1]{5} = 5$, pois $5^1 = 5$ e $5 \geqslant 0$.

d) $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$ e $0 \geqslant 0$.

Nota

A radiciação em ℝ é uma operação e, como tal, é função. Portanto o resultado deve ser **único**. É por isso que a definição exige $b \geqslant 0$, para evitarem-se erros do tipo $\sqrt{9} = \pm 3$.

Definição 2

> Sendo *a* um número real positivo e *n* um número inteiro positivo, define-se:
>
> $$\sqrt[n]{-a} = b \Leftrightarrow b^n = -a, \text{ com } b \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

b) $\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$.

c) $\sqrt{-9} = ?$ (Qual o número real cujo quadrado é igual a -9? Não existe tal número.)

Perceba que não existe, em ℝ, radical de índice par e radicando negativo.

2. Propriedades dos radicais

As propriedades a seguir só podem ser aplicadas para radicais com radicandos **não**-negativos.

Obedecidas as condições de existência, tem-se que:

I. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,

II. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$,

III. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$,

IV. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$,

V. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{8}{2}} = \sqrt[5]{4}$

c) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$

d) $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3 \cdot 2]{7} = \sqrt[6]{7}$

3. Simplificação de radicais

Exercício resolvido

R.1 Simplificar os radicais:

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{160}$

Resolução

a) $$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 50 = 2 \cdot 5^2$$

Logo, $\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}}}\ \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 16 = 2^4$$

Logo, $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}\ \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 160 = 2^5 \cdot 5.$$

Logo, $\sqrt{160} = \sqrt{2^5 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{4}}}\ \sqrt{2 \cdot 5} = 2^2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

4. Operações com radicais

Exercício resolvido

R.2 Efetuar:

a) $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{18} + 3\sqrt{8}$ c) $3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{3}$ d) $4\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$

Resolução

a) $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \underbrace{\sqrt{5}}_{\textbf{Fator comum}}(6 + 3 - 2) = 7\sqrt{5}$.

b) $\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 18 = 3^2 \cdot 2,$ $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 8 = 2^3.$

Assim temos:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Logo, $4\sqrt{18} + 3\sqrt{8} = 4 \cdot 3\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

c) $3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{3} = (3 \cdot 5)(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}) = 15\sqrt[3]{6}$.

d) $4\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4}{2}\sqrt{\dfrac{6}{3}} = 2\sqrt{2}$.

5. Potência de expoente racional

Definição 1

Sendo a um número real positivo e os números inteiros k e n, $n \geqslant 1$, define-se:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Exemplos

a) $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$

b) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c) $16^{-0,25} = 16^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$

Definição 2

Sendo k e n números inteiros positivos, define-se:

$$0^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{0^k} = 0.$$

Exemplo

$$0^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{0^4} = \sqrt[3]{0} = 0$$

6. Propriedades das potências de expoentes racionais

Demonstra-se que as cinco propriedades enunciadas para potências de expoentes inteiros **continuam** válidas para potências de expoentes racionais. Isto é, obedecidas as condições de existência, temos:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

II. $a^m : a^n = a^{m-n}$,

III. $(a^n)^k = a^{nk}$,

IV. $(ab)^n = a^n b^n$,

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

$\forall m, n, k; \{m, n, k\} \subset \mathbb{Q}$.

Exemplos

a) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{7}{12}}$

b) $2^{\frac{3}{5}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{10}}$

c) $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}} = 3^{\frac{8}{15}}$

d) $(3a)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ (com $a \geqslant 0$).

e) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular o valor da expressão: $E = 16^{0,5} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2}$.

Resolução

A expressão E pode ser escrita na forma: $E = (2^4)^{0,5} + (2^3)^{\frac{1}{3}} + (2^5)^{0,2}$.

Pelas propriedades das potências de expoentes racionais, temos que:

$$(2^4)^{0,5} = 2^{4 \cdot 0,5} = 2^2 = 4,$$

$$(2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 2,$$

$$(2^5)^{0,2} = 2^{5 \cdot 0,2} = 2^1 = 2.$$

Logo, $E = 4 + 2 + 2 \therefore E = 8$.

R.4 Sabendo que $a^{5x} = b$, $b > 0$ e $x \in \mathbb{Q}$, calcular a^{-x}, em função de b.

Resolução

Temos que $a^{5x} = (a^x)^5$. Logo, a igualdade apresentada pode ser escrita como: $(a^x)^5 = b$.

Elevando a $-\frac{1}{5}$ ambos os membros dessa última igualdade, temos que:

$$[(a^x)^5]^{-\frac{1}{5}} = b^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow (a^x)^{-1} = b^{-\frac{1}{5}}.$$

Logo, $a^{-x} = b^{-\frac{1}{5}}$.

7. Potência de expoente irracional

Como poderíamos definir a potência $3^{\sqrt{2}}$?

Sabemos que $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ é um número irracional. Para definirmos $3^{\sqrt{2}}$, consideremos as seguintes tabelas:

	Valores x de $\sqrt{2}$ aproximados por falta	Valores t de $\sqrt{2}$ aproximados por excesso
Com uma casa decimal	1,4	1,5
Com duas casas decimais	1,41	1,42
Com três casas decimais	1,414	1,415
Com quatro casas decimais	1,4142	1,4143
⋮	⋮	⋮

Valores 3^x, onde x é valor de $\sqrt{2}$, aproximado por falta	Valores 3^t, onde t é valor de $\sqrt{2}$, aproximado por excesso
$3^{1,4} = 4,655536722$	$3^{1,5} = 5,196152423$
$3^{1,41} = 4,706965002$	$3^{1,42} = 4,758961394$
$3^{1,414} = 4,727695035$	$3^{1,415} = 4,732891793$
$3^{1,4142} = 4,72873393$	$3^{1,4143} = 4,729253463$
⋮	⋮

Os valores nas colunas que dão 3^x e 3^t **convergem** para um mesmo número. Esse número é definido como $3^{\sqrt{2}}$. Observe que, até onde fomos nas tabelas, percebemos:

$$4,72873393 < 3^{\sqrt{2}} < 4,729253463.$$

De maneira análoga, define-se qualquer potência de expoente irracional e base a, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Nota

Sendo t um número irracional positivo, tem-se $0^t = 0$.

Exemplo

$$0^{\sqrt{2}} = 0$$

8. Propriedades das potências de expoentes irracionais

As propriedades válidas para potências de expoentes racionais também são válidas para potências de expoentes irracionais.

Exemplos

a) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{2\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}}$

b) $3^{5\pi} : 3^{\pi} = 3^{5\pi - \pi} = 3^{4\pi}$

c) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 3^2 = 9$

d) $(3a)^{\sqrt{5}} = 3^{\sqrt{5}} \cdot a^{\sqrt{5}}$ (com $a \geqslant 0$)

e) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}} = \dfrac{3^{\sqrt{3}}}{2^{\sqrt{3}}}$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, C.1, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.6, B.7, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) $\sqrt[3]{125}$
b) $\sqrt[5]{243}$
c) $\sqrt{36}$
d) $\sqrt[5]{1}$
e) $\sqrt[6]{0}$
f) $\sqrt[1]{5}$
g) $\sqrt[3]{-125}$
h) $\sqrt[5]{-32}$
i) $\sqrt[7]{-1}$

B.2 Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{40}$
b) $\sqrt{80}$
c) $\sqrt{24}$
d) $\sqrt[5]{128}$
e) $\sqrt{40}$
f) $\sqrt{12}$
g) $\sqrt{\dfrac{20}{9}}$
h) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$
i) $\sqrt{\dfrac{18}{25}}$

B.3 Efetue:

a) $6\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$
b) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18}$
c) $2\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{3}$
d) $4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}$
e) $3\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$
f) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$
g) $8\sqrt{10} : 2\sqrt{5}$
h) $20\sqrt[3]{6} : 4\sqrt[3]{2}$

B.4 Escreva as potências sob forma de radicais:

a) $5^{\frac{2}{3}}$
b) $7^{\frac{3}{5}}$
c) $9^{\frac{1}{2}}$
d) $8^{\frac{1}{3}}$
e) $4^{\frac{7}{5}}$
f) $8^{\frac{2}{5}}$

B.5 Escreva os radicais sob forma de potência:

a) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[3]{7}$ e) $\sqrt[3]{x^6}$ (com $x \geqslant 0$)

b) $\sqrt[5]{a^3}$ (com $a \geqslant 0$) d) $\sqrt{5}$ f) $\sqrt[6]{x^4}$ (com $x \geqslant 0$)

B.6 Calcule o valor da expressão $A = 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{4}}$.

B.7 Calcule o valor da expressão $A = (0{,}25)^{0{,}5} + 81^{0{,}25} + 16^{-0{,}5}$.

Exercícios complementares

C.1 A expressão $E = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$ é igual a:

a) $4\sqrt{2}$ b) 4 c) $2\sqrt{2}$ d) $2^{\sqrt{2}}$ e) 2

C.2 A expressão $E = (5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{\frac{1}{3}}}$ é igual a:

a) 5 b) 5^3 c) $5^{\sqrt{3}}$ d) $5\sqrt{3}$ e) 15

C.3 Se $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}} = x$, então:

a) $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ c) $x^{\sqrt{2}} = 3$ e) $x^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$

b) $x^{\sqrt{2}} = 3\sqrt{3}$ d) $x^{\sqrt{2}} = 2$

C.4 A expressão $E = 1^{\pi} + 0^{\sqrt{5}}$ é igual a:

a) π b) 1 c) $\pi + \sqrt{5}$ d) 2 e) 0

C.5 A expressão $E = \dfrac{3^{\sqrt{2}} + 9^{\sqrt{2}}}{3^{\sqrt{2}}(1 + 3^{\sqrt{2}})}$ é igual a:

a) 1 b) $3^{\sqrt{2}}$ c) 3 d) 5 e) $5\sqrt{2}$

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$ é igual a:

a) 2,5 b) 0 c) 2^3 d) 1 e) -1

V.2 (Cescem-SP) $9^{2{,}5} - 1024^{0{,}1}$ é igual a:

a) -83 b) -81 c) 241 d) 243 e) 245

V.3 (Fatec-SP) Se os números reais positivos a, b e c são tais que:

$$c = \frac{3a^3}{2b^2}\left[\frac{\sqrt[3]{9a^4}}{4b^2}\right]^{-\frac{3}{2}},$$

então c é igual a:

a) $\dfrac{2b\sqrt[3]{a^2b^2}}{a}$ b) $\dfrac{3a}{b\sqrt{ab}}$ c) $4a^2b$ d) $6ab^2$ e) $4ab$

V.4 (Fesp-SP) Se $5^{3x} = 8$, então o valor de 5^{-x} é:

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{6}$

Capítulo 36

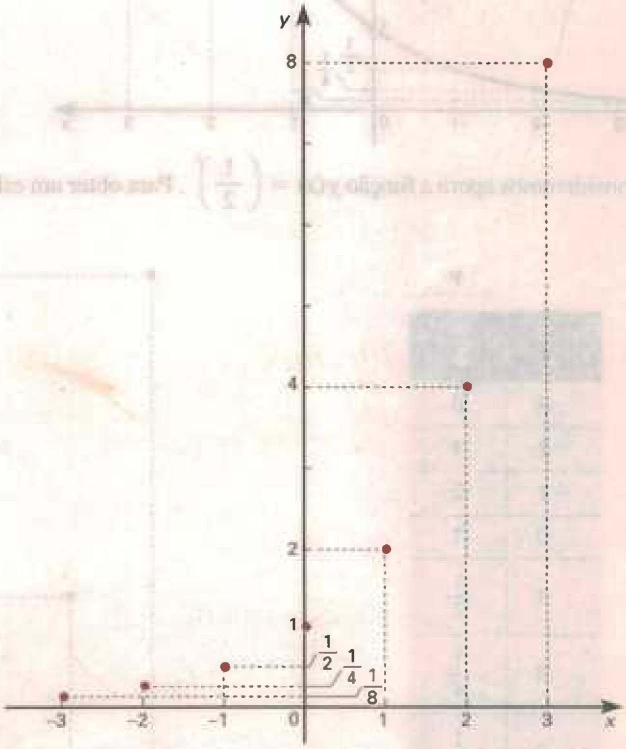
Função exponencial

1. Conceituação

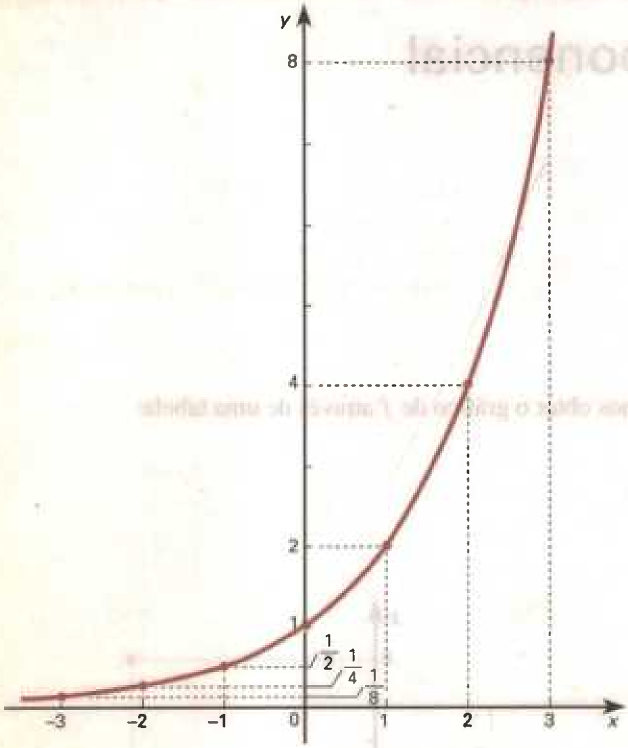
Consideremos a função $f(x) = 2^x$. Podemos obter o gráfico de f através de uma tabela:

y

x	2x
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Se atribuirmos a x **todos** os valores reais, teremos o gráfico:

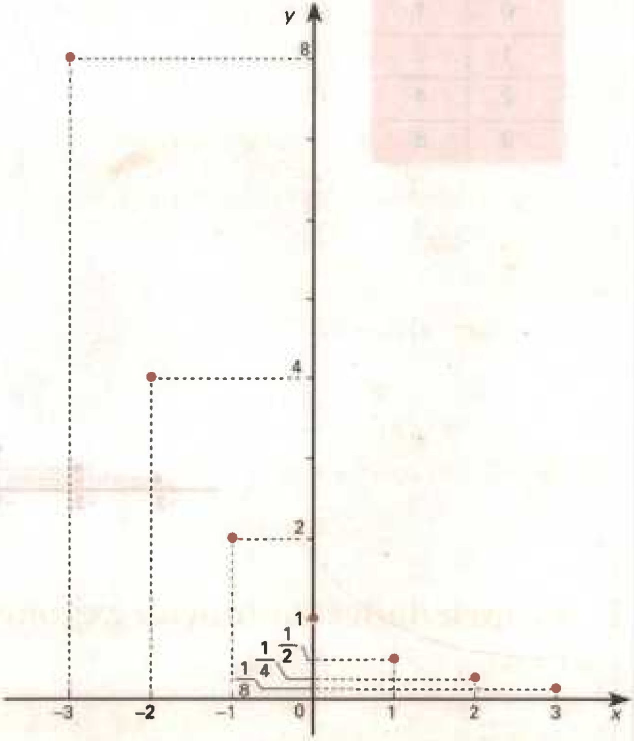


Note que:

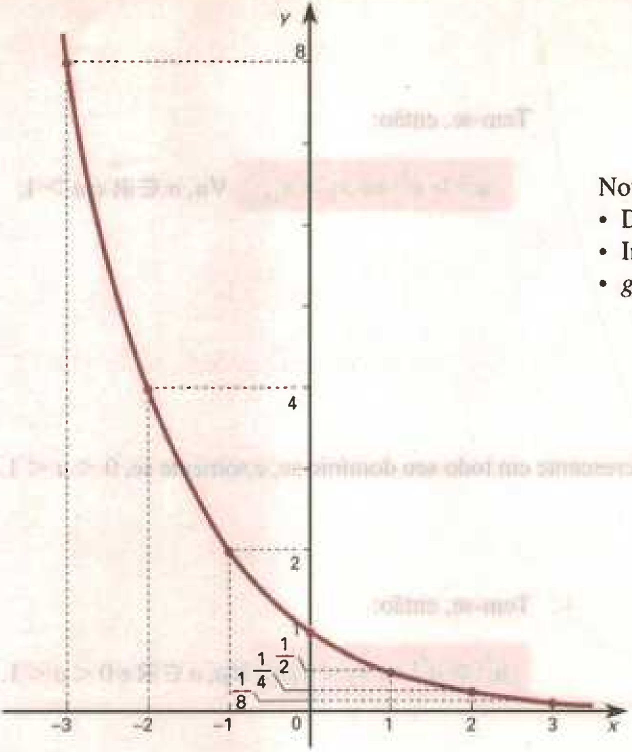
- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = \mathbb{R}_+$;
- f é crescente em todo seu domínio.

Consideremos agora a função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para obter um esboço do gráfico, vamos construir a tabela:

	y
x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Se atribuirmos a x todos os valores reais, teremos o gráfico:



Note que:

- $D(g) = \mathbb{R}$;
- $Im(g) = \mathbb{R}_+$;
- g é decrescente em todo seu domínio.

As funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ são chamadas de **funções exponenciais.**

Definição

Chama-se função exponencial toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, em que a é uma constante real positiva e diferente de 1.

Exemplos

a) **São** funções exponenciais:

$f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $h(x) = 7^x$; $t(x) = (0,2)^x$

b) **Não são** funções exponenciais:

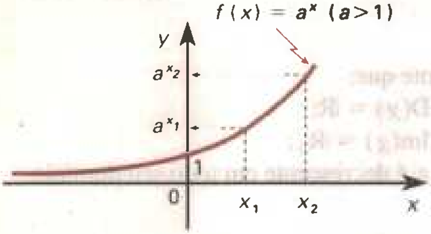
$f(x) = 1^x$; $g(x) = (-2)^x$; $h(x) = (-1)^x$; $t(x) = 0^x$.

2. Propriedades da função exponencial

E.1 Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y.$$

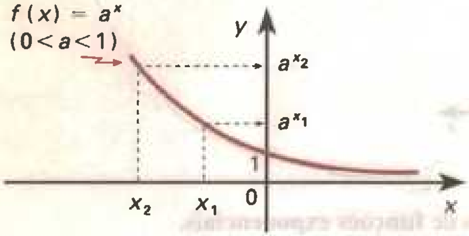
E.2 A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$.



Tem-se, então:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1, \quad \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1.$$

E.3 A função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$.



Tem-se, então:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1, \quad \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < a < 1.$$

E.4 Toda função exponencial, isto é, $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, é bijetora.

3. Equação exponencial

É toda equação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas e diferentes de 1.

Exemplos

a) $3^x = 9$ b) $5^{2x} + 5^x = 30$ c) $6^x = 2$

3.1. Resolução de uma equação exponencial

A resolução de uma equação exponencial baseia-se na propriedade E.1, isto é, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Apresentamos, como exercícios resolvidos, alguns tipos de equações exponenciais.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver em IR a equação $125^x = 625$.

Resolução

Resolveremos essa equação transformando-a numa igualdade de duas potências de mesma base. Para isso, fatoramos os números 125 e 625:

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 125 = 5^3; \qquad \begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 625 = 5^4.$$

Assim, temos:

$$125^x = 625 \Rightarrow (5^3)^x = 5^4 \therefore 5^{3x} = 5^4 \xrightarrow{\text{Prop. E.1}} 3x = 4 \therefore x = \frac{4}{3}.$$

Logo, $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

R.2 Resolver em IR a equação $2^x = 1$.

Resolução

O número 1 pode ser escrito como 2^0.

Logo, $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \therefore$ pela propriedade E.1, temos $x = 0$.

Logo, $S = \{0\}$.

R.3 Resolver em IR a equação $3^x = 2^x$.

Resolução

Dividindo ambos os membros da equação por 2^x, temos:

$$3^x = 2^x \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{2^x}{2^x} \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \xrightarrow{\text{Prop. E.1}} x = 0.$$

Logo, $S = \{0\}$.

R.4 Resolver em IR a equação $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Resolução

A equação pode ser escrita sob a forma:

$$(3^2)^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $3^x = t$, temos: $t^2 - 10t + 9 = 0$.

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64 \therefore t = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \therefore t = 9 \text{ ou } t = 1.$$

Voltando à variável x, temos: $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \therefore x = 2$ ou $3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \therefore x = 0$.

Logo, $S = \{0, 2\}$.

R.5 Resolver em IR a equação $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$.

Resolução

$$2^{x+3} + 2^{x-1} = 17 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x : 2^1 = 17 \therefore 8 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = 17.$$

Fazendo a mudança de variável $2^x = t$, temos:

$$8t + \frac{t}{2} = 17 \Rightarrow \frac{16t + t}{\cancel{2}} = \frac{34}{\cancel{2}} \therefore 17t = 34 \Rightarrow t = 2.$$

Voltando à variável x, temos: $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Logo, $S = \{1\}$.

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $3^{x+1} + 9^{x-1} = 10$.

Resolução

$$3^{x+1} + 9^{x-1} = 10 \Rightarrow 3^{x+1} + (3^2)^{x-1} = 10 \therefore 3^{x+1} + 3^{2x-2} = 10$$

$$\therefore 3^x \cdot 3 + 3^{2x} : 3^2 = 10 \therefore 3 \cdot 3^x + \frac{(3^x)^2}{9} = 10.$$

Fazendo a mudança de variável $3^x = t$, temos:

$$3t + \frac{t^2}{9} = 10 \Rightarrow \frac{27t + t^2}{\cancel{9}} = \frac{90}{\cancel{9}} \therefore t^2 + 27t - 90 = 0.$$

$$\Delta = (27)^2 - 4 \cdot 1(-90) = 1089.$$

$$t = \frac{-27 \pm \sqrt{1\,089}}{2} = \frac{-27 \pm 33}{2} \therefore t = 3 \text{ ou } t = -30.$$

Voltando à variável x, temos: $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$ ou $3^x = -30 \Rightarrow \nexists\, x$, pois toda potência de base positiva é positiva.

Logo, $S = \{1\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até f), B.2 (a até e), B.3 (a, b, c), B. 4 (a, b, c), C.1 (a, b).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (g até l), B.2 (f até l), B.3 (d, e, f), B.4 (d até h), C.1 (c, d), C.2.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $64^x = 256$
b) $25^{x+2} = 125^{x+5}$
c) $9^{2x-1} = 27^{5x+1}$
d) $13^x = 1$
e) $5^{2x-1} = 1$
f) $7^x = 8^x$
g) $8^{x+2} = 16^{x-1}$
h) $49^{2x} = 343^{3x+2}$
i) $9^{x-1} - 81 = 0$
j) $7^{x^2-10x+16} = 1$
k) $3^x - 5^x = 0$
l) $3^x \cdot 2^x = 6^{3x-1}$

B.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das equações:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{8}$
b) $\left(\frac{8}{27}\right)^{3x+1} = \left(\frac{4}{9}\right)^x$
c) $(\sqrt{2})^x = \sqrt{8}$
d) $\sqrt{3^{x-1}} = (\sqrt[5]{9^x})^2$
e) $(\sqrt[6]{32^{x+1}})^5 = \sqrt[3]{2}$
f) $(\sqrt[3]{3^x})^x = \sqrt[3]{81}$
g) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2} = \left(\frac{25}{49}\right)^x$
h) $\left(\frac{8}{125}\right)^{2x-1} = 1$
i) $\sqrt[5]{81^x} = \sqrt{3}$
j) $\sqrt[7]{8^x} = (\sqrt{4^{x-1}})^3$
k) $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^{x+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$
l) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{25}{9}\right)^{x+1}$
m) $\left(\frac{1}{32}\right)^x = 64^{2x-1}$

B.3 Determine o conjunto dos valores x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem cada uma das equações:

a) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$
b) $3^{x+1} - 3^{x+2} = -54$
c) $2 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-2} = 30$
d) $5^{x-2} + 5^{x+1} = 126$
e) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} + 36^x = 72$
f) $5 \cdot 2^{x-2} + 3 \cdot 2^{x-1} = 44$

B.4 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$
c) $4^{x+1} - 2^{x+1} - 56 = 0$
d) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
e) $25^{x+\frac{1}{2}} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$
f) $9^{x-\frac{3}{2}} + 3^{x+1} = 30$
g) $2 \cdot 9^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-2} = 22$
h) $5 \cdot 2^{x-2} + 3 \cdot 4^{x-1} = 58$

Exercícios complementares

C.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $3^x - 10(\sqrt{3})^x + 9 = 0$ (**Sugestão:** $3 = (\sqrt{3})^2$.)

b) $(\sqrt{2})^{x+4} + (\sqrt[4]{2})^x - 5 = 0$ (**Sugestão:** $\sqrt{2} = (\sqrt[4]{2})^2$.)

c) $8^x - 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} = 0$

d) $8^x - 2 \cdot 4^x + 2^x - 2 = 0$

C.2 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $1^x = 1^y \Leftrightarrow x = y$

b) $(-1)^x = (-1)^y \Leftrightarrow x = y$

c) $0^x = 0^y \Leftrightarrow x = y$

d) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y, \forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$

e) $1^x > 1^y \Leftrightarrow x > y$

f) $(-1)^x > (-1)^y \Leftrightarrow x > y$

g) $0^x > 0^y \Leftrightarrow x > y$

h) $5^x > 5^y \Leftrightarrow x > y$

i) $5^x > 5^y \Leftrightarrow x < y$

j) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y \Leftrightarrow x > y$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y \Leftrightarrow x < y$

l) $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y, \forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$

m) $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y, \forall a, a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-MG) Sendo x e y reais, o valor de $x + y$ no sistema $\begin{cases} 2^x = 4^y \\ 25^x = 25 \cdot 5^y \end{cases}$ é:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 1 e) 2

V.2 (PUC-RJ) A soma das raízes da equação $5^{x^2 - 2x + 1} = \frac{5625}{9}$ é:

a) -4 b) -2 c) -1 d) 2 e) 4

V.3 (ITA-SP) Determine o conjunto solução da equação $3^{2x} + 5^{2x} - 15^x = 0$. (**Sugestão:** divida ambos os membros da igualdade por 15^x.)

$\left(\frac{3}{15}\right)^x + \left(\frac{5}{15}\right)^x$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

Capítulo 37

Inequação exponencial

1. Conceituação

Inequação exponencial é toda inequação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas e diferentes de 1.

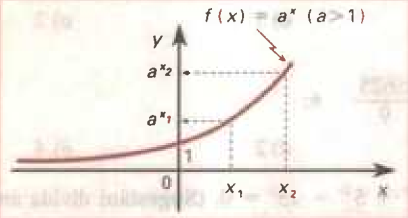
Exemplos

a) $5^x > 25$ b) $3^x + 3^{x+1} \leqslant 12$ c) $3^x \geqslant 2^x$

2. Resolução de uma inequação exponencial

A resolução de uma inequação exponencial baseia-se em uma das propriedades, E.2 ou E.3, das funções exponenciais.

E.2 Toda função $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$ é crescente em todo seu domínio.

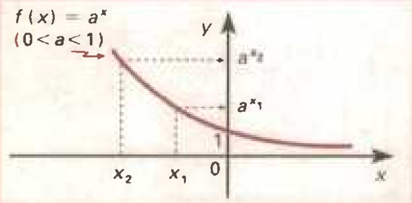


Temos, então:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1, \quad \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$

Ou seja, o "sentido" ($>$) da desigualdade entre duas potências de mesma base a, $a > 1$, se mantém ($>$) para os expoentes.

E.3 Toda função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, é decrescente em todo seu domínio.



Temos, então:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1, \quad \forall a, a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$$

Ou seja, o "sentido" ($>$) da desigualdade entre duas potências de mesma base a, $0 < a < 1$, é "invertido" ($<$) para os expoentes.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver em IR a inequação $25^{3x-1} > 125^{x+2}$.

Resolução

$$25^{3x-1} > 125^{x+2} \Rightarrow (5^2)^{3x-1} > (5^3)^{x+2} \therefore 5^{6x-2} > 5^{3x+6}.$$

Como a base (5) das potências é maior que 1, temos, pela propriedade E.2, que o "sentido" da desigualdade se mantém para os expoentes. Assim, temos:

$$5^{6x-2} > 5^{3x+6} \Rightarrow 6x - 2 > 3x + 6 \therefore 6x - 3x > 6 + 2 \therefore 3x > 8 \therefore x > \frac{8}{3}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{8}{3}\right\}$.

R.2 Resolver em IR a inequação $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-5} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.

Resolução

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-5} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{2x-5} \leqslant \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x+1} \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{6x-15} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}.$$

Como a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ das potências é um número entre 0 e 1, temos, pela propriedade E.3, que o "sentido" da desigualdade é "invertido" para os expoentes. Assim, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6x-15} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2} \Rightarrow 6x - 15 \geqslant 2x + 2$$

$$\therefore 6x - 2x \geqslant 2 + 15 \therefore 4x \geqslant 17 \therefore x \geqslant \frac{17}{4}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{17}{4}\right\}$.

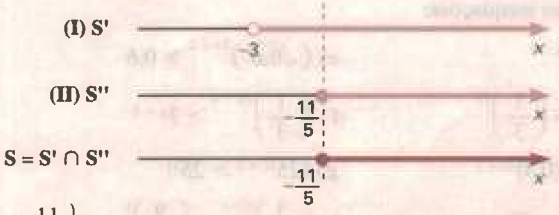
R.3 Resolver em IR a inequação $9^{x-1} < 81^{x+1} \leqslant 27^{3x+5}$.

Resolução

$$9^{x-1} < 81^{x+1} \leqslant 27^{3x+5} \Rightarrow (3^2)^{x-1} < (3^4)^{x+1} \leqslant (3^3)^{3x+5}$$

$$\therefore 3^{2x-2} < 3^{4x+4} \leqslant 3^{9x+15} \xrightarrow{\text{Prop. E.2}} 2x - 2 < 4x + 4 \leqslant 9x + 15$$

$$\therefore \begin{cases} 4x + 4 > 2x - 2 \\ 4x + 4 \leqslant 9x + 15 \end{cases} \therefore \begin{cases} x > -3 & \text{(I)} \\ x \geqslant -\frac{11}{5} & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{11}{5}\right\}$.

R.4 Resolver em IR a inequação $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \geqslant 0.$

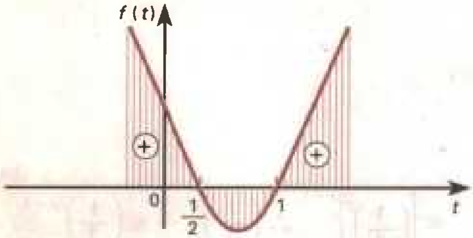
Resolução

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \geqslant 0$$

$$\therefore\ 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \geqslant 0.$$

Fazendo a mudança de variável $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$, temos: $2t^2 - 3t + 1 \geqslant 0$.

O gráfico da função $f(t) = 2t^2 - 3t + 1$ é a parábola:



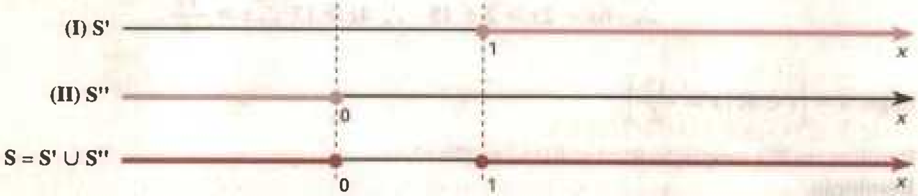
Temos que $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant \frac{1}{2}$ ou $t \geqslant 1$.

Voltando à variável x, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{Prop. E.3}} x \geqslant 1 \quad \text{(I)}$$

ou

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant 1 \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \xrightarrow{\text{Prop. E.3}} x \leqslant 0. \quad \text{(II)}$$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até f), B.2 (a, b), B.3 (a, b), B.4 (a), C.1 (a, b).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (g até l), B.2 (c, d), B.3 (c, d), B.4 (b), C.1 (c, d, e), C.2, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em IR as inequações:

a) $16^{3x-1} > 8^{2x+5}$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

c) $(0,3)^{4x-5} > (0,3)^{2x+1}$

d) $(\sqrt{2})^{3x-1} \leqslant \sqrt[4]{8}$

e) $(\sqrt{0,6})^{3x-2} \geqslant 0,6$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 3^{x+2}$

g) $125^{2x+1} > 25^{3x}$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \leqslant \left(\frac{9}{4}\right)^x$

i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-2} > \left(\frac{125}{8}\right)^{2x-1}$

j) $\sqrt{2^x} < \sqrt[4]{4}$

k) $(\sqrt[5]{3})^{x+2} > \sqrt[4]{27}$

l) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x+1} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x+3}$

B.2 Resolva em IR as inequações:

a) $2^{x-1} < 2^{2x+1} \leqslant 4^{3x+1}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < 4^{x+1} < 16^{2x+3}$

c) $9^{x+1} \leqslant 27^{2x-5} \leqslant 243^{4x+1}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{25}{4}\right)^{2x+1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{8x+1}$

B.3 Resolva em IR as inequações:

a) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} \geqslant 11$

b) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$

c) $25^{\frac{x}{2}} + 5^{x-1} > 150$

d) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

[illegible] Resolva em IR as inequações:

a) $(\sqrt{0{,}39})^{x^2-5x+6} < 1$

b) $(\sqrt{1{,}8})^{x^2-6x+5} \geqslant 1$

Exercícios complementares

C.1 Resolva em IR as inequações:

a) $3^{x^2-2x} < 2^{x^2-2x}$

b) $3^{x-1} \cdot 2^{x-1} \geqslant 12^{x-1}$

c) $8^x > 0$

d) $9^x < -1$

e) $\frac{3^{2x-1} - 3^x}{9^x} < 0$ (**Sugestão: lembre-se de que 9^x é positivo para todo x, $x \in$ IR.**)

C.2 Discuta a variação de sinal da função $f(x) = 3 - 9^{x+1}$.

C.3 Discuta a variação de sinal da função $g(x) = 4 - 2^{x-1}$.

C.4 Resolva em IR a inequação $\frac{3 - 9^{x+1}}{4 - 2^{x-1}} < 0$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRS) A soma de todos os números inteiros n que satisfazem a desigualdade $81^{-1} < 3^{2n+1} < 27$ é:

a) 0 b) -1 c) -2 [✓ d) -3] e) -4

V.2 (Fatec-SP) Se x é um número real tal que $2^{-x} \cdot 4^x < 8^{x+1}$, então:

a) $-2 < x < 2$ b) $x = 1$ c) $x = 0$ d) $x < \frac{3}{2}$ [✓ e) $x > -\frac{3}{2}$]

V.3 (FGV-SP) O conjunto solução da inequação $(0{,}3)^{x^2-2x} - 1 \geqslant 0$ é:

[✓ a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$]

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

V.4 (FEI-SP) Resolva a inequação $\frac{3^x - 9}{1 - 3^x} < 0$. (**Sugestão: substitua 3^x por t e resolva a inequação** $\frac{t - 9}{1 - t} < 0$.)

Capítulo 38

Teoria dos logaritmos — o porquê dos logaritmos

1. Princípios básicos

Considere as expressões:

- 31 245 + 6 231;
- 31 245 − 6 231;
- 31 245 · 6 231;
- 31 245 : 6 231.

Quais delas você resolveria mais rapidamente?

De modo geral é mais simples somar ou subtrair dois números do que multiplicá-los ou dividi-los. Com base nessas idéias o escocês John Napier (ou Neper) formalizou a teoria dos logaritmos, cuja finalidade é simplificar cálculos numéricos.

Os princípios básicos dos logaritmos – **transformar uma multiplicação em adição** ou **uma divisão em subtração** – já haviam sido vislumbrados por outros matemáticos antes de Napier. No entanto credita-se a ele a criação dos logaritmos, devido a vinte anos de trabalho que culminaram com a publicação das obras *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ("Descrição das normas dos logaritmos maravilhosos", em 1614) e *Mirifici logarithmorum canonis constructio* ("Cálculo das normas dos logaritmos maravilhosos", em 1619).

1550 · NEPER · 1617
NVM
ER
VIRGVE
DVO

John Napier (1550-1617), uma vida dedicada aos logaritmos.

2. Logaritmo

Para compreender o que é um logaritmo, considere uma potência de base positiva e diferente de 1. Por exemplo:

$$2^3 = 8.$$

Ao expoente dessa potência damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que 3 é o logaritmo de 8 na base 2. Em símbolos:

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3.$$

Exemplos

a) $5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$

b) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

Definição

Sejam a e b números reais positivos e $b \neq 1$. Chama-se **logaritmo de *a* na base *b*** o expoente x tal que $b^x = a$.

Em símbolos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a.$$

Nomenclatura

Na sentença $\log_b a = x$:

- a é chamado de "logaritmando",
- b é chamado de "base do logaritmo",
- x é chamado de "logaritmo de a na base b".

Exemplos

a) $\log_2 16$ é o expoente x tal que $2^x = 16$. Temos: $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \therefore x = 4$.
Assim, $\log_2 16 = 4$.

b) $\log_5 \frac{1}{25}$ é o expoente x tal que $5^x = \frac{1}{25}$. Temos: $5^x = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \therefore x = -2$.

Assim, $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

c) $\log_7 1$ é o expoente x tal que $7^x = 1$. Temos: $7^x = 1 \Leftrightarrow 7^x = 7^0 \therefore x = 0$.
Assim, $\log_7 1 = 0$.

d) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ é o expoente x tal que $5^x = \sqrt[3]{5}$. Temos: $5^x = \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{\frac{1}{3}} \therefore x = \frac{1}{3}$.
Assim, $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$.

Convenção

Chama-se "logaritmo decimal" aquele de base 10. Indica-se o logaritmo decimal de um número a simplesmente por **log *a*** (a base 10 fica subentendida).

Exemplo

$\log \frac{1}{1\,000}$ é o expoente x tal que $10^x = \frac{1}{1\,000}$. Temos:

$$10^x = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \therefore x = -3.$$

Assim, $\log \frac{1}{1000} = -3$.

3. Propriedades dos logaritmos

Decorre imediatamente da definição que para números reais positivos a e b, com $b \neq 1$:

L.1 $\log_b b = 1.$

De fato, fazendo $\log_b b = x$, tem-se $b^x = b \therefore x = 1$.

L.2 $\log_b 1 = 0.$

De fato, fazendo $\log_b 1 = x$, tem-se $b^x = 1 \therefore x = 0$.

L.3 $\log_b a^y = y \log_b a,\quad \forall y, y \in \mathbb{R}.$

De fato, fazendo $\log_b a = x$, tem-se $b^x = a$. Elevando-se ao expoente y ambos os membros dessa última igualdade:

$$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{yx} = a^y.$$

Pela definição de logaritmo:

$$b^{yx} = a^y \Leftrightarrow yx = \log_b a^y.$$

Como $x = \log_b a$, temos, finalmente, que:

$$y \log_b a = \log_b a^y.$$

L.4 $\log_b b^x = x.$

De fato, fazendo $\log_b b^x = y$, tem-se $b^x = b^y \Rightarrow x = y$.
Assim, $\log_b b^x = x$.

L.5 $b^{\log_b a} = a.$ Atenção !!!

De fato, fazendo $\log_b a = x$, tem-se: $b^x = a$. Substituindo, nessa última igualdade, x por $\log_b a$, tem-se:

$$b^{\log_b a} = a.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular os logaritmos:

a) $\log_{125} 625$ b) $\log_{81} \dfrac{1}{243}$ c) $\log \sqrt[4]{1\,000}$ d) $\log_{\frac{27}{8}} \dfrac{64}{729}$

Resolução

a) $\log_{125} 625 = x \Leftrightarrow 125^x = 625 \therefore (5^3)^x = 5^4 \therefore 5^{3x} = 5^4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}.$

Assim, $\log_{125} 625 = \dfrac{4}{3}.$

b) $\log_{81} \dfrac{1}{243} = x \Leftrightarrow 81^x = \dfrac{1}{243} \therefore (3^4)^x = \dfrac{1}{3^5} \therefore 3^{4x} = 3^{-5} \Rightarrow 4x = -5 \therefore x = -\dfrac{5}{4}.$

Assim, $\log_{81} \dfrac{1}{243} = -\dfrac{5}{4}.$

c) $\log \sqrt[4]{1\,000} = x \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[4]{1\,000} \therefore 10^x = \sqrt[4]{10^3} \therefore 10^x = 10^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}.$

Assim, $\log \sqrt[4]{1\,000} = \dfrac{3}{4}.$

d) $\log_{\frac{27}{8}} \dfrac{64}{729} = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{27}{8}\right)^x = \dfrac{64}{729}$

$\therefore \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right]^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \therefore \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-6} \Rightarrow 3x = -6 \therefore x = -2$. Assim, $\log_{\frac{27}{8}}, \dfrac{64}{729} = -2$.

R.2 Sabendo que $\log_b a = 3$, calcular $\log_b a^5$.

Resolução

Pela propriedade L.3, temos: $\log_b a^5 = 5 \log_b a$.

Como $\log_b a = 3$, temos: $\log_b a^5 = 5 \log_b a = 5 \cdot 3 = 15$.

Então $\log_b a^5 = 15$.

R.3 Calcular o valor da expressão $E = 3^{\log_3 5} + \log_6 6 - \log_8 1$.

Resolução

Pela L.5, temos $3^{\log_3 5} = 5$.

Pela L.1, temos $\log_6 6 = 1$.

Pela L.2, temos $\log_8 1 = 0$.

Assim, $E = 5 + 1 - 0 = 6$.

R.4 Calcule o valor da expressão $5^{4 \log_5 2}$.

Resolução

Pela L.3, temos $4 \log_5 2 = \log_5 2^4 = \log_5 16$. Assim, $5^{4 \log_5 2} = 5^{\log_5 16} = 16$.

Pela L.5

R.5 Sabendo que $\log 5 = 0{,}6989$, mostre que $\sqrt[4]{5} = 10^{0{,}174725}$.

Resolução

Temos que $\log 5 = 0{,}6989$.

Multiplicando por $\dfrac{1}{4}$ ambos os membros dessa igualdade, temos: $\dfrac{1}{4} \log 5 = \dfrac{1}{4} \cdot 0{,}6989$.

Pela propriedade L.3, podemos escrever: $\dfrac{1}{4} \log 5 = \log 5^{\frac{1}{4}} = \log \sqrt[4]{5}$.

Assim, temos que: $\log \sqrt[4]{5} = \dfrac{1}{4} \cdot 0{,}6989 \Rightarrow \log \sqrt[4]{5} = 0{,}174725$.

Pela definição de logaritmo, temos, finalmente: $\sqrt[4]{5} = 10^{0{,}174725}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até h), B.2 (a até d), B.3, B.4, B.7, B.8, B.10, B.12, B.13, C.2, C.5.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (i até r), B.2 (e até i), B.5, B.6, B.9, B.11, B.13, B.14, B.15, C.1, C.3, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Calcule os logaritmos:

a) $\log_7 49$
b) $\log_6 216$
c) $\log_{128} 1024$
d) $\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{4}{9}$
e) $\log_2 \sqrt[5]{16}$
f) $\log 10000$
g) $\log_4 4$
h) $\log_5 1$
i) $\log_3 243$
j) $\log \sqrt[6]{1\,000}$
k) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{625}$
l) $\log_{243} 3$
m) $\log_{32} 128$
n) $\log_{\frac{4}{25}} \dfrac{625}{16}$
o) $\log 0{,}001$
p) $\log_{0{,}3} 0{,}09$
q) $\log_{0{,}0016} 0{,}008$
r) $\log_{0{,}6} \dfrac{81}{625}$

B.2 Determine x em cada igualdade:

a) $\log_5 x = 2$

b) $\log_{36} x = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 x = -3$

d) $\log_4 x = 0$

e) $\log_5 x = 3$

f) $\log_{81} x = \frac{1}{4}$

g) $\log x = -2$

h) $\log_{1\,024} x = -0{,}1$

i) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = 3$

B.3 Sabendo que $\log_b a = 9$, calcule $\log_b a^6$.

B.4 Sabendo que $\log_b a^2 = 8$ e que $a > 0$, calcule $\log_b a^3$.

B.5 Sabendo que $\log_b a = 9$, calcule $\log_b \sqrt[3]{a}$.

B.6 Sabendo que $\log_b a = 4$, calcule $\log_b \sqrt[6]{a^5}$.

B.7 Calcule o valor da expressão $E = 6^{\log_6 5}$.

B 8 Calcule o valor da expressão $E = 5^{2 \log_5 3}$.

B 9 Calcule o valor da expressão $E = (b^2)^{\log_b 3}$, em que $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

B 10 Calcule o valor da expressão $E = 5^{2 + \log_5 3}$.

B 11 Calcule o valor da expressão $E = 8^{1 - \log_8 4}$.

B 12 Prove que:

a) $\log_b \frac{1}{a} = -\log_b a$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$;

b) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

B.13 Sabendo que $\log_3 5 = m$, calcule:

a) $\log_3 \frac{1}{5}$

b) $\log_5 3$

c) $\log_5 \frac{1}{3}$

B.14 Sabendo que $\log_3 5 = m$, calcule:

a) $\log_3 \frac{1}{5^m}$

b) $\log_5 \frac{1}{3^m}$

B.15 Chama-se cologaritmo de a na base b, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$, o número $-\log_b a$. Isto é:

$$\boxed{\operatorname{colog}_b a = -\log_b a}\ .$$

Calcule os cologaritmos:

a) $\operatorname{colog}_2 8$

b) $\operatorname{colog}_{16} 32$

c) $\operatorname{colog}_5 \frac{1}{125}$

Exercícios complementares

C.1 Calcule o valor da expressão $16^{\log_4 2}$.

C.2 Sabendo que $\log 2 \simeq 0{,}301$, calcule $\log 8$ com aproximação de três casas decimais.

C.3 Sabendo que $\log 3 \simeq 0{,}477$, calcule $\log \sqrt{3}$ com aproximação de três casas decimais.

C.4 A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = 2^x$ é bijetora.

a) Determine a inversa f^{-1} de f.

b) Calcule $f^{-1}(8)$.

C.5 Sabendo que $\log 3 = 0{,}477$, pode-se afirmar que o número 3^{15} é tal que:

a) $10^4 < 3^{15} < 10^5$

b) $10^7 < 3^{15} < 10^8$

c) $10^8 < 3^{15} < 10^9$

d) $10^9 < 3^{15} < 10^{10}$

e) $10^{10} < 3^{15} < 10^{11}$

(**Sugestão**: faça $x = 3^{15}$ e calcule o logaritmo decimal de cada membro da igualdade.)

C.6 Sabendo que $\log 2 = 0{,}3010$, pode-se afirmar que o número $\sqrt[5]{2}$ é tal que:

a) $10^{0{,}04} < \sqrt[5]{2} < 10^{0{,}05}$

b) $10^{0{,}05} < \sqrt[5]{2} < 10^{0{,}06}$

c) $10^{0{,}06} < \sqrt[5]{2} < 10^{0{,}07}$

d) $10^{0{,}07} < \sqrt[5]{2} < 10^{0{,}08}$

e) $10^{0{,}08} < \sqrt[5]{2} < 10^{0{,}09}$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fesp-SP) O logaritmo de 32 na base $\sqrt[5]{0,5}$ é:

a) -15 b) 16 c) 8 d) -25 e) 64

V.2 (Fuvest-SP) Se $x^5 = 1000$ e $b^3 = 100$, então o logaritmo de x na base b vale:

a) 0,5 b) 0,9 c) 1,2 d) 1,5 e) 2,0

V.3 (Mackenzie-SP) A expressão $\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10} 0,001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$ é igual a:

a) $\frac{13}{2}$ b) $-\frac{13}{2}$ c) 0 d) $\frac{5}{4}$ [✓ e) $-\frac{19}{2}$]

V.4 (UFMG) O conjunto de todos os números reais x que satisfazem a equação $2 \log_3 x = -1$ é:

a) $\varnothing$

b) $\{0\}$

c) $\{-1, 1\}$

d) $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

[✓ e) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$]

Capítulo 39

Outras propriedades dos logaritmos

1. Apresentação

Estudamos, no capítulo anterior, cinco propriedades dos logaritmos. Continuando, veremos mais três propriedades.

Sendo a, b e c números reais positivos, com $b \neq 1$, temos:

L.6 $\log_b ac = \log_b a + \log_b c.$

Demonstração

Sejam: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c.$

Assim, podemos escrever: $b^x b^y = ac \Leftrightarrow b^{x+y} = ac.$

Pela definição de logaritmo:

$$b^{x+y} = ac \Leftrightarrow x + y = \log_b ac \;\therefore\; \log_b a + \log_b c = \log_b ac.$$ (c.q.d)

Exemplos

a) $\log_2 (4 \cdot 2) = \log_2 4 + \log_2 2$

b) $\log_5 (625 \cdot 125) = \log_5 625 + \log_5 125$

L.7 $\log_b \dfrac{a}{c} = \log_b a - \log_b c,$

Demonstração

Sejam: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c.$

Assim, podemos escrever: $\dfrac{b^x}{b^y} = \dfrac{a}{c} \Leftrightarrow b^{x-y} = \dfrac{a}{c}.$

Pela definição de logaritmo:

$$b^{x-y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow x - y = \log_b \frac{a}{c} \;\therefore\; \log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}.$$ (c.q.d.)

Exemplos

a) $\log_2 \dfrac{8}{2} = \log_2 8 - \log_2 2$

b) $\log_5 \dfrac{625}{125} = \log_5 625 - \log_5 125$

L.8 Mudança de base:

$$\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}, \quad \forall k, k \in \mathbb{R}_+^*, k \neq 1.$$

Demonstração

Sejam: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a$.

Pela propriedade transitiva da igualdade: $b^x = a$ e $k^y = a \Leftrightarrow b^x = k^y$.

Pela definição de logaritmo: $b^x = k^y \Leftrightarrow y = \log_k b^x$.

Pela propriedade L.3, podemos escrever:

$$y = x \log_k b \;\therefore\; \log_k a = \log_b a \cdot \log_k b \;\therefore\; \frac{\log_k a}{\log_k b} = \log_b a.$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $\log_{64} 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 64}$

b) $\log_{81} 9 = \dfrac{\log_9 9}{\log_9 81}$

Exercícios resolvidos

R.1 Sabendo que $\log_6 5 = 0{,}898$ e $\log_6 2 = 0{,}386$, calcular:

a) $\log_6 10$

b) $\log_6 2{,}5$

c) $\log_2 5$

d) $\log_6 20$

e) $\log_6 \dfrac{5}{12}$

f) $\log_6 \sqrt{5}$

Resolução

a) $\log_6 10 = \log_6 (5 \cdot 2) \overset{\text{L.6}}{=} \log_6 5 + \log_6 2 = 0{,}898 + 0{,}386 = 1{,}284.$

b) $\log_6 2{,}5 = \log_6 \dfrac{5}{2} \overset{\text{L.7}}{=} \log_6 5 - \log_6 2 = 0{,}898 - 0{,}386 = 0{,}512.$

c) $\log_2 5 \overset{\text{L.8}}{=} \dfrac{\log_6 5}{\log_6 2} = \dfrac{0{,}898}{0{,}386} \simeq 2{,}326.$

d) $\log_6 20 = \log_6 (2^2 \cdot 5) \overset{\text{L.6}}{=} \log_6 2^2 + \log_6 5 \overset{\text{L.3}}{=} 2 \log_6 2 + \log_6 5 = 2 \cdot 0{,}386 + 0{,}898 = 1{,}67.$

e) $\log_6 \dfrac{5}{12} \overset{\text{L.7}}{=} \log_6 5 - \log_6 12 = \log_6 5 - \log_6 (6 \cdot 2) \overset{\text{L 6}}{=} \log_6 5 - (\log_6 6 + \log_6 2) =$

$= 0{,}898 - (1 + 0{,}386) = 0{,}898 - 1{,}386 = -0{,}488.$

f) $\log_6 \sqrt{5} = \log_6 5^{\frac{1}{2}} \overset{\text{L.3}}{=} \dfrac{1}{2} \log_6 5 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}898 = 0{,}449.$

R.2 Provar que $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ para quaisquer a e b reais positivos e diferentes de 1.

Resolução

No capítulo anterior (exercício B.12b) foi proposto este exercício. Observe como fica mais simples a demonstração através da fórmula de mudança de base:

$$\log_b a \overset{\text{L.8}}{=} \frac{\log_a a}{\log_a b} \overset{\text{L 1}}{=} \frac{1}{\log_a b}.$$

(c.q.d.)

R.3 Sabendo que $\log 2 = m$ e $\log 3 = k$, calcular $\log\,(8\sqrt[5]{9})$ em função de m e k.

Resolução

$$\log\,(8\sqrt[5]{9}) = \log\left(2^3 \cdot 3^{\frac{2}{5}}\right) \overset{L.6}{=} \log 2^3 + \log 3^{\frac{2}{5}} \overset{L.3}{=} 3\log 2 + \frac{2}{5}\log 3 = 3m + \frac{2k}{5} = \frac{15m + 2k}{5}.$$

Portanto, $\log\,(8\sqrt[5]{9}) = \dfrac{15m + 2k}{5}$.

R.4 Calcular o valor da expressão $E = \log 3 + \log 4 + \log 5 + \log 6$, sabendo que $\log 6 = 0{,}77815$.

Resolução

$$E = \log 3 + \log 4 + \log 5 + \log 6 \overset{L.6}{=} \log\,(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) =$$

$$= \log 360 = \log\,(6^2 \cdot 10) \overset{L.6}{=} \log 6^2 + \log 10 \overset{L.3}{=} 2\log 6 + \log 10 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}77815 + 1 = 2{,}55630.$$

Portanto, $E = 2{,}55630$.

R.5 Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcular:

a) $\log_3 2$

b) $\log_8 6$

c) $\log_2 15$

Resolução

a) $\log_3 2 \underset{L.8}{=} \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{0,301}{0,477} \simeq 0{,}631.$

b) $\log_8 6 \underset{L.8}{=} \dfrac{\log 6}{\log 8} = \dfrac{\log\,(2 \cdot 3)}{\log 2^3} \underset{L.6\text{ e }L.3}{=} \dfrac{\log 2 + \log 3}{3\log 2} = \dfrac{0,301 + 0,477}{3 \cdot 0,301} \simeq 0{,}861.$

c) $\log_2 15 \underset{L.8}{=} \dfrac{\log 15}{\log 2} = \dfrac{\log \frac{30}{2}}{\log 2} \underset{L.7}{=} \dfrac{\log 30 - \log 2}{\log 2} =$

$$= \frac{\log\,(10 \cdot 3) - \log 2}{\log 2} \underset{L.6}{=} \frac{\log 10 + \log 3 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 + 0,477 - 0,301}{0,301} \simeq 3{,}906.$$

R.6 Sendo $4^n = 5$, calcular $\log_{50} 2$ em função de n.

Resolução

Pela definição de logaritmo, podemos escrever: $4^n = 5 \Leftrightarrow \log_4 5 = n$.

Temos, ainda:

$$\log_{50} 2 \underset{L.8}{=} \frac{\log_4 2}{\log_4 50} = \frac{\log_4 2}{\log_4\,(2 \cdot 5^2)} \underset{L.6}{=} \frac{\log_4 2}{\log_4 2 + \log_4 5^2} \underset{L.3}{=} \frac{\log_4 2}{\log_4 2 + 2\log_4 5} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1 + 4n}{2}} = \frac{1}{1 + 4n}.$$

R.7 Sabendo que $\log_{15} 9 = a$, calcular $\log_{15} 5$ em função de a.

Resolução

$$\log_{15} 9 = a \Leftrightarrow \log_{15} 3^2 = a.$$

Pela propriedade L.3, podemos escrever: $2 \log_{15} 3 = a \therefore \log_{15} 3 = \frac{a}{2}$.

Temos, então: $\log_{15} 5 = \log_{15} \frac{15}{3} \underset{\text{L.7}}{=} \log_{15} 15 - \log_{15} 3 = 1 - \frac{a}{2} = \frac{2 - a}{2}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.6, B.8, B.9, B.11, B.13, C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.7, B.10, B.12, B.14, C.2, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que $\log_5 2 = 0{,}43$ e $\log_5 3 = 0{,}68$, calcule:

a) $\log_5 6$
b) $\log_5 \frac{2}{3}$
c) $\log_5 1{,}5$
d) $\log_3 2$
e) $\log_2 3$
f) $\log_5 8$
g) $\log_5 24$
h) $\log_5 \frac{9}{8}$
i) $\log_5 \sqrt{3}$
j) $\log_5 4\sqrt[4]{3}$
k) $\log_{\sqrt{5}} 12$

B.2 Sabendo que $\log 5 = 0{,}69$ e $\log 3 = 0{,}47$, calcule:

a) $\log 15$
b) $\log 75$
c) $\log \frac{3}{5}$
d) $\log \frac{27}{5}$
e) $\log 30$
f) $\log 6$
$\left(\textbf{Sugestão: } 6 = \frac{30}{5}.\right)$
g) $\log 18$
h) $\log \sqrt[6]{15}$
i) $\log_3 5$
j) $\log_9 125$
k) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}9$

B.3 Sabendo que $\log_3 4 = 1{,}26$, calcule:

a) $\log_4 3$
b) $\log_{12} 3$

B.4 Sabendo que $\log_2 5 = 2{,}32$, calcule:

a) $\log_5 2$
b) $\log 2$
c) $\log 5$

B.5 Prove que $\log_{b^\alpha} a = \frac{1}{\alpha} \log_b a$ para qualquer α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, e quaisquer números a e b reais positivos com $b \neq 1$. (**Sugestão:** faça uma mudança de base.)

B.6 Determine o valor de x, sabendo que $x = \log_3 4 \cdot \log_2 3$.

B.7 Determine o valor de x, sabendo que $x = \log_4 125 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 3$.

B.8 Sabendo que $\log (a + b) = m$ e $\log (a - b) = n$, calcule $\log (a^2 - b^2)$.

B.9 Sendo $\log_2 (a - b) = 3$, obedecidas todas as condições de existência, calcule o valor da expressão:

$$E = \log_4 (a^2 + ab + b^2) - \log_4 (a^3 - b^3).$$

B.10 Sendo $\log_5 \frac{1}{b} = 3{,}4$, obedecidas todas as condições de existência, calcule o valor da expressão:

$$E = \log_{\frac{1}{5}} \frac{a}{b} - \log_{\frac{1}{5}} ab.$$

B.11 Sabendo que $3^k = 2$, calcule $\log_2 18$ em função de k.

B.12 Dado que $6^n = 2$, calcule, em função de n, o valor de $\log_2 24$.

B.13 Conhecendo $\log_{20} 5 = a$, calcule, em função de a, o valor de $\log_{20} 4$.

B.14 Sabendo que $\log_{12} 3 = m$, calcule, em função de m, o valor de $\log_{12} 6$.

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $\log_3 a + \log_3 b = c$, calcule, em função de a e c, o valor de b.

C.2 Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule $\log 7{,}2$.

C.3 Sabendo que $\log_y x = 3$, calcule $\log_{\frac{1}{x^2}} \sqrt[3]{y}$.

C.4 Calcule $\log \frac{1}{a} + \log b$, sabendo que $\log a + \log \frac{1}{b} = m$, obedecidas todas as condições de existência.

C.5 Sabendo que $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 31{,}42 = 1{,}497$, calcule, com aproximação de duas casas decimais, o número $\log_3 3\,142$.

C.6 Calcule o valor de $\log_3 \frac{xy}{27}$, sabendo que $\log_y x = 2$ e $\log_y 3 = 4$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

a) $\log_4 7$ b) $\log_{16} 7$ c) 1 d) 2 e) 0

V.2 (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

a) $\frac{2}{p}$ b) $2p$ c) $2 + p^2$ d) $2 + 2p$ e) $\frac{2 + 2p}{p}$

V.3 (Fuvest-SP) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

a) a^3 b) $5a - 1$ c) $\frac{2a}{3}$ d) $1 + \frac{a}{3}$ e) $1 - \frac{a}{3}$

V.4 (PUC-RS) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então $\log 375$ é:

a) $y + 3x$ b) $y + 5x$ c) $y - x + 3$ d) $y - 3x + 3$ e) $3(y + x)$

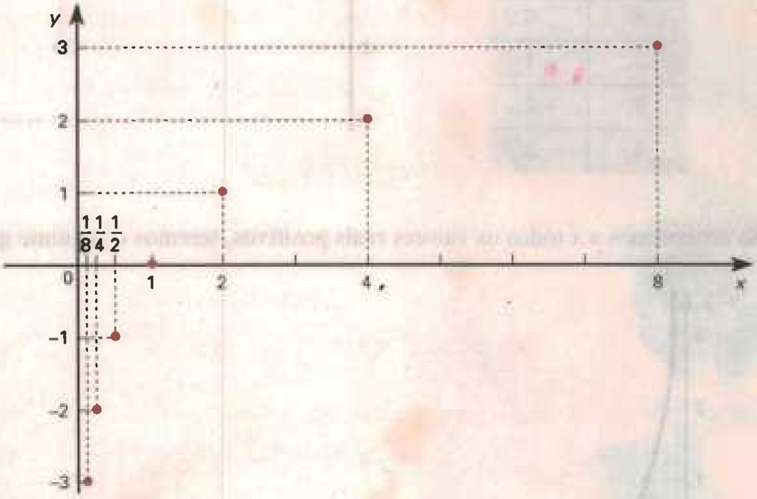
Capítulo 40

Função logarítmica

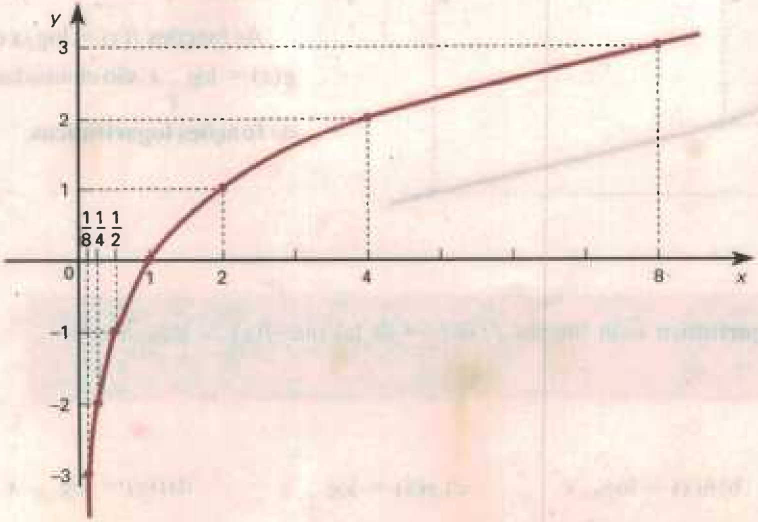
1. Introdução

Consideremos a função $f(x) = \log_2 x$. Podemos obter o gráfico de f através de uma tabela:

	y
x	$\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Se atribuirmos a x todos os valores reais positivos, teremos o seguinte gráfico:

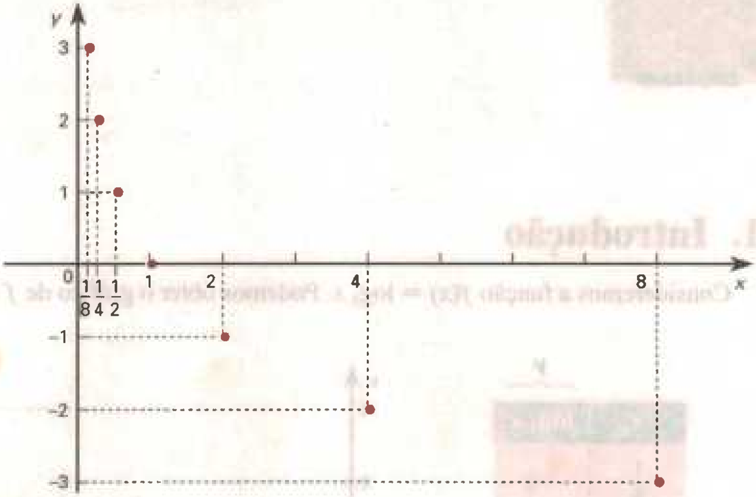


Note que:

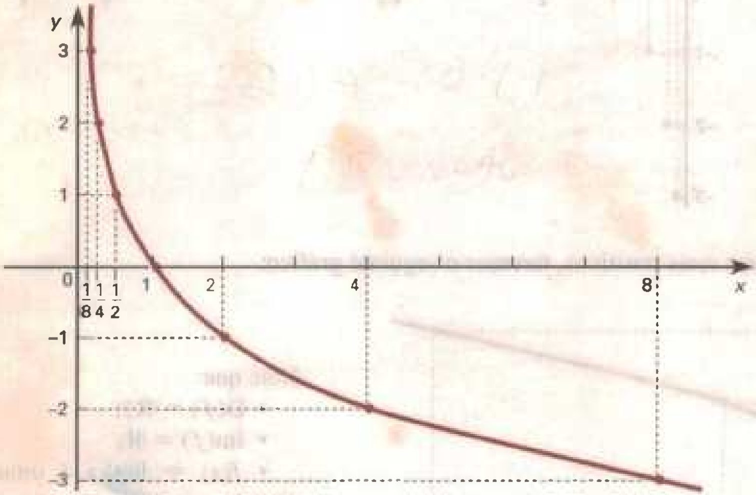
- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$;
- $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente em todo o seu domínio; isso decorre do fato de a base ser um número maior que 1 ($2 > 1$).

Consideremos agora a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Para obter um esboço do gráfico de g, vamos construir a seguinte tabela:

	y
x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



Se atribuirmos a x todos os valores reais positivos, teremos o seguinte gráfico:



Note que:

- $D(g) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(g) = \mathbb{R}$;
- $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função decrescente em todo seu domínio; isso decorre do fato de a base ser um número entre 0 e 1 $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$.

As funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ são chamadas de **funções logarítmicas**.

Definição

Chama-se **função logarítmica** toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, com $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

Exemplos

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $h(x) = \log_{0,2} x$

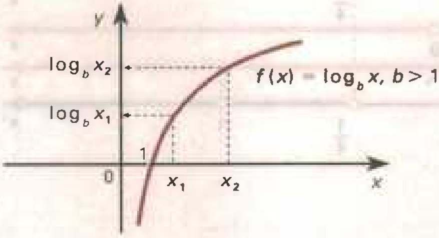
c) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) $t(x) = \log_{\sqrt{7}} x$

2. Propriedades da função logarítmica

G.1 $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$, $\forall \{x, y, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

G.2 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $b > 1$.

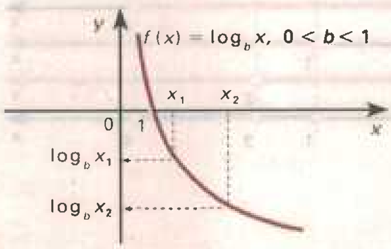


Tem-se, então:

$$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1,$$

$\forall \{x_1, x_2, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b > 1$.

G.3 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.



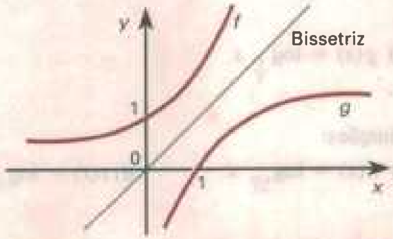
Tem-se, então:

$$\log_b x_2 < \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1,$$

$\forall \{x_1, x_2, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b < 1$.

G.4 Toda função logarítmica, isto é, $f(x) = \log_b x$, com $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$, é bijetora.

G.5 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é inversa da função exponencial $f(x) = b^x$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$. Observe, por exemplo, os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$:



Como f e g são inversas entre si, seus gráficos são simétricos em relação à reta suporte da bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar o domínio da função $f(x) = \log_5 (3x - 6)$.

Resolução

Existe $\log_b a$ se, e somente se, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$. Como a base 5 do logaritmo já obedece à condição de existência, basta impormos a condição sobre o logaritmando, isto é,

$$3x - 6 > 0 \therefore x > 2.$$

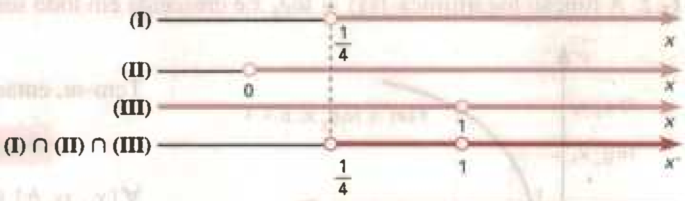
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

R.2 Determinar o domínio da função $f(x) = \log_x (8x - 2)$.

Resolução

Para garantir a existência de $\log_x (8x - 2)$, devemos ter:

$$\begin{cases} 8x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$



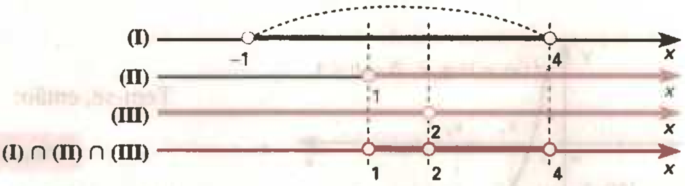
Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{1}{4} \text{ e } x \neq 1\right\}$.

R.3 Determinar o domínio da função $f(x) = \log_{x-1} (-x^2 + 3x + 4)$.

Resolução

Devemos ter:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1. \end{cases}$$



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \text{ e } x \neq 2\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.5, C.1, C.2, C.4 (a, b), C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.6, C.3, C.4 (c, d), C.6.

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

B.2 Classifique como crescente ou decrescente cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_5 x$ b) $g(x) = \log_{0{,}3} x$ c) $h(x) = \log_{\sqrt[6]{5}} x$ d) $t(x) = \log_{\sqrt{0{,}6}} x$

B.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

b) $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b$

c) $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b$

d) $\log_{0.7} a < \log_{0.7} b \Leftrightarrow a > b$

e) A inversa da função $f(x) = 3^x$ é a função $g(x) = \log_x 3$.

B.4 Determine a inversa da função $f(x) = \log_5 x$.

B.5 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_8 (5x - 15)$

b) $g(x) = \log_5 (x^2 - 3x)$

c) $h(x) = \log_x (6x - 1)$

d) $t(x) = \log_{2x-4} (6x + 1)$

B.6 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_{0{,}5} (x^2 - 5x + 4)$

b) $g(x) = \log_{x-1} (x - x^2)$

c) $h(x) = \log_{x-3} 5$

d) $t(x) = \log_3 x^2$

Exercícios complementares

C.1 A sentença $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ é verdadeira para:

a) quaisquer números reais a, b e c.
b) quaisquer números reais positivos a, b e c.
c) quaisquer números reais a, b e c, com $ab > 0$ e $c \neq 1$.
d) quaisquer números reais positivos a, b e c, com $c \neq 1$.
e) quaisquer números reais a, b e c, com $c \neq 1$.

C.2 Sendo a, b e c números reais positivos e $\log_5 a - \log_5 b > \log_5 c$, podemos afirmar que:

a) $\frac{a}{b} < 5$ b) $\frac{a}{b} > 5$ c) $\frac{a}{b} > c$ d) $\frac{a}{b} < c$ e) $\frac{a}{b} = 1$

C.3 Sendo a, b e c números reais positivos e $\log_{0,2} a + \log_{0,2} b \leq \log_{0,2} c$, podemos afirmar que:

a) $ab \geq 0{,}2$ b) $ab \leq 0{,}2$ c) $ab \geq c$ d) $ab \leq c$ e) $a = \frac{1}{b}$

C.4 Determine o domínio de cada uma das funções.

a) $f(x) = \log_5 \frac{3x - 1}{x - 2}$
b) $g(x) = \log \frac{x^2 - 5x + 4}{2x - 4}$
c) $h(x) = \log_4 \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$
d) $t(x) = \log_2 \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{2x - 4}$

C.5 Qual é o domínio da função $f(x) = \log_{2x+4} \frac{x^2 - 1}{x - 3}$?

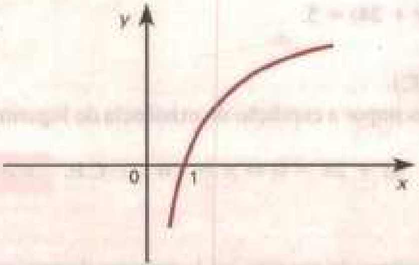
C.6 Obtenha o domínio da função $f(x) = \log_{x-2}(|x - 1| - 3)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFAC) O domínio da função $f(x) = \log_2 (x^2 - 5x + 4)$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
e) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

V.2 (PUC-RJ) O gráfico da função $f(x) = \log_k x$ é:



Nessas condições, pode-se afirmar que:

a) $k = 1$ b) $0 < k < 1$ c) $k > 1$ d) $k = -1$ e) $k < -1$

V.3 (FGV-SP) A inversa da função $f(x) = \log_3 x$ é:

a) $f^{-1}(x) = \log_3 \frac{1}{x}$
b) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
c) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$
d) $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
e) $f^{-1}(x) = 3^x$

Capítulo 41

Equação logarítmica

1. Conceituação

Chama-se "equação logarítmica" aquela que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a) $\log_5 x = 3$ b) $\log(x^2 - x) + \log x = \log 9$ c) $\log_x 3x = 2$

2. Resolução de uma equação logarítmica

A resolução de uma equação logarítmica baseia-se na propriedade G.1 das funções logarítmicas, ou seja:

G.1 $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y,\quad \forall \{x, y, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b \neq 1.$

Apresentamos, como exercícios resolvidos, alguns tipos de equação logarítmica.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a equação $\log_2(4x + 24) = 5$.

Resolução

Condição de existência (C.E.)

Em primeiro lugar, devemos impor a condição de existência do logaritmo:

$$4x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -6 \quad \therefore \quad \text{C.E.} \quad x > -6.$$

Preparação da equação

Transformamos os dois membros da equação em logaritmos de mesma base. O número 5 pode ser escrito como logaritmo de base 2, do seguinte modo: $5 = 5\log_2 2 = \log_2 2^5$.

Assim, temos: $\log_2(4x + 24) = 5 \Leftrightarrow \log_2(4x + 24) = \log_2 2^5 \therefore \log_2(4x + 24) = \log_2 32$.

Resolução da equação

Pela propriedade G.1, temos: $\log_2(4x + 24) = \log_2 32 \Rightarrow 4x + 24 = 32 \therefore 4x = 8 \therefore x = 2$.

Note que $x = 2$ satisfaz a C.E. [illegible]

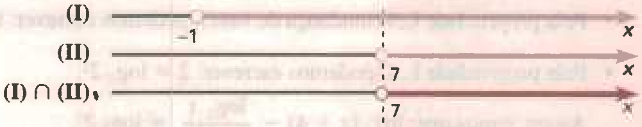
Portanto $S = \{2\}$.

R.2 Resolver a equação $\log_3(x+1) + \log_3(x-7) = 2$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-7>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>7. \end{cases}$$



C.E. $x > 7.$

Preparação da equação: $\log_3(x+1) + \log_3(x-7) = \log_3 3^2$.

Pela propriedade L.6 dos logaritmos, podemos escrever: $\log_3(x+1)(x-7) = \log_3 3^2$.

Resolução da equação

Pela propriedade G.1, temos: $\log_3(x^2 - 6x - 7) = \log_3 9 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 9$

$\therefore x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = 8$ ou $x = -2$.

Note que apenas $x = 8$ satisfaz a C.E. $x > 7$.

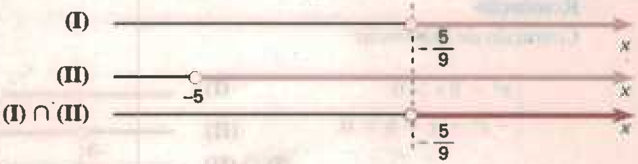
Portanto $S = \{8\}$.

R.3 Resolver a equação $\log(18x+10) - \log(x+5) = 1$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} 18x+10>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{9} \\ x>-5. \end{cases}$$



C.E. $x > -\dfrac{5}{9}$.

Preparação da equação: $\log(18x+10) - \log(x+5) = \log 10$.

Pela propriedade L.7 dos logaritmos, podemos escrever: $\log\dfrac{18x+10}{x+5} = \log 10$.

Resolução da equação

Pela propriedade G.1, temos: $\dfrac{18x+10}{x+5} = 10 \Rightarrow 18x + 10 = 10x + 50$

$\therefore 18x - 10x = 50 - 10 \therefore 8x = 40 \therefore x = 5$.

Note que $x = 5$ satisfaz a C.E. $x > -\dfrac{5}{9}$.

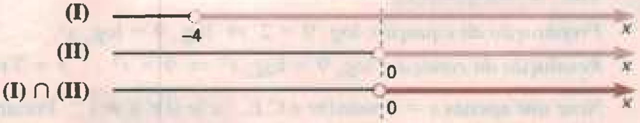
Portanto $S = \{5\}$.

R.4 Resolver a equação $\log_2(x+4) - \log_4 x = 2$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>0. \end{cases}$$



C.E. $x > 0$.

Preparação da equação
Inicialmente, devemos passar para uma mesma base todos os logaritmos da equação.

- Pela propriedade L.8 (mudança de base), podemos escrever: $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}$.
- Pela propriedade L.4, podemos escrever: $2 = \log_2 2^2$.

Assim, temos que: $\log_2 (x + 4) - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 2^2$.

Resolução da equação

$$\log_2 (x + 4) - \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 4$$

$$\frac{2 \log_2 (x + 4) - \log_2 x}{2} = \frac{2 \log_2 4}{2} \therefore \log_2 (x + 4)^2 - \log_2 x = \log_2 4^2$$

$$\therefore \log_2 \frac{(x + 4)^2}{x} = \log_2 16 \therefore \frac{(x + 4)^2}{x} = 16 \therefore x^2 + 8x + 16 = 16x \therefore x^2 - 8x + 16 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0 \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \therefore x = 4.$$

Note que $x = 4$ satisfaz a C.E. $x > 0$. Portanto $S = \{4\}$.

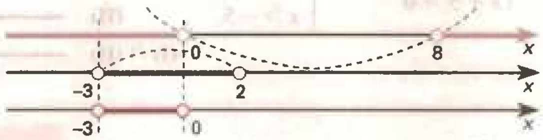
R.5 Resolver a equação $\log (x^2 - 8x) - \log (-x^2 - x + 6) = \log 1{,}5$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} x^2 - 8x > 0 & \text{(I)} \\ -x^2 - x + 6 > 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) ∩ (II)



C.E. $-3 < x < 0$.

Preparação da equação

$$\log (x^2 - 8x) - \log (-x^2 - x + 6) = \log 1{,}5 \Rightarrow \log \frac{x^2 - 8x}{-x^2 - x + 6} = \log 1{,}5.$$

Resolução da equação
Pela propriedade G.1, temos:

$$\log \frac{x^2 - 8x}{-x^2 - x + 6} = \log 1{,}5 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x}{-x^2 - x + 6} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2x^2 - 16x = -3x^2 - 3x + 18 \therefore 5x^2 - 13x - 18 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{18}{5}.$$

Note que apenas $x = -1$ satisfaz a C.E. $-3 < x < 0$. Portanto $S = \{-1\}$.

R.6 Resolver a equação $\log_x 9 = 2$.

Resolução

Condição de existência

C.E. $x > 0$ e $x \neq 1$.

Preparação da equação: $\log_x 9 = 2 \Leftrightarrow \log_x 9 = \log_x x^2$.

Resolução da equação: $\log_x 9 = \log_x x^2 \Rightarrow 9 = x^2 \therefore x = 3$ ou $x = -3$.

Note que apenas $x = 3$ satisfaz a C.E. $x > 0$ e $x \neq 1$. Portanto $S = \{3\}$.

R.7 Resolver a equação $(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 4 = 0$.

Resolução

Condição de existência

C.E. $x > 0$.

Resolução da equação

Fazendo a mudança de variável $\log_3 x = t$, temos: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 4$.

Voltando à variável original, temos: $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$ ou $\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 81$.

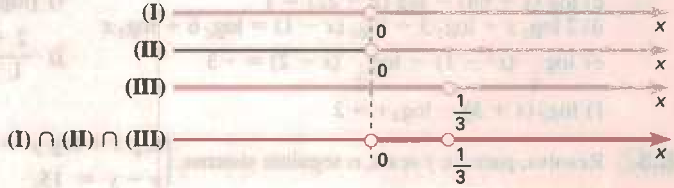
Como os dois valores de x satisfazem a C.E. $x > 0$, temos $S = \{3, 81\}$.

R.8 Resolver a equação $\log_3 x^8 + \dfrac{6}{1 + \log_3 x} = 18$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} x^8 > 0 \\ x > 0 \\ 1 + \log_3 x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$



C.E. $x > 0$ e $x \neq \dfrac{1}{3}$.

Preparação da equação

A propriedade L.3 dos logaritmos nos permite escrever a equação sob a forma:

$$8 \log_3 x + \frac{6}{1 + \log_3 x} = 18.$$

Resolução da equação

Fazendo a mudança de variável $\log_3 x = t$, temos:

$$8t + \frac{6}{1 + t} = 18 \Rightarrow \frac{8t(1 + t) + 6}{\cancel{1 + t}} = \frac{18(1 + t)}{\cancel{1 + t}}$$

$$\therefore\ 8t + 8t^2 + 6 = 18 + 18t \ \therefore\ 8t^2 - 10t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = -\frac{3}{4}.$$

Voltando à variável original, temos:

$$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9 \text{ ou } \log_3 x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = 3^{-\frac{3}{4}} \ \therefore\ x = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}.$$

Os dois valores de x satisfazem a C.E. $x > 0$ e $x \neq \dfrac{1}{3}$.

Portanto $S = \left\{9, \sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, C.1, C.3, C.4 (a, b, c).
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5, C.2, C.4 (d, e).

Exercícios básicos

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\log_3 (6x - 9) = 4$

b) $\log_2 (2x + 10) + \log_2 (x + 1) = 6$

c) $\log_5 (3x + 7) - \log_5 (x - 1) = 1$

d) $\log_2 x + \log_2 (x - 2) - \log_2 (x - 3) = 3$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x) - \log_{\frac{1}{2}} x = -2$

f) $\log_3 (x - 2) - \log_9 (x - 4) = 1$

g) $\log_6 (x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{6}} (x - 2) = \log_{36} 64$

h) $\log_x 32 = -5$

i) $\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{4}} x^5 + 4 = 0$

j) $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} - \dfrac{1}{4 - \log_{\frac{1}{2}} x} = \dfrac{1 + \log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$

B.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das equações:

a) $\log_2 (x^2 + 2x) = 3$

b) $\log_4 (x + 10) + \log_4 (x - 5) = 2$

c) $\log (x + 68) - \log (x - 22) = 1$

d) $2 \log_2 x + \log_2 3 - \log_2 (x - 1) = \log_2 6 + \log_2 x$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) = -3$

f) $\log_2 (x + 3) - \log_4 x = 2$

g) $2 \log_5 x + 2 \log_{25} (x + 1) = -\log_{\frac{1}{5}} (x^2 + 4x)$

h) $\log_x 16 = -4$

i) $[\log_2 (x + 1)]^2 - \log_2 (x + 1)^6 + 8 = 0$

j) $\dfrac{2 + \log_{16} x^2}{1 + \log_{16} x} = \log_{16} x^2$

B.3 Resolva, para x e y reais, o seguinte sistema: $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 15. \end{cases}$

B.4 Determine os reais x e y que satisfaçam o sistema: $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

B.5 Obtenha os números reais x e y de modo que: $\begin{cases} 3 \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 xy = 0. \end{cases}$

Exercícios complementares

C.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_3 (3x + 6) - \log_3 (x + 2) = 1$.

C.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação: $\log_7 (x - 1) - 2 \log_{\frac{1}{7}} (x - 2) - 2 \log_{49} (x + 1) = \log_7 (x^2 - 19)$.

C.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade: $\log (x + 3) + \log (x - 3) = 2 \log x$.

C.4 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva cada uma das equações:

a) $3^{\log_3 x} = \log_{\frac{1}{3}} 9$

b) $3^{2 \log_x 3} = x^{\log_x 3x}$

c) $(\log x)^{\log x} = \log x$, para $x > 1$

d) $x^{\log_3 x} = 27x^2$

e) $\log |2x - 1| = \log (x + 1)$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fesp-SP) A solução da equação $2 + \log_2 (x - 1) = \log_2 (x^2 - 4)$ é:

a) $\{3\}$ b) $\{-2, 0\}$ c) $\{4\}$ d) $\{1, 3\}$ e) $\{0, 4\}$

V.2 (Fuvest-SP) O conjunto solução da equação $x(\log_5 3^x + \log_5 21) + \log_5 \left(\dfrac{3}{7}\right)^x = 0$ é:

a) $\varnothing$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, -2\}$

V.3 (Fesp-SP) Na equação $\log_3 x - \log_9 x = \dfrac{3}{2}$, o valor de x é:

a) 16 b) 81 c) 9 d) 18 e) 27

V.4 (FEI-SP) Resolva o sistema $\begin{cases} \log_x y + 18 \log_y x = 9 \\ xy = 128. \end{cases}$

Capítulo 42

Inequação logarítmica

1. Conceituação

Chama-se "inequação logarítmica" aquela que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a) $\log_2 (3x - 1) > 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 5) \leqslant -4$

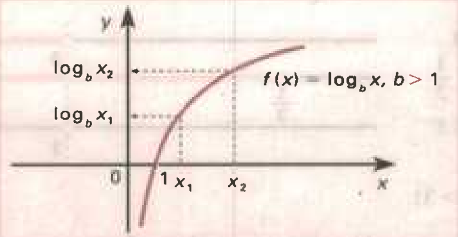
c) $\log_3 (2x + 1) - \log_3 (x + 8) \leqslant -1$

d) $\log_x 9 > 2$

2. Resolução de uma inequação logarítmica

A resolução de uma inequação logarítmica baseia-se na propriedade G.2 ou na G.3 das funções logarítmicas.

G.2 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $b > 1$.

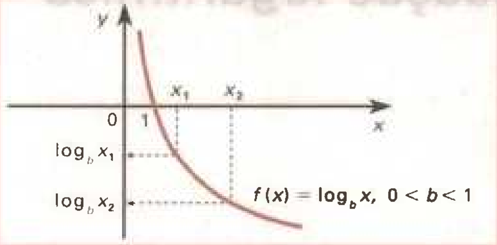


Temos, então:

$$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1, \quad \forall \{x_1, x_2, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b \neq 1.$$

Ou seja, o "sentido" ($>$) da desigualdade entre dois logaritmos de mesma base b, $b > 1$, se mantém ($>$) para os logaritmandos.

G.3 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.



Temos, então:

$$\log_b x_2 < \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1, \quad \forall \{x_1, x_2, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b < 1.$$

Ou seja, o "sentido" ($<$) da desigualdade entre dois logaritmos de mesma base b, $0 < b < 1$, é "invertido" ($>$) para os logaritmandos.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a inequação $\log_2 (3x - 1) > 3$.

Resolução

Condição de existência (C.E.) $\quad 3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad \therefore \quad x > \frac{1}{3}.$

Preparação da inequação

Escrevemos o número 3 como um logaritmo de base 2, ou seja: $3 = \log_2 2^3$.

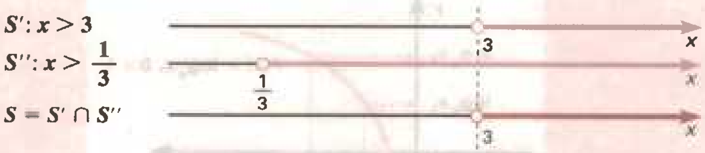
Temos, então: $\log_2 (3x - 1) > \log_2 2^3$.

Resolução da inequação

Pela propriedade G.2, temos que o "sentido" ($>$) da desigualdade entre os logaritmos se mantém ($>$) para os logaritmandos, pois a base 2 é maior que 1. Ou seja:

$$\log_2 (3x - 1) > \log_2 8 \Rightarrow 3x - 1 > 8 \therefore 3x > 9 \therefore x > 3.$$

O conjunto solução S da inequação é a intersecção do conjunto S' dos reais x tais que $x > 3$, com o conjunto S'' dos reais x que satisfazem a C.E. $x > \frac{1}{3}$. Ou seja:



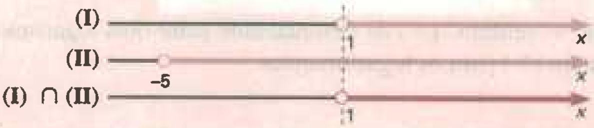
Portanto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

R.2 Resolver a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 5) \leq -4$.

Resolução

Condição de existência (C.E.)

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -5. \end{cases}$$



$\therefore \quad x > 1.$

Preparação da inequação

Escrevemos o número -4 da inequação como um logaritmo de base $\frac{1}{2}$, ou seja: $-4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

Temos, então: $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

Pela propriedade L.6 dos logaritmos, podemos escrever: $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)(x + 5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

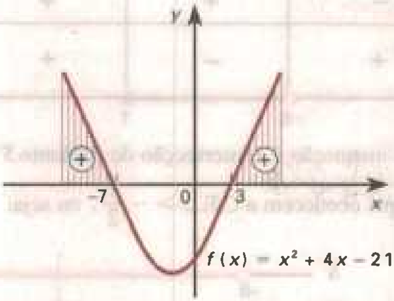
Resolução da inequação

Pela propriedade G.3 da função logarítmica, temos que o "sentido" ($\leqslant$) da desigualdade entre os logaritmos é "invertido" ($\geqslant$) para os logaritmandos, pois a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ está entre 0 e 1. Ou seja:

$\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)(x + 5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16 \Rightarrow (x - 1)(x + 5) \geqslant 16$

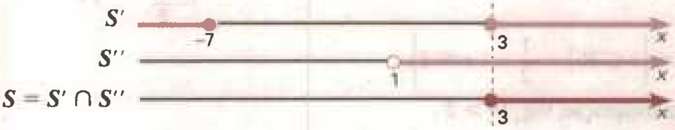
$\therefore x^2 + 5x - x - 5 \geqslant 16$

$\therefore x^2 + 4x - 21 \geqslant 0.$



Portanto $x \leqslant -7$ ou $x \geqslant 3$.

O conjunto solução S da inequação é a intersecção do conjunto S' dos reais x tais que $x \leqslant -7$ ou $x \geqslant 3$, com o conjunto S'' dos reais que satisfazem a C.E. $x > 1$. Isto é:



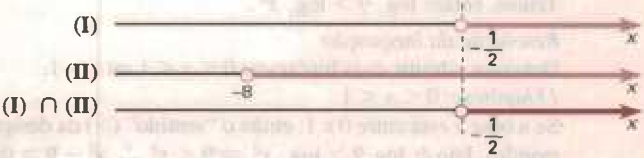
Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

R.3 Resolver a inequação $\log_3 (2x + 1) - \log_3 (x + 8) \leqslant -1$.

Resolução

Condição de existência (C.E.)

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ x + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x > -8. \end{cases}$$



$\therefore$ C.E. [illegible] $-\frac{1}{2}$

Preparação da inequação

Escrevemos o número -1 como um logaritmo de base 3. Isto é: $-1 = \log_3 3^{-1}$.

Temos, então: $\log_3 (2x + 1) - \log_3 (x + 8) \leqslant \log_3 3^{-1}$.

Pela propriedade L.7 dos logaritmos, podemos escrever: $\log_3 \dfrac{2x + 1}{x + 8} \leqslant \log_3 3^{-1}$.

Resolução da inequação

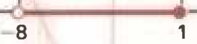
Como a base dos logaritmos é maior que 1, o "sentido" ($\leqslant$) da desigualdade se mantém ($\leqslant$) para os logaritmandos. Isto é:

$$\log_3 \frac{2x+1}{x+8} \leqslant \log_3 \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x+1}{x+8} \leqslant \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \frac{2x+1}{x+8} - \frac{1}{3} \leqslant 0$$

$$\therefore \frac{3(2x+1)-(x+8)}{3(x+8)} \leqslant 0 \quad \therefore \quad \frac{6x+3-x-8}{3x+24} \leqslant 0 \quad \therefore \quad \frac{5x-5}{3x+24} \leqslant 0.$$

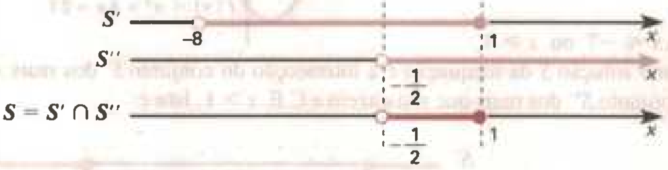
Construindo o quadro do estudo do sinal da expressão $\frac{5x-5}{3x+24}$, temos:

		−8	1
$5x-5$	−	−	+
$3x+24$	−	+	+
$\frac{5x-5}{3x+24}$	+	−	+



Portanto $-8 < x \leqslant 1$.

O conjunto solução S da inequação é a intersecção do conjunto S' dos reais x tais que $-8 < x < 1$, com o conjunto S'' dos reais x que obedecem a C.E. $x > -\frac{1}{2}$, ou seja:



Assim, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$.

R.4 Resolver a inequação $\log_x 9 > 2$.

Resolução

Condição de existência (C.E.)

$x > 0$ e $x \neq 1$.

Preparação da inequação

Escrevemos o número 2 como um logaritmo de base x, ou seja: $2 = \log_x x^2$.

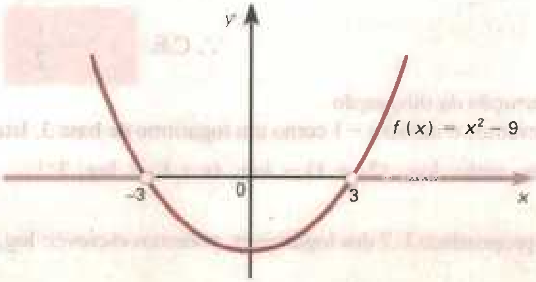
Temos, então: $\log_x 9 > \log_x x^2$.

Resolução da inequação

Devemos admitir duas hipóteses: $0 < x < 1$ ou $x > 1$.

1ª hipótese: $0 < x < 1$.

Se a base x está entre 0 e 1, então o "sentido" ($>$) da desigualdade deve ser "invertido" ($<$) para os logaritmandos. Isto é: $\log_x 9 > \log_x x^2 \Rightarrow 9 < x^2 \therefore x^2 - 9 > 0$.

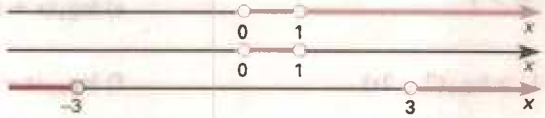


Portanto $x < -3$ ou $x > 3$.
Assim sendo, o conjunto solução S_1, sob a 1ª hipótese, é formado pelos valores reais x que satisfazem as três condições:

(C.E.) $x > 0$ e $x \neq 1$ S'

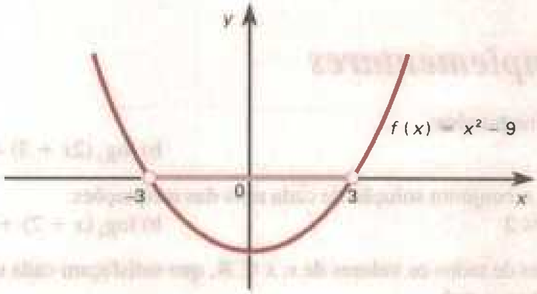
(1ª hipótese) $0 < x < 1$ S''

$x < -3$ ou $x > 3$ S'''



Assim, $S_1 = S' \cap S'' \cap S''' = \varnothing$.
Portanto não existe x, sob a 1ª hipótese, que satisfaça a inequação $\log_x 9 > 2$.

2ª hipótese: $x > 1$.
Se a base x é maior que 1, então o "sentido" (>) da desigualdade entre os logaritmos se mantém (>) para os logaritmandos. Isto é: $\log_x 9 > \log_x x^2 \Rightarrow 9 > x^2 \therefore x^2 - 9 < 0$.



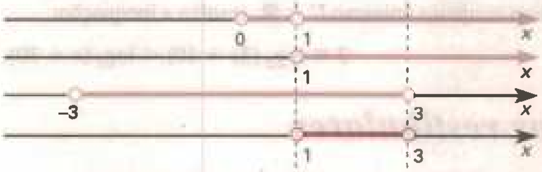
Portanto $-3 < x < 3$.
Assim, o conjunto solução S_2, sob a 2ª hipótese, é formado pelos valores reais x que satisfazem as três condições:

(C.E.) $x > 0$ e $x \neq 1$ S'

(2ª hipótese) $x > 1$ S''

$-3 < x < 3$ S'''

$S_2 = S' \cap S'' \cap S'''$



Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.
Finalmente, o conjunto $S = S_1 \cup S_2$ é o conjunto solução da inequação proposta:

$$S = \varnothing \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}.$$

Ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3 (a, b), C.1, C.3 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3 (c, d, e), C.2, C.3 (b), C.4.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\log_5 (2x - 8) > 2$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) \leq -1$

c) $\log_2 (3x - 6) > \log_2 (6 - x)$

d) $\log_{0,5} (5x - 1) \geq \log_{0,5} (5 - 2x)$

e) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 1) < 3$

f) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{4}} (5x + 1) \geq 1$

B.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\log_3(4x-2)\leqslant 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5-x)>3$

c) $\log_6(3x-1)\geqslant\log_6(7-2x)$

d) $\log_{0,2}(4x-1)<\log_{0,2}(1-x)$

e) $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\geqslant 2$

f) $\log_{0,1}(x-2)-\log_{0,1}(x+4)>\log_{0,1}\dfrac{1}{4}$

B.3 Determine o conjunto dos números reais x que satisfazem cada uma das inequações:

a) $2\log_3\sqrt{x+2}+\log_3(5x-8)\leqslant 5$

b) $\log_2(x^2+2x)>3$

c) $\log_{0,7}(x^2-1)\geqslant 2\log_{0,7}(x-2)$

d) $2\log_2(x+1)-\log_2(x^2-1)<1$

e) $\log(x+3)+\log(x-3)\leqslant 2\log x$

Exercícios complementares

C.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\log_x 16<2$

b) $\log_x(2x+3)\geqslant 2$

C.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\log_x(3x+10)\leqslant 2$

b) $\log_x(x+2)+1>3\log_x 2$

C.3 Obtenha o conjunto de todos os valores de x, $x\in\mathbb{R}$, que satisfaçam cada uma das desigualdades:

a) $\log_2(x+3)-\log_4 x\leqslant 2$

b) $\log_6(x^2-1)+\log_{\frac{1}{6}}(x-2)>\log_{36}64$

C.4 Considerando o conjunto universo $U=\mathbb{R}$, resolva a inequação:

$$3\leqslant\log_2(3x+10)<\log_2(x+30).$$

Questões dos vestibulares

V.1 (ITA-SP) Considere $A(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2+4x+3)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Então temos:

a) $A(x)>1$, para algum $x\in\mathbb{R}$, $x>1$.

b) $A(x)=1$, para algum $x\in\mathbb{R}$.

c) $A(x)<1$, apenas para $x\in\mathbb{R}$ tal que $0<x<1$.

d) $A(x)>1$, para cada $x\in\mathbb{R}$ tal que $0<x<1$.

e) $A(x)<1$, para $x\in\mathbb{R}$.

V.2 (Fuvest-SP) Se $\log_{10}x\leqslant\log_2 4\ \log_4 6\ \log_6 8-1$, então:

a) $0<x\leqslant 10^2$ b) $10^2<x\leqslant 10^4$ c) $10^4<x\leqslant 10^6$ d) $10^6<x\leqslant 10^8$ e) $x>10^8$

V.3 (Faap-SP) Dada a equação $x^2-3x+\log_2 n=0$, $n>0$, determine os valores de n para que ela tenha duas raízes de sinais contrários.

V.4 (Unicamp-SP) Considere que certo país troca de moeda cada vez que a inflação acumulada atinge a cifra de 900%. A nova moeda vale sempre 1 000 vezes a antiga. Com uma inflação de 25% ao mês, em quantos meses esse país trocará de moeda? (Use $\log_{10}2=0{,}301$.)

Capítulo 43

Logaritmos decimais

1. A tábua de logaritmos

Conhecendo-se os logaritmos dos números reais positivos numa base b, é possível calcular os logaritmos desses números em qualquer outra base c, bastando para isso usar a fórmula de mudança de base:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}, \text{ com } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \text{ e } b \neq 1, \\ c > 0 \text{ e } c \neq 1. \end{cases}$$

Por isso é conveniente conhecermos os logaritmos dos números reais positivos numa determinada base. Devido a certas comodidades, escolhemos a base 10. O primeiro matemático a usar a base 10 nos logaritmos foi o inglês Henry Briggs (1561-1639). Briggs construiu uma tabela (tábua) apresentando duas colunas:

N	*m*
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮

(Cada valor da coluna *m* deve ser interpretado como a parte decimal de um número. Por exemplo, o valor 47712 da coluna *m* deve ser entendido como 0,47712.)

Cada número N da primeira coluna é um real positivo e cada número m da segunda coluna é um real não-negativo, menor que 1, chamado de *mantissa* do log N.

2. Uso da tábua de logaritmos

Para que você entenda o uso da tabela de logaritmos decimais, consideremos o número log 945.
Temos que $10^2 \leq 945 < 10^3$.
Observe que 945 pertence a um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, cujos extremos são potências inteiras e consecutivas de 10. O menor expoente dessas potências é chamado de "*característica* do log 945". Portanto, temos:

A característica do log 945 é 2.

Por outro lado, como a função $f(x) = 10^x$ é crescente e $10^2 \leq 945 < 10^3$, podemos afirmar que:

$$945 = 10^{2+m}, 0 \leq m < 1,$$

pois $10^2 \leq 10^{2+m} < 10^3$. Temos assim, pela definição de logaritmo, que:

$$945 = 10^{2+m} \Rightarrow \log 945 = 2 + m.$$

Isto é, log 945 é igual à soma de sua característica (2) com um número m, não-negativo e menor que 1. O número m é chamado de **"mantissa do log 945"** e seu valor localiza-se na tábua de logaritmos, na coluna m e na mesma linha do número 945.

N	m
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮
945	97543

← $m = 0{,}97543$

Temos então que:

A mantissa do log 945 é 0,97543.

Assim sendo, podemos escrever: $\log 945 = 2 + 0{,}97543 \Rightarrow \log 945 = 2{,}97543$.

Generalizando:

Chama-se "**característica** do número log N, com $N > 0$", o número inteiro c tal que:

inteira (-1) / compas 0,1 $10^c \leqslant N < 10^{c+1}$.

Chama-se "**mantissa** do número log N, com $N > 0$", o número m, não-negativo e menor que 1, tal que: $\log N = c + m$, em que c é a característica do log N.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar a característica de cada um dos números:

a) log 1 128
b) log 67
c) log 9
d) log 45,3
e) log 125,8
f) log 0,39
g) log 0,04

Resolução

a) Temos $10^3 \leqslant 1\,128 < 10^4$. Portanto a característica do número log 1 128 é 3.
b) Temos $10^1 \leqslant 67 < 10^2$. Portanto a característica do número log 67 é 1.
c) Temos $10^0 \leqslant 9 < 10^1$. Portanto a característica do número log 9 é 0.
d) Temos $10^1 \leqslant 45{,}3 < 10^2$. Portanto a característica do número log 45,3 é 1.
e) Temos $10^2 \leqslant 125{,}8 < 10^3$. Portanto a característica do número log 125,8 é 2.
f) Temos $10^{-1} \leqslant 0{,}39 < 10^0$. Portanto a característica do número log 0,39 é -1.
g) Temos $10^{-2} \leqslant 0{,}04 < 10^{-1}$. Portanto a característica do número log 0,04 é -2.

R.2 Um número real positivo N apresenta, na forma decimal, cinco algarismos em sua parte inteira. Determinar a característica do log N.

Resolução

Se N apresenta cinco algarismos em sua parte inteira (por exemplo, 63 021,28), então:

$$10\,000 \leqslant N < 100\,000 \Rightarrow 10^4 \leqslant N < 10^5.$$

Assim, a característica do log N é 4.

Regra prática

Se um número real N, maior que 1, apresenta, na forma decimal, k algarismos em sua parte inteira, então a característica do log N é $k - 1$.

Exemplos

a) O número 659,4251 apresenta três algarismos em sua parte inteira; portanto a característica do log 659,4251 é 2.

b) O número 9,283 apresenta um algarismo em sua parte inteira; portanto a característica do log 9,283 é 0 (zero).

Exercício resolvido

R.3 Um número real N, positivo e menor que 1, apresenta, na forma decimal, três zeros antecedendo o primeiro dígito não-nulo. Determinar a característica do log N.

Resolução

Se N, $0 < N < 1$, apresenta três zeros antecedendo o primeiro dígito não-nulo (por exemplo, 0,0012), então: $0{,}001 \leqslant N < 0{,}01 \Rightarrow 10^{-3} \leqslant N < 10^{-2}$.

Assim, a característica do log N é -3.

Regra prática

Se um número N, positivo e menor que 1, apresenta, na forma decimal, k algarismos iguais a zero antecedendo o primeiro algarismo não-nulo, então a característica do log N é $-k$.

Exemplos

a) O número 0,0005 apresenta quatro zeros antecedendo o primeiro dígito não-nulo. Portanto a característica do log 0,0005 é -4.

b) O número 0,324 apresenta um zero antecedendo o primeiro dígito não-nulo. Portanto a característica do log 0,324 é -1.

Exercícios resolvidos

R.4 Procurar na tábua de logaritmos a mantissa de cada um dos números:

a) log 1 128 b) log 67 c) log 9

Resolução

a) A mantissa do log 1 128 localiza-se na coluna m e na mesma linha do número 1 128:

N	m
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮
1 128	05231

Mantissa do log 1128

Assim, a mantissa do log 1 128 é 0,05231.

b) A mantissa do log 67 localiza-se na coluna m e na mesma linha do número 67:

N	m
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮
67	82607

Mantissa do log 67

Assim, a mantissa do log 67 é 0,82607.

c) A mantissa do log 9 localiza-se na coluna m e na mesma linha do número 9:

N	m
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮
9	95424

Mantissa do log 9

Assim, a mantissa do log 9 é 0,95424.

R.5 Com o auxílio da tabela de logaritmos decimais, calcular:

a) log 1 128 b) log 67 c) log 9

Resolução

Nos exercícios R.1 e R.4 calculamos, respectivamente, a característica e a mantissa de cada um dos logaritmos pedidos. Como o valor de um logaritmo decimal é igual à soma de sua característica com sua mantissa, temos:

a) $\log 1\,128 = 3 + 0{,}05231 = 3{,}05231$;

b) $\log 67 = 1 + 0{,}82607 = 1{,}82607$;

c) $\log 9 = 0 + 0{,}95424 = 0{,}95424$.

R.6 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcular $\log_{12} 236$.

Resolução

Usando a fórmula de mudança de base, temos: $\log_{12}236 = \dfrac{\log 236}{\log 12}$.

A característica do log 236 é 2 e sua mantissa, dada pela tábua, é 0,37291. Assim temos:

$$\log 236 = 2 + 0{,}37291 = 2{,}37291.$$

A característica do log 12 é 1 e sua mantissa, dada pela tábua, é 0,07918. Assim temos:

$$\log 12 = 1 + 0{,}07918 = 1{,}07918.$$

Temos finalmente que: $\log_{12}236 = \dfrac{\log 236}{\log 12} = \dfrac{2{,}37291}{1{,}07918} = 2{,}19880$.

R.7 Determinar a característica e a mantissa de cada um dos logaritmos:

a) $\log x = 3{,}99978$ b) $\log y = -1{,}43356$

Resolução

a) $\log x = 3 + 0{,}99978$;

c = característica = 3; m = mantissa = 0,99978 ($0 \leqslant m < 1$).

b) $\log y = -4 + (-0{,}43356)$.

Lembre-se de que a mantissa é um número positivo e menor que 1. Portanto $-0{,}43356$ não é a mantissa do log y nem -4 é característica. Para determinarmos a característica e a mantissa de logaritmos negativos, agimos do seguinte modo:

- Escrevemos o valor do logaritmo como uma soma de duas parcelas, a parte inteira mais a parte decimal:

$$\log y = \underbrace{(-4)}_{\textbf{Parte inteira}} + \underbrace{(-0{,}43356)}_{\textbf{Parte decimal}}.$$

- Subtraímos 1 da parte inteira e somamos 1 à parte decimal: $\log y = (-4 - 1) + (-0{,}43356 + 1)$.

  Observe que subtraindo 1 e ao mesmo tempo somando 1 a um número, o número não se altera.
- Chegamos finalmente a $\log y = -5 + 0{,}56644$. Assim, temos:

$$c = \text{característica} = -5,\ m = \text{mantissa} = 0{,}56644.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.6, B.9 (a, b), C.1 (a até d), C.2, C.5, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.7, B.8, B.9 (c, d), C.1 (e até j), C.3, C.4, C.6, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Usando a definição de característica, determine a característica de cada um dos números:

a) log 129 c) log 6 e) log 32,71 g) log 0,0013

b) log 1035 d) log 117,8 f) log 0,34

B.2 Usando a definição de característica, determine a característica de cada um dos números:

a) log 1 345 c) log 13 e) log 1 432,5 g) log 0,127

b) log 12 428 d) log 26,341 f) log 0,03

B.3 Usando as regras práticas, determine a característica de cada um dos números:

a) log 348 b) log 1 625,32 c) log 0,0031 d) log 0,000013

B.4 Usando as regras práticas, determine a característica de cada um dos números:

a) log 12 548 b) log 41,321 c) log 1,2 d) log 0,000004

B.5 Procure na tábua de logaritmos a mantissa de cada um dos números:

a) log 193 b) log 1 129 c) log 3

B.6 Com o auxílio da tabela de logaritmos, calcule:

a) log 193 b) log 1 129 c) log 3

B.7 Procure na tábua de logaritmos a mantissa de cada um dos números:

a) log 845 b) log 1 189 c) log 17

B.8 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcule:

a) log 845 b) log 1 189 c) log 17

B.9 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcule:

a) $\log_{52} 128$ b) $\log_{23} 16$ c) $\log_{6} 45$ d) $\log_{26} 234$

Exercícios complementares

C.1 Determine a característica e a mantissa de cada um dos logaritmos:

a) $\log x = 12{,}56336$ c) $\log z = \frac{5}{18}$ e) $\log t = 0{,}55630$ g) $\log p = -7{,}38934$ i) $\log r = \sqrt{20}$

b) $\log y = -2{,}52288$ d) $\log N = -\frac{3}{5}$ f) $\log v = \frac{4\,138}{5}$ h) $\log q = -\frac{13}{25}$ j) $\log h = -\sqrt{30}$

C.2 Sabendo que N é um número inteiro e que $\log N = 8{,}56336$, determine o número de algarismos de N.

C.3 Sendo N um número inteiro e $\log N = 12{,}07918$, determine o número de algarismos de N.

C.4 Dado que N é um número inteiro e que $\log N = \frac{123}{5}$, determine o número de algarismos de N.

C.5 Sabendo que $\log 2 = 0{,}30103$, determine o número de algarismos de 2^{50}.

C.6 Determine o número de algarismos de 3^{100}, sabendo que $\log 3 = 0{,}47712$.

C.7 Quantos zeros iniciais tem a representação decimal de 2^{-50}, sabendo que $\log 2 = 0{,}30103$.

C.8 Sabendo que $\log 5 = 0{,}69897$, determine a quantidade de zeros iniciais da representação decimal de 5^{-100}.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Numa tábua de logaritmos decimais foram encontrados os dados ao lado:

Número	Mantissa
3494	54332

Assim sendo, tem-se que o log 3494 é igual a:

a) 54332 b) 0,54332 c) 4,54332 d) 3,54332 e) −1,54332

V.2 (Cescea-SP) A característica do log 36,9 é:

a) −1 b) −2 c) 1 d) 2 e) 0

V.3 (PUC-SP) Se log 0,0321 = −1,49349, então a característica e a mantissa do log 0,0321 são, respectivamente:

a) −1 e 0,49349 b) −1 e −0,49349 c) −2 e 0,49349 d) −2 e −0,49349 e) −2 e 0,50651

Capítulo 44

Cálculo de logaritmos não-tabelados

1. Propriedade fundamental da mantissa

> Se dois números reais positivos *a* e *b* diferem entre si apenas na posição da vírgula, então os números log *a* e log *b* têm a mesma mantissa.

Exemplo

Os números 12,34 e 123,4 diferem entre si apenas na posição da vírgula. Seja *m* a mantissa do log 12,34. Como esse logaritmo tem característica 1, temos: $\log 12{,}34 = 1 + m$. **(I)**

Note, por outro lado, que: $\log 123{,}4 = \log (12{,}34 \cdot 10) = \log 12{,}34 + \log 10$. **(II)**

Substituindo (I) em (II), temos: $\log 123{,}4 = 1 + m + 1 = 2 + m$.

Temos então que *m* também é a mantissa do log 123,4.

Exercícios resolvidos

R.1 Com o auxílio da tábua de logaritmos calcular:

a) log 91,3 b) log 0,0823

Resolução

a) Como a parte inteira do número 91,3 possui dois algarismos, segue-se que a característica do log 91,3 é 1.

Pela propriedade fundamental da mantissa, os números log 91,3 e log 913 têm a mesma mantissa, pois 91,3 e 913 diferem apenas na posição da vírgula. Assim sendo, a mantissa está na coluna *m* e na mesma linha do número 913.

N	*m*
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮
913	96047

Mantissa do log 91,3

Finalmente, temos $\log 91{,}3 = 1 + 0{,}96047 = 1{,}96047$.

b) Como o número 0,0823 possui dois zeros antecedendo o primeiro dígito não-nulo, segue-se que a característica do log 0,0823 é −2.

Pela propriedade fundamental da mantissa, os números log 0,0823 e log 823 têm a mesma mantissa, pois 0,0823 e 823 diferem apenas na posição da vírgula. Assim sendo, a mantissa está na coluna *m* e na mesma linha do número 823.

N	*m*
1	00000
2	30103
3	47712
⋮	⋮
823	91540

Mantissa do log 0,0823

Finalmente, temos: $\log 0{,}0823 = -2 + 0{,}91540 = -1{,}0846$.

R.2 Determinar o número x tal que $\log x = 4{,}09691$.

Resolução

$$\log x = \underbrace{4}_{\text{Característica}} + \underbrace{0{,}09691}_{\text{Mantissa}}.$$

A mantissa 0,09691 está localizada na tabela na mesma linha do número 125 (verifique na pág. 330). Como a característica do $\log x$ é 4, temos que o número positivo x deve ter cinco algarismos em sua parte inteira e deve se diferenciar do 125 apenas na posição da vírgula. Portanto temos que: $x = 12\,500$.

R.3 Determinar o número x tal que $\log x = -2{,}02228$.

Resolução

Para determinarmos a característica e a mantissa do $\log x$, agimos do seguinte modo:

$$\log x = -2 + (-0{,}02228) = (-2 - 1) + (-0{,}02228 + 1) = \underbrace{-3}_{\text{Característica}} + \underbrace{0{,}97772}_{\text{Mantissa}}$$

A mantissa 0,97772 está localizada na tabela na mesma linha do número 95 (verifique na pág. 330). Como a característica do $\log x$ é -3, temos que o número positivo x deve ser menor que 1, ter três zeros antecedendo o primeiro dígito diferente de zero e se diferenciar do número 95 apenas na posição da vírgula. Portanto temos que: $x = 0{,}0095$.

R.4 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcular $\log \sqrt{26{,}1}$.

Resolução

$$\log \sqrt{26{,}1} = \log\,(26{,}1)^{\frac{1}{2}} \underset{\text{L.3}}{=} \frac{1}{2}\log 26{,}1 = \frac{1}{2}\log\frac{261}{10} \underset{\text{L.7}}{=} \frac{1}{2}(\log 261 - \log 10).$$

A característica do log 261 é 2 e, na tábua de logaritmos, encontramos a mantissa: 0,41664 (verifique na pág. 331).

Portanto $\log 261 = 2 + 0{,}41664 = 2{,}41664$.

Assim, temos que: $\log \sqrt{26{,}1} = \frac{1}{2}(2{,}41664 - 1) = 0{,}70832$.

2. Interpolação logarítmica

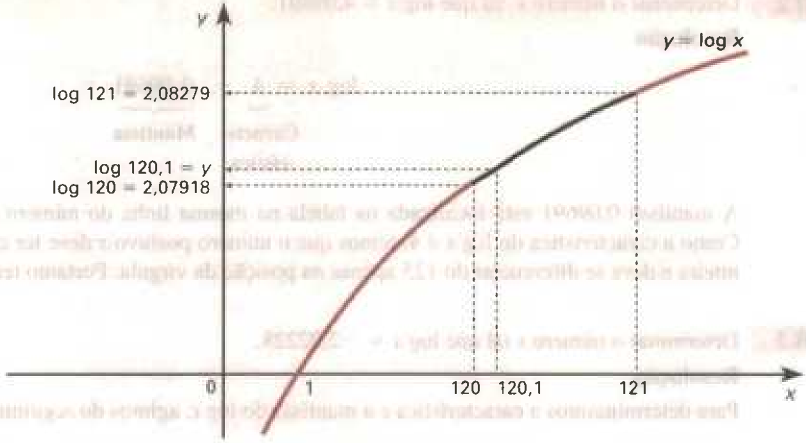
A tábua de logaritmos que apresentamos neste capítulo (págs. 330 à 334) nos dá os logaritmos decimais de 1 até 1200. Como faríamos para calcular log 1201 ou log 34,58?

Note que a mantissa do log 1201 estaria na coluna *m* e na mesma linha do número 1201. A mantissa do log 34,58 é a mesma do log 3458 e portanto estaria na coluna *m* e na mesma linha do número 3458. Porém a nossa tábua vai somente até a linha 1200.

Para resolvermos esses problemas, vamos usar uma técnica chamada de **interpolação logarítmica**. Por exemplo, vamos calcular o log 1201 a partir do log 120,1.

- Com o auxílio da tábua de logaritmos, temos que $\log 120 = 2{,}07918$ e $\log 121 = 2{,}08279$.

- Admitindo, com uma pequena margem de erro, que a variação da função $y = \log x$ é linear no intervalo $[120, 121]$, podemos encontrar o $\log 120{,}1$ pelo teorema de Tales. Observe o gráfico ao lado.



$$\frac{2{,}08279 - 2{,}07918}{2{,}08279 - y} = \frac{121 - 120}{121 - 120{,}1} \Rightarrow \frac{0{,}00361}{2{,}08279 - y} = \frac{1}{0{,}9}$$

$$\therefore 0{,}00361 \cdot 0{,}9 = 2{,}08279 - y \therefore y = 2{,}08279 - 0{,}003249 = 2{,}079541.$$

Portanto temos que: $\log 120{,}1 = 2{,}079541$.

Finalmente, temos:

$$\log 1\,201 = \log (120{,}1 \cdot 10) = \log 120{,}1 + \log 10 = 2{,}079541 + 1 = 3{,}079541.$$

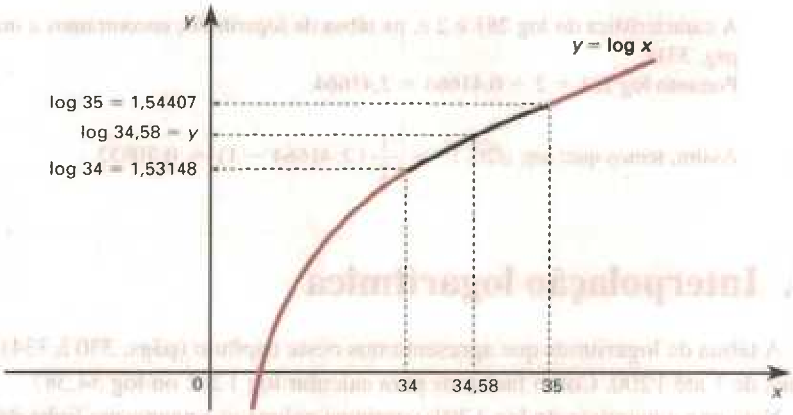
Assim, $\log 1\,201 = 3{,}079541$.

Nota

O fato de termos considerado a variação da função $f(x) = \log x$ como sendo linear no intervalo $[120, 121]$ implica um erro da ordem de 0,00006%. O valor correto do $\log 1\,201$ até a oitava casa decimal é 3,07954300.

Para calcularmos $\log 34{,}58$ agimos de maneira análoga. Vejamos.

- Com o auxílio da tábua de logaritmos temos: $\log 34 = 1{,}53148$ e $\log 35 = 1{,}54407$.
- Admitindo que a variação da função $y = \log x$ é linear no intervalo $[34, 35]$, observe o gráfico ao lado.



Temos pelo teorema de Tales que:

$$\frac{1{,}54407 - 1{,}53148}{1{,}54407 - y} = \frac{35 - 34}{35 - 34{,}58} \Rightarrow \frac{0{,}01259}{1{,}54407 - y} = \frac{1}{0{,}42}$$

$$\therefore 0{,}01259 \cdot 0{,}42 = 1{,}54407 - y \therefore y = 1{,}54407 - 0{,}0052878 = 1{,}5387822.$$

Portanto $\log 34{,}58 = 1{,}5387822$.

Exercício resolvido

R.5 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcular um valor aproximado para $5^{3,15}$.

Resolução

Temos que: $5^{3,15} = 5^3 \cdot 5^{0,15} = 125 \cdot 5^{0,15}$.

Para calcularmos $5^{0,15}$, inicialmente calculamos o seu logaritmo: $\log 5^{0,15} \underset{\text{L.3}}{=} 0{,}15\ \log 5$.

A característica do log 5 é zero e, na tábua de logaritmos, encontramos a mantissa: 0,69897. Portanto temos:

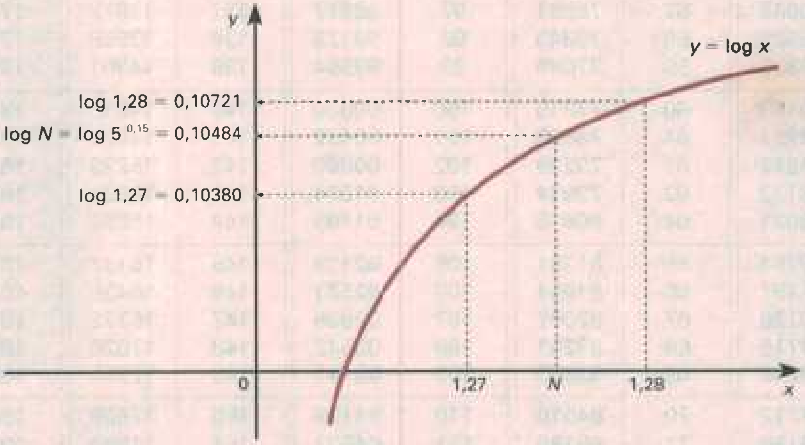
$$\log 5 = \underbrace{0}_{\text{Característica}} + \underbrace{0{,}69897}_{\text{Mantissa}} = 0{,}69897.$$

Assim, $\log 5^{0,15} = 0{,}15 \cdot 0{,}69897 \simeq 0{,}10484$.

Procurando na tábua a mantissa 0,10484, encontramos:

N	m
127	10380
128	10721

Através da interpolação logarítmica podemos encontrar o número N que corresponde à mantissa 0,10484:



Temos, então:

$$\frac{N - 1{,}27}{1{,}28 - 1{,}27} = \frac{0{,}10484 - 0{,}10380}{0{,}10721 - 0{,}10380} \Rightarrow \frac{N - 1{,}27}{0{,}01} = \frac{0{,}00104}{0{,}00341}$$

$$\therefore \frac{N - 1{,}27}{0{,}01} = 0{,}30498 \therefore \text{N} \simeq 0{,}30498 \cdot 0{,}01 + 1{,}27 \Rightarrow \text{N} \simeq 1{,}27304.$$

Portanto temos: $\log 5^{0,15} = \log 1{,}27304 \Rightarrow 5^{0,15} = 1{,}27304$.

Finalmente, temos: $5^{3,15} = 5^3 \cdot 5^{0,15} = 125 \cdot 1{,}27304 = 159{,}13$.

3. Tábua de logaritmos decimais

Convenções

I. A coluna *N* apresenta os logaritmandos.

II. Cada número da coluna *m* representa as casas decimais da mantissa do log *N*. A parte inteira de cada mantissa é zero.

Exemplo

N	*m*
94	97313

Esse número deve ser lido como: 0,97313.

N	*m*	*N*	*m*	*N*	*m*	*N*	*m*	*N*	*m*
0	–	40	60206	80	90309	120	07918	160	20412
1	00000	41	61278	81	90849	121	08279	161	20683
2	30103	42	62325	82	91381	122	08636	162	20952
3	47712	43	63347	83	91908	123	08991	163	21219
4	60206	44	64345	84	92428	124	09342	164	21484
5	69897	45	65321	85	92942	125	09691	165	21748
6	77815	46	66276	86	93450	126	10037	166	22011
7	84510	47	67210	87	93952	127	10380	167	22272
8	90309	48	68124	88	94448	128	10721	168	22531
9	95424	49	69020	89	94939	129	11059	169	22789
10	00000	50	69897	90	95424	130	11394	170	23045
11	04139	51	70757	91	95904	131	11727	171	23300
12	07918	52	71600	92	96379	132	12057	172	23553
13	11394	53	72428	93	96848	133	12385	173	23805
14	14613	54	73239	94	97313	134	12710	174	24055
15	17609	55	74036	95	97772	135	13033	175	24304
16	20412	56	74819	96	98227	136	13354	176	24551
17	23045	57	75587	97	98677	137	13672	177	24797
18	25527	58	76343	98	99123	138	13988	178	25042
19	27875	59	77085	99	99564	139	14301	179	25285
20	30103	60	77815	100	00000	140	14613	180	25527
21	32222	61	78533	101	00432	141	14922	181	25768
22	34242	62	79239	102	00860	142	15229	182	26007
23	36173	63	79934	103	01284	143	15534	183	26245
24	38021	64	80618	104	01703	144	15836	184	26482
25	39794	65	81291	105	02119	145	16137	185	26717
26	41497	66	81954	106	02531	146	16435	186	26951
27	43136	67	82607	107	02938	147	16732	187	27184
28	44716	68	83251	108	03342	148	17026	188	27416
29	46240	69	83855	109	03743	149	17319	189	27646
30	47712	70	84510	110	04139	150	17609	190	27875
31	49136	71	85126	111	04532	151	17898	191	28103
32	50515	72	85733	112	04922	152	18184	192	28330
33	51851	73	86332	113	05308	153	18469	193	28556
34	53148	74	86923	114	05690	154	18752	194	28780
35	54407	75	87506	115	06070	155	19033	195	29003
36	55630	76	88081	116	06446	156	19312	196	29226
37	56820	77	88649	117	06819	157	19590	197	29447
38	57978	78	89209	118	07188	158	19866	198	29667
39	59106	79	89763	119	07555	159	20140	199	29885
40	60206	80	90309	120	07918	160	20412	200	30103

N	m	N	m	N	m	N	m	N	m
200	30103	250	39794	300	47712	350	54407	400	60206
201	30320	251	39967	301	47857	351	54531	401	60314
202	30535	252	40140	302	48001	352	54654	402	60423
203	30750	253	40312	303	48144	353	54777	403	60531
204	30963	254	40483	304	48287	354	54900	404	60638
205	31175	255	40654	305	48430	355	55023	405	60746
206	31387	256	40824	306	48572	356	55145	406	60853
207	31597	257	40993	307	48714	357	55267	407	60959
208	31806	258	41162	308	48855	358	55388	408	61066
209	32015	259	41330	309	48996	359	55509	409	61172
210	32222	260	41497	310	49136	360	55630	410	61278
211	32428	261	41664	311	49276	361	55751	411	61384
212	32634	262	41830	312	49415	362	55871	412	61490
213	32838	263	41996	313	49554	363	55991	413	61595
214	33041	264	42160	314	49693	364	56110	414	61700
215	33244	265	42325	315	49831	365	56229	415	61805
216	33445	266	42488	316	49969	366	56348	416	61909
217	33646	267	42651	317	50106	367	56467	417	62014
218	33846	268	42813	318	50243	368	56585	418	62118
219	34044	269	42975	319	50379	369	56703	419	62221
220	34242	270	43136	320	50515	370	56820	420	62325
221	34439	271	43297	321	50651	371	56937	421	62428
222	34635	272	43457	322	50786	372	57054	422	62531
223	34830	273	43616	323	50920	373	57171	423	62634
224	35025	274	43775	324	51055	374	57287	424	62737
225	35218	275	43933	325	51188	375	57403	425	62839
226	35411	276	44091	326	51322	376	57519	426	62941
227	35603	277	44248	327	51455	377	57634	427	63043
228	35793	278	44404	328	51587	378	57749	428	63144
229	35984	279	44560	329	51720	379	57864	429	63246
230	36173	280	44716	330	51851	380	57978	430	63347
231	36361	281	44871	331	51983	381	58092	431	63448
232	36549	282	45025	332	52114	382	58206	432	63548
233	36736	283	45179	333	52244	383	58320	433	63649
234	36922	284	45332	334	52375	384	58433	434	63749
235	37107	285	45484	335	52504	385	58546	435	63849
236	37291	286	45637	336	52634	386	58659	436	63949
237	37475	287	45788	337	52763	387	58771	437	64048
238	37658	288	45939	338	52892	388	58883	438	64147
239	37840	289	46090	339	53020	389	58995	439	64246
240	38021	290	46240	340	53148	390	59106	440	64345
241	38202	291	46389	341	53275	391	59218	441	64444
242	38382	292	46538	342	53403	392	59329	442	64542
243	38561	293	46687	343	53529	393	59439	443	64640
244	38739	294	46835	344	53656	394	59550	444	64738
245	38917	295	46982	345	53782	395	59660	445	64836
246	39094	296	47129	346	53908	396	59770	446	64933
247	39270	297	47276	347	54033	397	59879	447	65031
248	39445	298	47422	348	54158	398	59988	448	65128
249	39620	299	47567	349	54283	399	60097	449	65225
250	39794	300	47712	350	54407	400	60206	450	65321

N	m	N	m	N	m	N	m	N	m
450	65321	500	69697	550	74036	600	77815	650	81291
451	65418	501	69984	551	74115	601	77887	651	81358
452	65514	502	70070	552	74194	602	77960	652	81425
453	65610	503	70157	553	74273	603	78032	653	81491
454	65706	504	70243	554	74351	604	78104	654	81558
455	65801	505	70329	555	74429	605	78176	655	81624
456	65896	506	70415	556	74507	606	78247	656	81690
457	65992	507	70501	557	74586	607	78319	657	81757
458	66087	508	70586	558	74663	608	78390	658	81823
459	66181	509	70672	559	74741	609	78462	659	81889
460	66276	510	70757	560	74819	610	78533	660	81954
461	66370	511	70842	561	74896	611	78604	661	82020
462	66464	512	70927	562	74974	612	78675	662	82086
463	66558	513	71012	563	75051	613	78746	663	82151
464	66652	514	71096	564	75128	614	78817	664	82217
465	66745	515	71181	565	75205	615	78888	665	82282
466	66839	516	71265	566	75282	616	78958	666	82347
467	66932	517	71349	567	75358	617	79029	667	82413
468	67025	518	71433	568	75435	618	79099	668	82478
469	67117	519	71517	569	75511	619	79169	669	82543
470	67210	520	71600	570	75587	620	79239	670	82607
471	67302	521	71684	571	75664	621	79309	671	82672
472	67394	522	71767	572	75740	622	79379	672	82737
473	67486	523	71850	573	75815	623	79449	673	82802
474	67578	524	71933	574	75891	624	79518	674	82866
475	67669	525	72016	575	75967	625	79588	675	82930
476	67761	526	72099	576	76042	626	79657	676	82995
477	67852	527	72181	577	76118	627	79727	677	83059
478	67943	528	72263	578	76193	628	79796	678	83123
479	68034	529	72346	579	76268	629	79865	679	83187
480	68124	530	72428	580	76343	630	79934	680	83251
481	68215	531	72509	581	76418	631	80003	681	83315
482	68305	532	72591	582	76492	632	80072	682	83378
483	68395	533	72673	583	76567	633	80140	683	83442
484	68485	534	72754	584	76641	634	80209	684	83506
485	68574	535	72835	585	76716	635	80277	685	83569
486	68664	536	72916	586	76790	636	80346	686	83632
487	68753	537	72997	587	76864	637	80414	687	83696
488	68842	538	73078	588	76938	638	80482	688	83759
489	68931	539	73159	589	77012	639	80550	689	83822
490	69020	540	73239	590	77085	640	80618	690	83885
491	69108	541	73320	591	77159	641	80686	691	83948
492	69197	542	73400	592	77232	642	80754	692	84011
493	69285	543	73480	593	77305	643	80821	693	84073
494	69373	544	73560	594	77379	644	80889	694	84136
495	69461	545	73640	595	77452	645	80956	695	84198
496	69548	546	73719	596	77525	646	81023	696	84261
497	69636	547	73799	597	77597	647	81090	697	84323
498	69723	548	73878	598	77670	648	81158	698	84386
499	69810	549	73957	599	77743	649	81224	699	84448
500	69897	550	74036	600	77815	650	81291	700	84510

N	*m*	*N*	*m*	*N*	*m*	*N*	*m*	*N*	*m*
700	84510	750	87506	800	90309	850	92942	900	95424
701	84572	751	87564	801	90363	851	92993	901	95472
702	84634	752	87622	802	90417	852	93044	902	95521
703	84696	753	87679	803	90472	853	93095	903	95569
704	84757	754	87737	804	90526	854	93146	904	95617
705	84819	755	87795	805	90580	855	93197	905	95665
706	84880	756	87852	806	90634	856	93247	906	95713
707	84942	757	87910	807	90687	857	93298	907	95761
708	85003	758	87967	808	90741	858	93349	908	95809
709	85065	759	88024	809	90795	859	93399	909	95856
710	85126	760	88081	810	90849	860	93450	910	95904
711	85187	761	88138	811	90902	861	93500	911	95952
712	85248	762	88195	812	90956	862	93551	912	95999
713	85309	763	88252	813	91009	863	93601	913	96047
714	85370	764	88309	814	92062	864	93651	914	96095
715	85431	765	88366	815	91116	865	93702	915	96142
716	85491	766	88423	816	91169	866	93752	916	96190
717	85552	767	88480	817	91222	867	93802	917	96237
718	85612	768	88536	818	91275	868	93852	918	96284
719	85673	769	88593	819	91328	869	93902	919	96332
720	85733	770	88649	820	91381	870	93952	920	96379
721	85794	771	88705	821	91434	871	94002	921	96426
722	85854	772	88762	822	91487	872	94052	922	96473
723	85914	773	88818	823	91540	873	94101	923	96520
724	85974	774	88874	824	91593	874	94151	924	96567
725	86034	775	88930	825	91645	875	94201	925	96614
726	86094	776	88986	826	91698	876	94250	926	96661
727	86153	777	89042	827	91751	877	94300	927	96708
728	86213	778	89098	828	91803	878	94349	928	96755
729	86273	779	89154	829	91855	879	94399	929	96802
730	86332	780	89209	830	91908	880	94448	930	96848
731	86392	781	89265	831	91960	881	94498	931	96895
732	86451	782	89321	832	92012	882	94547	932	96942
733	86510	783	89376	833	92065	883	94596	933	96988
734	86570	784	89432	834	92117	884	94645	934	97035
735	86629	785	89487	835	92169	885	94694	935	97081
736	86688	786	89542	836	92221	886	94743	936	97128
737	86747	787	89597	837	92273	887	94792	937	97174
738	86806	788	89653	838	92324	888	94841	938	97220
739	86864	789	89708	839	92376	889	94890	939	97267
740	86923	790	89763	840	92428	890	94939	940	97313
741	86982	791	89818	841	92480	891	94988	941	97359
742	87040	792	89873	842	92531	892	95036	942	97405
743	87099	793	89927	843	92583	893	95085	943	97451
744	87157	794	89982	844	92634	894	95134	944	97497
745	87216	795	90037	845	92686	895	95182	945	97543
746	87274	796	90091	846	92737	896	95231	946	97589
747	87332	797	90146	847	92788	897	95279	947	97635
748	87390	798	90200	848	92840	898	95328	948	97681
749	87448	799	90255	849	92891	899	95376	949	97727
750	87506	800	90309	850	92942	900	95424	950	97772

N	m	N	m	N	m	N	m	N	m
950	97772	1000	00000	1050	02119	1100	04139	1150	06070
951	97818	1001	00043	1051	02160	1101	04179	1151	06108
952	97864	1002	00087	1052	02202	1102	04218	1152	06145
953	97909	1003	00130	1053	02243	1103	04258	1153	06183
954	97955	1004	00173	1054	02284	1104	04297	1154	06221
955	98000	1005	00217	1055	02325	1105	04336	1155	06258
956	98046	1006	00260	1056	02366	1106	04376	1156	06296
957	98091	1007	00303	1057	02407	1107	04415	1157	06333
958	98137	1008	00346	1058	02449	1108	04454	1158	06371
959	98182	1009	00389	1059	02490	1109	04493	1159	06408
960	98227	1010	00432	1060	02531	1110	04532	1160	06446
961	98272	1011	00475	1061	02572	1111	04571	1161	06483
962	98318	1012	00518	1062	02612	1112	04610	1162	06521
963	98363	1013	00561	1063	02653	1113	04650	1163	06558
964	98408	1014	00604	1064	02694	1114	04689	1164	06595
965	98453	1015	00647	1065	02735	1115	04727	1165	06633
966	98498	1016	00689	1066	02776	1116	04766	1166	06670
967	98543	1017	00732	1067	02816	1117	04805	1167	06707
968	98588	1018	00775	1068	02857	1118	04844	1168	06744
969	98632	1019	00817	1069	02898	1119	04883	1169	06781
970	98677	1020	00860	1070	02938	1120	04922	1170	06819
971	98722	1021	00903	1071	02979	1121	04961	1171	06856
972	98767	1022	00945	1072	03019	1122	04999	1172	06893
973	98811	1023	00988	1073	03060	1123	05038	1173	06930
974	98856	1024	01030	1074	03100	1124	05077	1174	06967
975	98900	1025	01072	1075	03141	1125	05115	1175	07004
976	98945	1026	01115	1076	03181	1126	05154	1176	07041
977	98989	1027	01157	1077	03222	1127	05192	1177	07078
978	99034	1028	01199	1078	03262	1128	05231	1178	07115
979	99078	1029	01242	1079	03302	1129	05269	1179	07151
980	99123	1030	01284	1080	03342	1130	05308	1180	07188
981	99167	1031	01326	1081	03383	1131	05346	1181	07225
982	99211	1032	01368	1082	03423	1132	05385	1182	07262
983	99255	1033	01410	1083	03463	1133	05423	1183	07298
984	99300	1034	01452	1084	03503	1134	05461	1184	07335
985	99344	1035	01494	1085	03543	1135	05500	1185	07372
986	99388	1036	01536	1086	03583	1136	05538	1186	07408
987	99432	1037	01578	1087	03623	1137	05576	1187	07445
988	99476	1038	01620	1088	03663	1138	05614	1188	07482
989	99520	1039	01662	1089	03703	1139	05652	1189	07518
990	99564	1040	01703	1090	03743	1140	05690	1190	07555
991	99607	1041	01745	1091	03782	1141	05729	1191	07591
992	99651	1042	01787	1092	03822	1142	05767	1192	07628
993	99695	1043	01828	1093	03862	1143	05805	1193	07664
994	99739	1044	01870	1094	03902	1144	05843	1194	07700
995	99782	1045	01912	1095	03941	1145	05881	1195	07737
996	99826	1046	01953	1096	03981	1146	05918	1196	07773
997	99870	1047	01995	1097	04021	1147	05956	1197	07809
998	99913	1048	02036	1098	04060	1148	05994	1198	07846
999	99957	1049	02078	1099	04100	1149	06032	1199	07882
1000	00000	1050	02119	1100	04139	1150	06070	1200	07918

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, C.2, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcule:
a) log 13,6 b) log 6,15 c) log 0,081 d) $\log \frac{3}{8}$ e) $\log \frac{21}{4}$ f) $\log \sqrt{13,6}$

B.2 Com o auxílio da tabela de logaritmos, calcule:
a) log 2,39 b) log 112,8 c) log 0,0032 d) $\log \frac{25}{8}$ e) $\log \frac{1}{50}$ f) $\log \sqrt[5]{0{;}081}$

B.3 Determine x em cada uma das igualdades:
a) $\log x = 2{,}98182$ b) $\log x = 0{,}48430$ c) $\log x = -2{,}33724$

B.4 Determine x em cada uma das igualdades:
a) $\log x = 4{,}62325$ b) $\log x = 0{,}68124$ c) $\log x = -1{,}22257$

B.5 Usando a técnica da interpolação logarítmica, calcule:
a) log 1 258 b) log 25,82 c) log 0,1346

B.6 Usando a técnica da interpolação logarítmica, calcule:
a) log 2 128 b) log 15,26 c) log 0,6432

Exercícios complementares

C.1 Determine x em cada uma das igualdades:
a) $\log x = 0{,}25620$ b) $\log x = 4{,}51900$ c) $\log x = -1{,}3772$

C.2 Determine x em cada uma das igualdades:
a) $\log x = 0{,}15000$ b) $\log x = 2{,}61300$ c) $\log x = -2{,}223$

C.3 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcule um valor aproximado para:
a) $2^{1.28}$ (**Sugestão:** calcule $\log 2^{1,28}$.) b) $3^{1,1214}$

C.4 Com o auxílio da tábua de logaritmos, calcule um valor aproximado para:
a) $\sqrt[5]{2}$ (**Sugestão:** calcule $\log \sqrt[5]{2}$.) b) $\sqrt[8]{3}$

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Numa tábua de logaritmos decimais são encontrados os valores ao lado.

Número	Mantissa
3215	5071

Os valores de log 321,5 e log 0,03215 são, respectivamente:
a) 2,5071 e −2,5071
b) 2,5071 e −1,4929
c) 3,5071 e −1,4929
d) 3,5071 e −2,5071
e) −2,5071 e −1,4929

V.2 (Faap-SP) Qual a mantissa do log 513,8, sabendo-se que log 0,05138 = −1,28921?

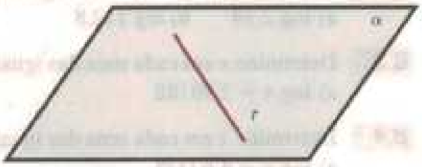
V.3 (Cescem-SP) Numa tábua de logaritmos decimais são encontrados os valores ao lado.
Calcule o valor de log 321,58.

Número	Mantissa
3 215	5071
3 216	5073

Capítulo 45

Conceito de ângulo

1. Semiplano

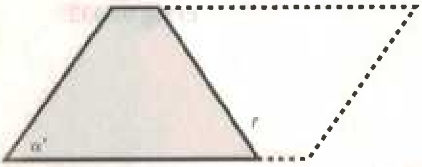


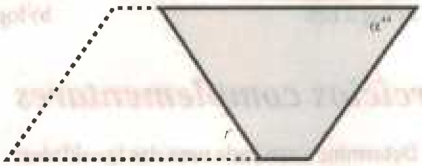
Consideremos uma reta r contida num plano α.

Sejam α' e α'' os subconjuntos de pontos desse plano tais que:

I. $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$; II. $\alpha' \cap \alpha'' = r$.

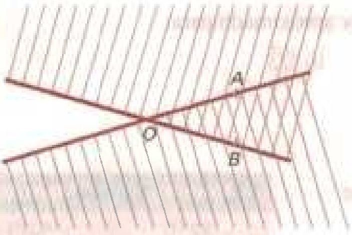
Os conjuntos de pontos α' e α'' são chamados de **semiplanos de origem r**.

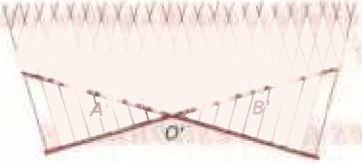




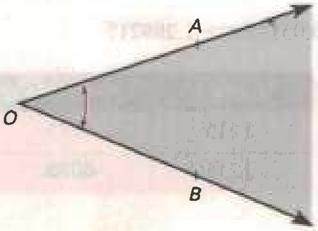
2. Ângulo geométrico

Ângulo geométrico é a intersecção de dois semiplanos cujas origens são retas concorrentes.

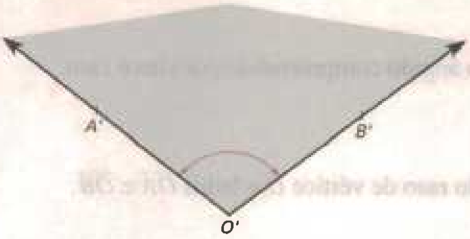




Observe que nesses dois casos temos os ângulos:



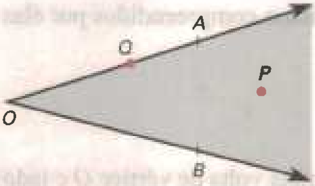
- O ponto O é chamado vértice e as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.
  Denotaremos o ângulo pelo símbolo $A\hat{O}B$.



- Ângulo $A'\hat{O}'B'$, de vértice O' e lados $\overrightarrow{O'A'}$ e $\overrightarrow{O'B'}$.

2.1. Interior de um ângulo geométrico

Um ponto é **ponto interior** a um ângulo geométrico $A\hat{O}B$ se, e somente se, pertence a esse ângulo mas não a um dos lados ou $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OB}$.

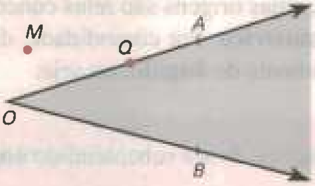


- P é ponto interior ao ângulo geométrico $A\hat{O}B$;
- Q não é ponto interior ao ângulo geométrico $A\hat{O}B$, pois pertence a um lado do ângulo.

O conjunto I formado por todos os pontos interiores de um ângulo geométrico $A\hat{O}B$ é denominado **interior do ângulo**.

2.2. Exterior de um ângulo geométrico

Um ponto é **ponto exterior** a um ângulo geométrico $A\hat{O}B$ se, e somente se, pertence ao plano que contém $A\hat{O}B$ mas não pertence a esse ângulo.



- M é ponto exterior ao ângulo geométrico $A\hat{O}B$;
- Q não é ponto exterior ao ângulo geométrico $A\hat{O}B$.

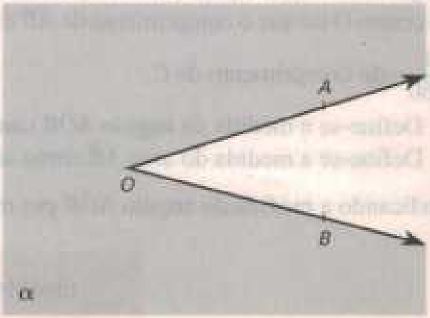
O conjunto E formado por todos os pontos exteriores a um ângulo geométrico $A\hat{O}B$ é denominado **exterior do ângulo**.

3. Ângulo replementar de um ângulo geométrico

Sejam I o interior de um ângulo geométrico $A\hat{O}B$ e α o plano que contém esse ângulo. Chama-se "**ângulo replementar** de $A\hat{O}B$" o conjunto dos pontos que pertencem a α e não pertencem a I.

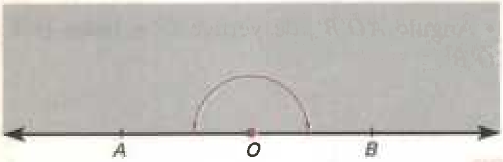
Indicando por rep($A\hat{O}B$) o replementar do ângulo geométrico $A\hat{O}B$, temos:

$$\text{rep}(A\hat{O}B) = \complement_{\alpha} I\,.$$



4. Ângulo raso

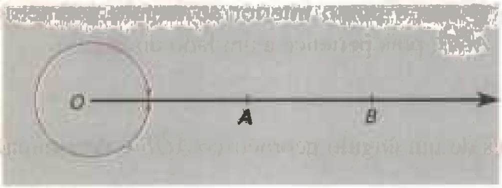
Se duas semi-retas forem opostas, então diremos que o ângulo compreendido por elas é raso.



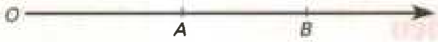
Ângulo raso de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

5. Ângulo de uma volta e ângulo nulo

Se duas semi-retas forem coincidentes, então diremos que ficam compreendidos por elas um ângulo de uma volta e um ângulo nulo.



Ângulo de uma volta de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



Ângulo nulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Notas

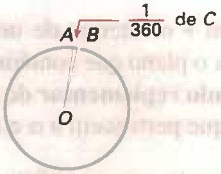
1. O ângulo raso, o nulo, o de uma volta completa e o replementar de um ângulo geométrico **não** são ângulos geométricos, pois não são intersecções de semiplanos, cujas origens são retas concorrentes.

2. O tipo de ângulo que mais nos interessa é o **ângulo geométrico**. Por comodidade, daqui para a frente, omitiremos a palavra **geométrico**, chamando-o simplesmente de **ângulo**, ou seja:

Sempre que usarmos a palavra **ângulo**, sem especificações, ficará subentendido **ângulo geométrico**.

6. O grau, unidade de medida de arco e ângulo

Seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco contido numa circunferência C de centro O tal que o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento de C.



- Define-se a medida do ângulo $A\hat{O}B$ como sendo 1 grau (1°).
- Define-se a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ como sendo 1 grau (1°).

Indicando a medida do ângulo $A\hat{O}B$ por med($A\hat{O}B$) e a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ por med($\overset{\frown}{AB}$), temos que:

$$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 1°.$$

Conseqüências

I. Toda circunferência é um arco de 360°, denominado **arco de uma volta completa.**

II. A medida de um ângulo geométrico é sempre maior que 0° (zero grau) e menor que 180° (cento e oitenta graus).

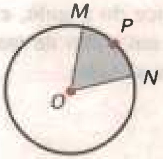
Nota

Um arco de medida 0° (zero grau) é denominado **arco nulo.**

Exercício resolvido

R.1 Na figura, o comprimento do arco $\overset{\frown}{MPN}$ é igual a $\frac{2}{9}$ do comprimento da circunferência de centro O.

Calcular a medida do ângulo $M\hat{O}N$, em graus.



Nota

Indicamos o arco por $\overset{\frown}{MPN}$ e não simplesmente por $\overset{\frown}{MN}$, pois existem dois arcos na circunferência com extremos M e N.

Resolução

Sendo x a medida, em graus, do arco $\overset{\frown}{MPN}$, temos que: $x = \frac{2}{9} \cdot 360° = 80°$.

A medida do ângulo $M\hat{O}N$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{MPN}$. Assim, temos:

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(\overset{\frown}{MPN}) = 80°.$$

6.1. Submúltiplos do grau

Dois submúltiplos do grau merecem destaque: o **minuto** e o **segundo**.

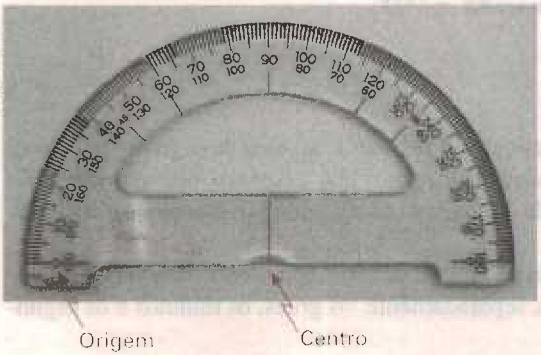
Minuto

Um minuto (1′) é igual a $\frac{1}{60}$ do grau: $1' = \frac{1°}{60} \Leftrightarrow 1° = 60'$.

Segundo

Um segundo (1″) é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto: $1'' = \frac{1'}{60} \Leftrightarrow 1' = 60''$.

6.2. O transferidor

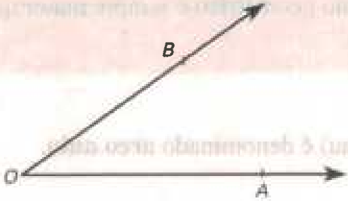


LUIZ ANTONIO

Para medirmos um ângulo, em graus, usamos o transferidor. Esse instrumento normalmente é apresentado como um semicírculo (de plástico ou de madeira), graduado de 0° a 180°.

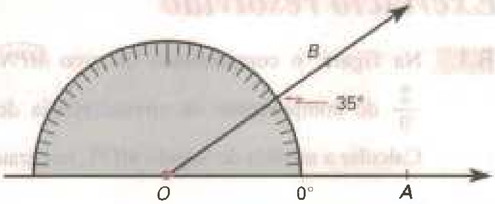
Exercício resolvido

R.2 Medir o ângulo $A\hat{O}B$ da figura com o auxílio de um transferidor.



Resolução

Colocamos o centro do transferidor coincidindo com o vértice do ângulo, e a origem (0°) coincidindo com um ponto de um lado do ângulo (conforme figura ao lado).



A leitura feita na escala no ponto sobre o outro lado do ângulo é a medida desse ângulo. Observe na escala que: $\text{med}(A\hat{O}B) = 35°$.

7. Operações com medidas em graus, minutos e segundos

7.1. Adição

Na adição de duas medidas em graus, minutos e segundos, somamos, separadamente, os graus, os minutos e os segundos.

Exercício resolvido

R.3 Efetuar: $32°45'17'' + 26°36'50''$.

Resolução

$$\begin{array}{r} 32°45'17'' \\ +\quad 26°36'50'' \\ \hline 58°81'67'' \end{array}$$

Como $60'' = 1'$, podemos escrever $67'' = 1'7''$.
Logo, $58°81'67'' = 58°82'7''$.
Temos, ainda, que $60' = 1°$, o que nos permite escrever $82' = 1°22'$.
Logo, $58°82'7'' = 59°22'7''$.

7.2. Subtração

Para subtrairmos uma medida de outra em graus, minutos e segundos, agimos da seguinte maneira:

I. se a medida em minutos (ou segundos) do minuendo for menor que a correspondente medida do subtraendo, então "emprestamos" 1° (ou 1') da medida de unidade imediatamente superior e a transformamos em 60' (ou 60'');

II. quando as medidas em graus, minutos e segundos do minuendo forem maiores ou iguais às medidas correspondentes do subtraendo, então subtraímos, separadamente, os graus, os minutos e os segundos.

Exercício resolvido

R.4 Efetuar 53°26′17″ − 28°34′15″.

Resolução

$$\begin{array}{r} 53^\circ 26' 17'' \\ 28^\circ 34' 15'' \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rr} & 52^\circ 86' 17'' \\ - & 28^\circ 34' 15'' \\ \hline & 24^\circ 52' 2'' \end{array}$$

Temos então como resposta: 24°52′2″.

7.3. Multiplicação por um número inteiro

Na multiplicação de uma medida em graus, minutos e segundos por um número inteiro, multiplicamos, separadamente, os graus, os minutos e os segundos pelo número inteiro.

Exercício resolvido

R.5 Efetuar 22°15′28″ · 6.

Resolução

$$\begin{array}{r} 22^\circ 15' 28'' \\ \times\ 6 \\ \hline 132^\circ 90' 168'' \end{array}$$

Como 132°90′168″ = 132°92′48″ = 133°32′48″, temos então como resposta: 133°32′48″.

7.4. Divisão por um número inteiro

Para dividirmos uma medida em graus, minutos e segundos por um número inteiro positivo, por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 23^\circ 26' 48'' & \ \ 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

agimos do seguinte modo:

I. dividimos a medida em graus pelo número inteiro:

$$\begin{array}{r|l} 23^\circ 26' 48'' & \ \ 3 \\ \cline{2-2} 2^\circ \qquad\quad & 7^\circ \end{array}$$

II. transformamos em minutos o resto dessa divisão (2 · 60′ = 120′) e somamos os minutos obtidos aos minutos do dividendo:

$$\begin{array}{rrrr|l} & 23^\circ & 26' & 48'' & \ \ 3 \\ \cline{5-5} & 2^\circ & + & & 7^\circ \\ (2 \cdot 60') \rightarrow & & 120' & & \\ \cline{3-3} & & 146' & & \end{array}$$

III. dividimos a nova medida em minutos pelo número inteiro:

$$\begin{array}{rrrr|l} & 23^\circ & 26' & 48'' & \ \ 3 \\ \cline{5-5} & 2^\circ & + & & 7^\circ 48' \\ (2\quad 60') \rightarrow & & 120' & & \\ \cline{3-3} & & 146' & & \\ & & 2' & & \end{array}$$

IV. transformamos em segundos o resto dessa divisão (2 · 60″ = 120″) e somamos os segundos obtidos aos segundos do dividendo:

$$\begin{array}{rcccl}
 & 23^\circ & 26' & 48'' & \multicolumn{1}{|l}{3} \\ \cline{5-5}
 & 2^\circ & + & & 7^\circ 48' \\
(2\cdot 60') \rightarrow & & \underline{120'} & + & \\
 & & 146' & & \\
 & & 2' & & \\
(2\cdot 60'') \rightarrow & & & \underline{120''} & \\
 & & & 168'' &
\end{array}$$

V. finalmente, dividimos a nova medida em segundos pelo número inteiro:

$$\begin{array}{rcccl}
 & 23^\circ & 26' & 48'' & \multicolumn{1}{|l}{3} \\ \cline{5-5}
 & 2^\circ & + & & 7^\circ 48' 56'' \\
(2\cdot 60') \rightarrow & & \underline{120'} & + & \\
 & & 146' & & \\
 & & 2' & & \\
(2\cdot 60'') \rightarrow & & & \underline{120''} & \\
 & & & \underline{168''} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Exercícios resolvidos

R.6 Efetuar 67°56′20″ : 5.

Resolução

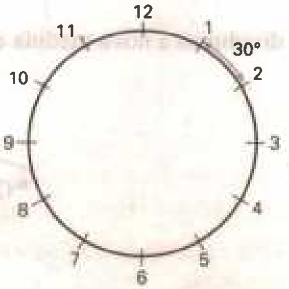
$$\begin{array}{rcccl}
 & 67^\circ & 56' & 20'' & \multicolumn{1}{|l}{5} \\ \cline{5-5}
 & 2^\circ & + & & 13^\circ 35' 16'' \\
(2\cdot 60') \rightarrow & & \underline{120'} & + & \\
 & & 176' & & \\
 & & 1' & & \\
(1\cdot 60'') \rightarrow & & & \underline{60''} & \\
 & & & \underline{80''} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

R.7 Determinar a medida do ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 10 h e 15 min.

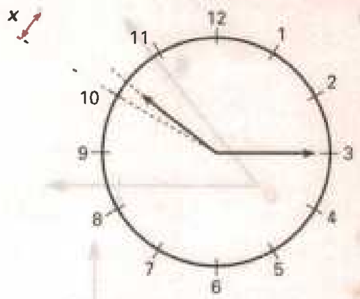
Resolução

Antes de resolvermos esse problema, vamos fazer algumas considerações.

- A volta completa do mostrador do relógio tem 360°, portanto os pontos correspondentes aos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 dividem a circunferência em doze arcos de 30°.



- Os deslocamentos dos ponteiros são proporcionais entre si e também são proporcionais ao tempo, ou seja, em 60 min o ponteiro dos minutos percorre 360° e o das horas percorre 30°.
  Às 10 h 15 min, o ponteiro maior está localizado exatamente no número 3 do mostrador e o menor está entre o 10 e o 11.

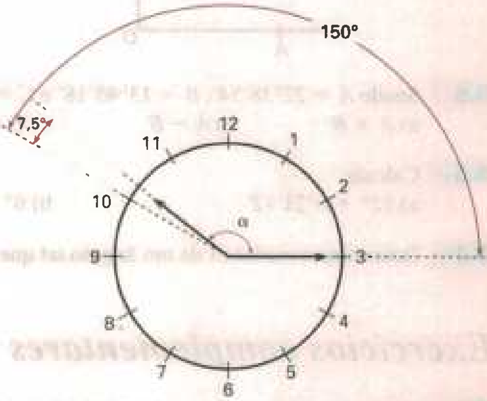


Para descobrirmos o deslocamento x do ponteiro das horas, desde as 10 h até as 10 h 15 min, basta resolvermos a seguinte regra de três:

Tempo (minutos)		Deslocamento do ponteiro das horas (graus)
60	———	30
15	———	x

Logo, $60x = 450$.

$$\therefore\ x = \frac{450}{60} \quad \therefore\ x = 7{,}5°.$$



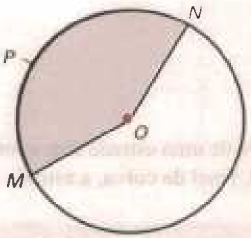
Portanto, a medida α procurada é: $\alpha = 150° - 7{,}5°\ \therefore\ \alpha = 142{,}5°$.
Lembrando que $1° = 60'$, podemos escrever $0{,}5° = 30'$.
Assim podemos apresentar a resposta também sob a forma: $\alpha = 142°30'$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, B.7, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Na figura, o comprimento do arco $\overset{\frown}{MPN}$ é igual a $\frac{5}{12}$ do comprimento da circunferência de centro O. Calcule a medida do ângulo $M\hat{O}N$.

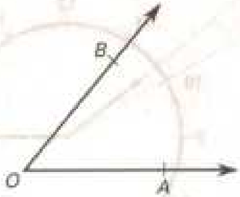


B.2 Um arco de circunferência tem comprimento 12 cm e mede 60°. Qual o comprimento da circunferência que contém esse arco?

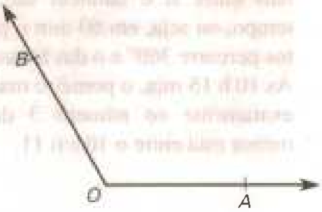
B.3 O comprimento de uma circunferência é 72 cm. Qual o comprimento de um arco de 45°, contido nessa circunferência?

B.4 Meça os ângulos com o auxílio do transferidor:

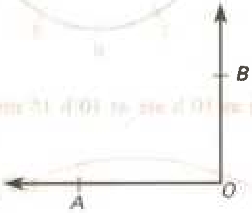
a)



c)



b)



B.5 Sendo $A = 22°38'54''$, $B = 13°45'18''$ e $C = 18°13'10''$, calcule:

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $C - B$ d) $3 \cdot A$ e) $C : 5$ f) $B : 6$

B.6 Calcule:

a) $12° + 6°21'12''$ b) $6° - 5°12'26''$ c) $56°36'24'' : 7$

B.7 Determine a medida x de um ângulo tal que $3x = 37°3'36''$.

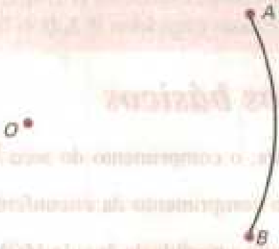
Exercícios complementares

C.1 Qual a medida, em graus, do ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 10 h 10 min?

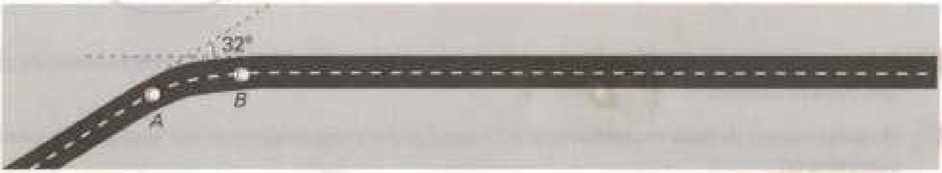
C.2 Qual a medida, em graus, do ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 2 h 15 min?

C.3 Qual o deslocamento, em graus, do ponteiro das horas, desde as 7 h até o próximo momento em que os ponteiros se sobrepõem?

C.4 A figura ao lado é um arco de circunferência de centro O. Com o auxílio de um transferidor, calcule a medida, em graus, desse arco.



C.5 Uma curva de uma estrada tem a forma de um arco de circunferência. Desde o ponto A, inicial da curva, até o ponto B, final da curva, a estrada muda sua direção em 32°. Qual a medida do arco $\widehat{AB}$ em graus?



Questões dos vestibulares

V1 (F.C.M. Santos-SP) Às 9 h 10 min, o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio é:

a) 150° b) 147°30′ c) 145° d) 160° e) n.d.a.

V2 (PUC-MG) Uma circunferência é dividida em sete arcos de medidas iguais. Dentre as alternativas, o valor que mais se aproxima da medida de cada um desses arcos é:

a) 51°43′ b) 52° c) 51°25′42″ d) 51°25′10″ e) 53°

V3 (Fatec-SP) Na figura tem-se o mostrador de um relógio de raio 1. Seus ponteiros marcam 4 h 40 min. A área da região hachurada na figura é:

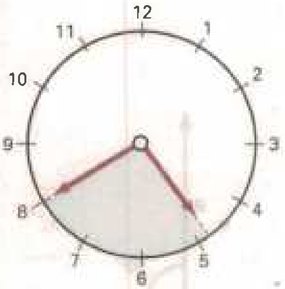
a) $\frac{7\pi}{36}$

b) $\frac{8\pi}{36}$

c) $\frac{9\pi}{36}$

d) $\frac{10\pi}{36}$

e) $\frac{11\pi}{36}$



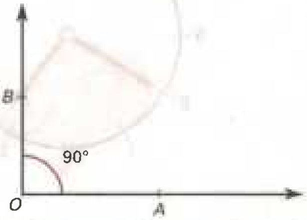
(**Lembrete:** a área de um círculo de raio r é dada pela fórmula $A = \pi r^2$.)

Capítulo 46

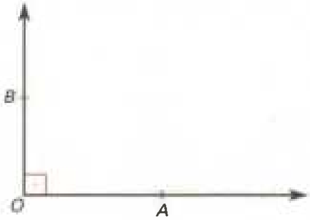
Generalidades sobre ângulos

1. Ângulo reto

É um ângulo de medida 90°.

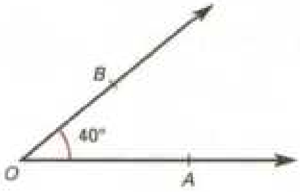


Indicaremos o ângulo reto pelo símbolo ⊥:



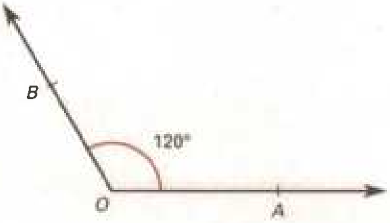
2. Ângulo agudo

É um ângulo de medida menor que 90°.
Exemplo



3. Ângulo obtuso

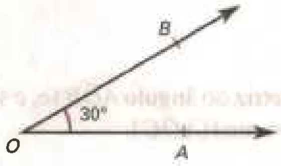
É um ângulo de medida maior que 90°.
Exemplo

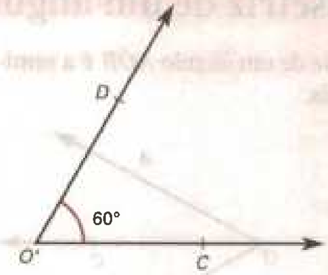


4. Ângulos complementares

São dois ângulos cuja soma das medidas é 90°.

Exemplo

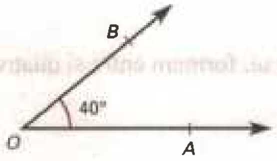


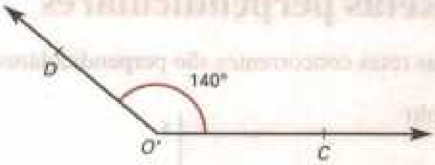


5. Ângulos suplementares

São dois ângulos cuja soma das medidas é 180°.

Exemplo

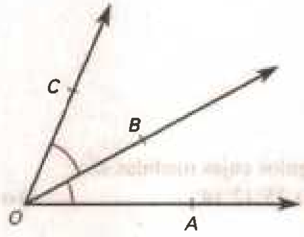




6. Ângulos adjacentes

São dois ângulos cuja intersecção é um de seus lados.

Exemplo

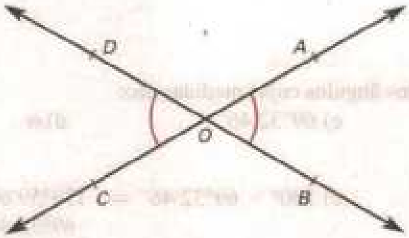


$A\hat{O}B \cap B\hat{O}C = \overrightarrow{OB}$

7. Ângulos opostos pelo vértice

São dois ângulos cujos lados de um são semi-retas opostas dos lados do outro.

Exemplo



$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice.

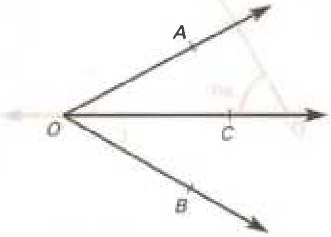
Propriedade

Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida: med $(A\hat{O}B)$ = med $(C\hat{O}D)$.

8. Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é a semi-reta de origem O que divide o ângulo em dois ângulos de medidas iguais.

Exemplo

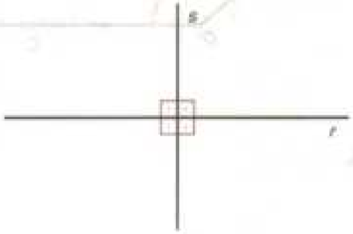


$\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ se, e somente se, $\text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}C)$.

9. Retas perpendiculares

Duas retas concorrentes são perpendiculares se, e somente se, formam entre si quatro ângulos retos.

Exemplo



Indicaremos que r é perpendicular a s por $r \perp s$.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar a medida do complemento de cada um dos ângulos cujas medidas são:

a) 32° b) 18°32′ c) 25°12′14″ d) α

Resolução

a) $90° - 32° = 58°$.

b) $90° - 18°32' \Rightarrow \begin{array}{r} 89°60' \; - \\ 18°32' \\ \hline 71°28'. \end{array}$

c) $90° - 25°12'14'' \Rightarrow \begin{array}{r} 89°59'60'' \; - \\ 25°12'14'' \\ \hline 64°47'46''. \end{array}$

d) $90° - \alpha$.

R.2 Determinar a medida do suplemento de cada um dos ângulos cujas medidas são:

a) 46° b) 18°26′ c) 69°32′46″ d) α

Resolução

a) $180° - 46° = 134°$.

b) $180° - 18°26' \Rightarrow \begin{array}{r} 179°60' \; - \\ 18°26' \\ \hline 161°34'. \end{array}$

c) $180° - 69°32'46'' \Rightarrow \begin{array}{r} 179°59'60'' \; - \\ 69°32'46'' \\ \hline 110°27'14''. \end{array}$

d) $180° - \alpha$.

R.3 A terça parte da medida do complemento de um ângulo é igual a 20°. Qual a medida do ângulo?

Resolução

Sendo α a medida do ângulo e $90° - \alpha$ a medida do complemento do ângulo, temos: $\frac{90 - \alpha}{3} = 20° \Rightarrow 90° - \alpha = 60° \therefore \alpha = 30°$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4.
Tarefa de casa: exercícios C.1, C.2, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Determine a medida do complemento de cada um dos ângulos cujas medidas são:

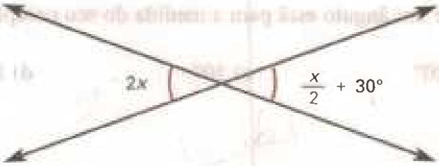
a) 17° b) 26°45′ c) 12°28′43″

B.2 Determine a medida do suplemento de cada um dos ângulos cujas medidas são:

a) 28° b) 67°13′ c) 126°46′12″

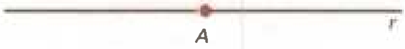
B.3 O complemento da terça parte de um ângulo mede 70°. Qual a medida desse ângulo?

B.4 Determine o valor de x na figura:

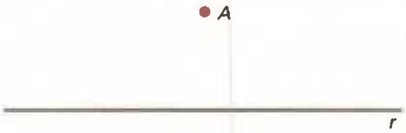


Exercícios complementares

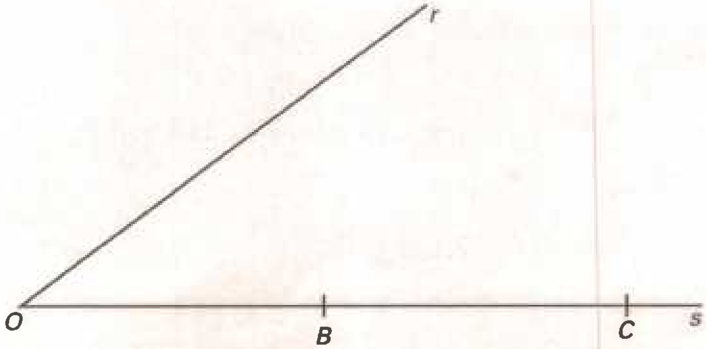
[redacted] Construa, com o auxílio de régua e transferidor, a reta perpendicular à reta r pelo ponto A:



[redacted] Construa, usando régua e transferidor, a reta perpendicular a r pelo ponto A:



[redacted] Na figura a seguir, trace perpendiculares à reta s pelos pontos B e C. Tais perpendiculares encontrarão a reta r nos pontos B' e C', respectivamente:



a) Meça os lados dos triângulos OBB' e OCC'.

b) Calcule as razões:

I. $\frac{BB'}{OB'}, \frac{CC'}{OC'}$; II. $\frac{OB}{OB'}, \frac{OC}{OC'}$;

III. $\frac{BB'}{OB}, \frac{CC'}{OC}$.

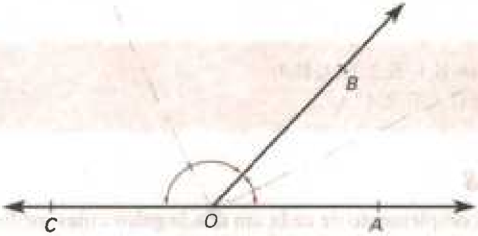
c) Que conclusões você pode tirar?

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) Um ângulo mede a metade do seu complemento; então esse ângulo mede:

a) 30° b) 60° c) 45° d) 90° e) Nenhuma das anteriores.

V.2 (Mackenzie-SP) A figura abaixo mostra dois ângulos adjacentes suplementares.



Podemos afirmar que:

a) as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são perpendiculares.

b) a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é metade da medida do ângulo $B\hat{O}C$.

c) o ângulo $B\hat{O}C$ mede o triplo de $A\hat{O}B$.

d) o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ tem medida menor que 90°.

e) n.d.a.

V.3 (Cescem-SP) A medida de um ângulo está para a medida do seu complemento assim como 1 está para 5. Esse ângulo mede:

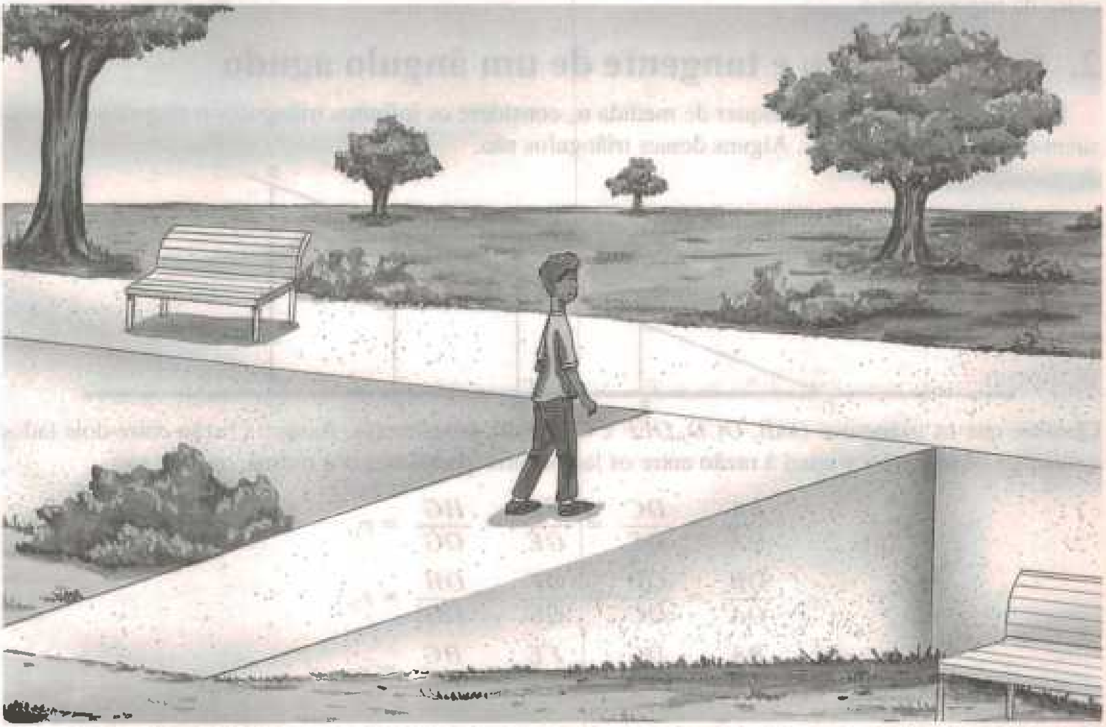
a) 75° b) 20° c) 10° d) 15° e) 25°

Capítulo 47

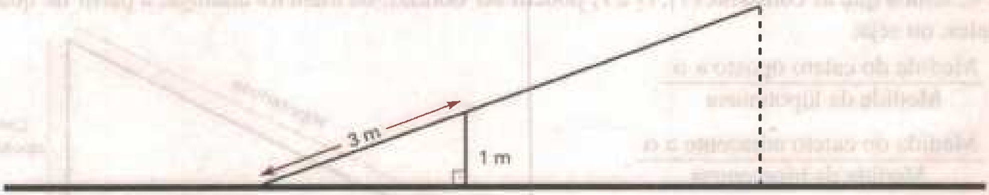
Trigonometria no triângulo retângulo

1. Introdução

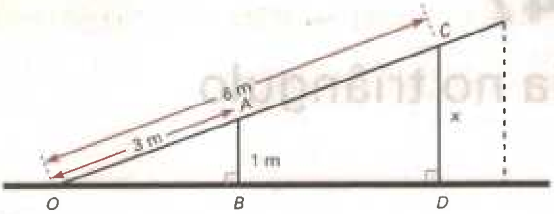
Na praça de minha cidade, uma rampa plana une dois pisos em desnível, conforme a figura:



Subindo essa rampa, se eu percorrer a distância de 3 m, meu deslocamento na vertical será de 1 m:



Qual será o meu deslocamento na vertical se eu percorrer 6 m da rampa?



Como os triângulos OAB e OCD são semelhantes, temos: $\frac{1}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 2.$

Logo, percorrendo 6 m da rampa, meu deslocamento na vertical será de 2 m.

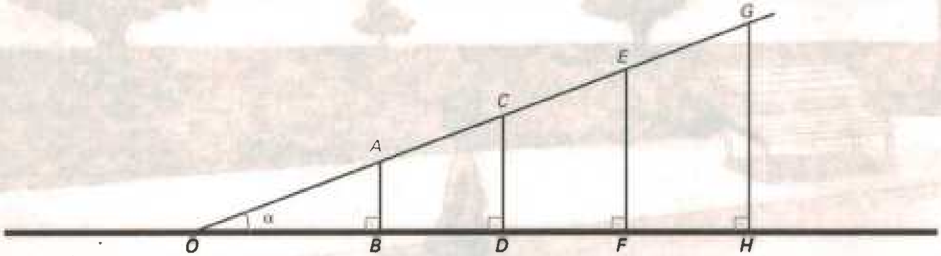
A razão entre o deslocamento na vertical e a distância percorrida sobre a rampa depende exclusivamente do ângulo que a rampa forma com o plano horizontal.

Podemos também relacionar o deslocamento na horizontal com a distância percorrida sobre a rampa ou ainda relacionar os deslocamentos na vertical e na horizontal. Essas relações também dependem somente do ângulo que a rampa forma com o plano horizontal.

Definiremos a seguir algumas razões entre lados de um triângulo retângulo. Essas razões são o alicerce da trigonometria.

2. Seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo

Dado um ângulo agudo qualquer de medida α, considere os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α. Alguns desses triângulos são:



Observe que os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são semelhantes. Assim, a razão entre dois lados quaisquer de um deles é igual à razão entre os lados correspondentes dos outros, ou seja:

razões entre
seus elementos
lineares é K.

$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = r_1,$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = r_2,$$

$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = r_3.$$

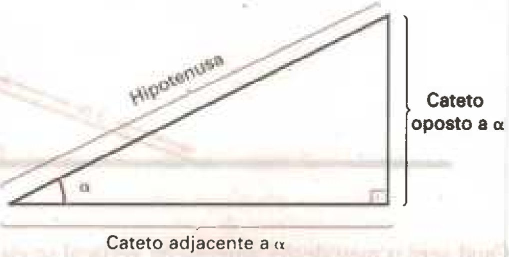
Note que as constantes r_1, r_2 e r_3 dependem exclusivamente da medida α, e não das dimensões do triângulo escolhido para obtê-las.

Como os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo agudo de medida α são semelhantes entre si, temos que as constantes r_1, r_2 e r_3 podem ser obtidas, de maneira análoga, a partir de qualquer um deles, ou seja:

$$r_1 = \frac{\text{Medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{Medida da hipotenusa}},$$

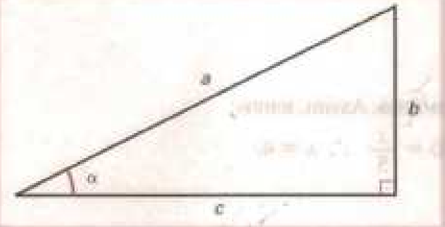
$$r_2 = \frac{\text{Medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{Medida da hipotenusa}},$$

$$r_3 = \frac{\text{Medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{Medida do cateto adjacente a } \alpha}.$$



As razões (trigonométricas) r_1, r_2 e r_3 são chamadas respectivamente de: seno do ângulo α (sen α), co-seno do ângulo α (cos α) e tangente do ângulo α (tg α).

Em resumo temos:



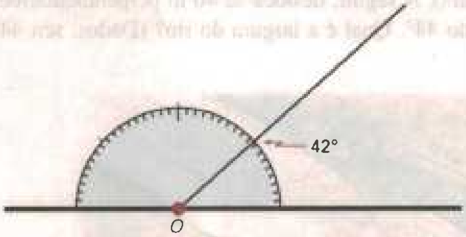
- $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$,
- $\cos \alpha = \dfrac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$,
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \dfrac{b}{c}$.

Exercícios resolvidos

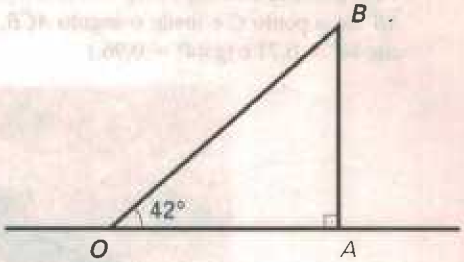
R.1 Com o auxílio de régua graduada e transferidor, calcular sen 42°, cos 42° e tg 42°.

Resolução

Construímos um ângulo de 42°:



Traçamos uma perpendicular a um dos lados desse ângulo:



Medimos, com auxílio da régua, os lados do triângulo ABO. Temos:

$$AB = 2{,}7\ \text{cm};\ AO = 3{,}0\ \text{cm};\ BO = 4{,}1\ \text{cm}.$$

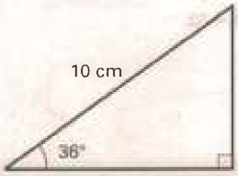
Assim, calculamos:

$$\text{sen}\ 42° = \frac{2{,}7}{4{,}1} \simeq 0{,}6;\ \cos 42° = \frac{3{,}0}{4{,}1} \simeq 0{,}7;\ \text{tg}\ 42° = \frac{2{,}7}{3{,}0} = 0{,}9.$$

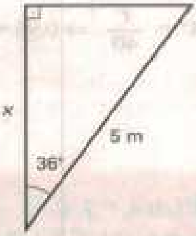
Nota: Quando medimos um segmento de reta com uma régua graduada, cometemos, inevitavelmente, erros de aproximação. Portanto os resultados obtidos para sen 42°, cos 42° e tg 42° são valores aproximados. Existem métodos, mais eficientes, que calculam esses valores com qualquer precisão desejada.

R.2 Sabendo que sen 36° = 0,58, cos 36° = 0,80 e tg 36° = 0,72, calcular o valor de x em cada figura.

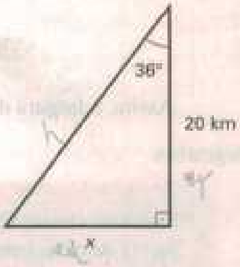
a)



b)



c)



Resolução

a) A razão trigonométrica que deve ser aplicada é aquela que relaciona os elementos:

- ângulo agudo (36°),
- cateto oposto (x),
- hipotenusa (10).

Tal razão é o **seno**. Assim, temos: sen 36° = $\frac{x}{10}$ ⇒ 0,58 = $\frac{x}{10}$ $\therefore$ $x = 5{,}8$.

Logo, $x = 5{,}8$ cm.

b) As medidas relacionadas no triângulo retângulo são:

- ângulo agudo (36°),
- cateto adjacente (x),
- hipotenusa (5).

Dessa forma, a razão trigonométrica adequada é o **co-seno**. Assim, temos:

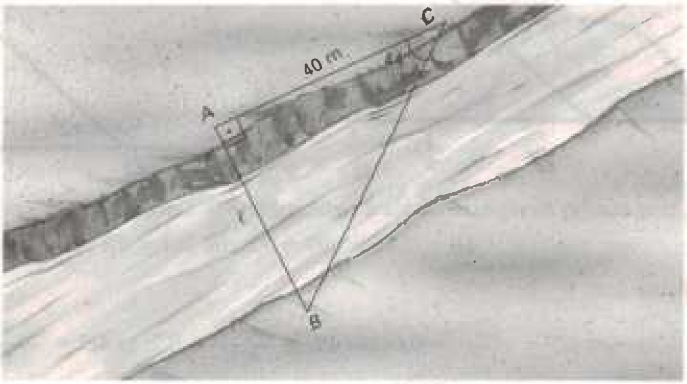
$$\cos 36° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}80 = \frac{x}{5} \quad \therefore \; x = 4.$$

Logo, $x = 4$ m.

c) A razão trigonométrica que relaciona o ângulo agudo (36°), o cateto oposto (x) e o cateto adjacente (20) é a **tangente**. Então, calculamos: tg 36° = $\frac{x}{20}$ ⇒ 0,72 = $\frac{x}{20}$ $\therefore$ $x = 14{,}40$.

Logo, $x = 14{,}40$ km.

R.3 Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que se encontra e um ponto B na margem oposta (conforme figura). A seguir, desloca-se 40 m perpendicularmente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44°. Qual é a largura do rio? (Dados: sen 44° = 0,69, cos 44° = 0,71 e tg 44° = 0,96.)



Resolução

No triângulo retângulo ABC, estão relacionados o ângulo agudo (44°), o cateto oposto (ℓ) e o cateto adjacente (40 m).

A razão trigonométrica que relaciona tais medidas é a tangente. Logo, temos:

$$\text{tg } 44° = \frac{\ell}{40} \Rightarrow 0{,}96 = \frac{\ell}{40} \quad \therefore \; \ell = 38{,}4 \text{ m}.$$

Assim, a largura do rio é 38,4 m.

Sugestões

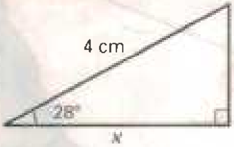
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.6, C.1, C.4, C.5.

Exercícios básicos

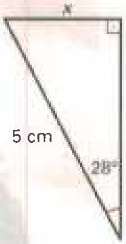
B.1 Com o auxílio de régua graduada e transferidor, calcule sen 35°, cos 35° e tg 35°.

B.2 Sabendo que sen 28° = 0,46, cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53, calcule o valor de x em cada figura:

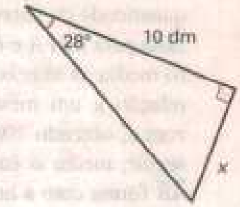
a)



b)

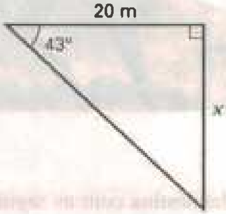


c)

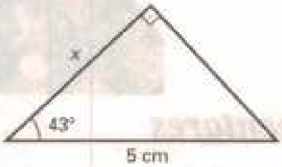


B.3 Sabendo que sen 43° = 0,68, cos 43° = 0,73 e tg 43° = 0,93, calcule o valor de x em cada figura:

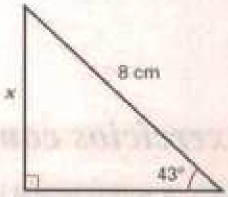
a)



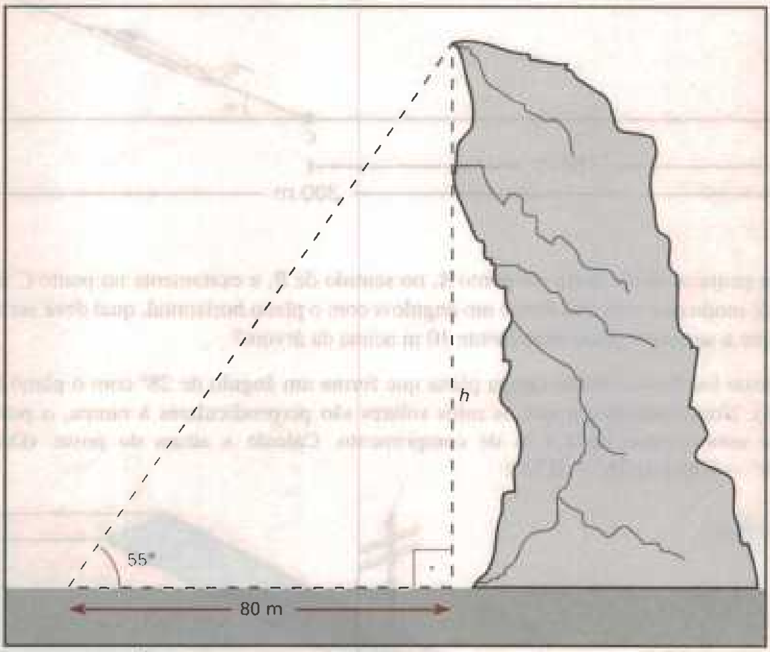
b)



c)

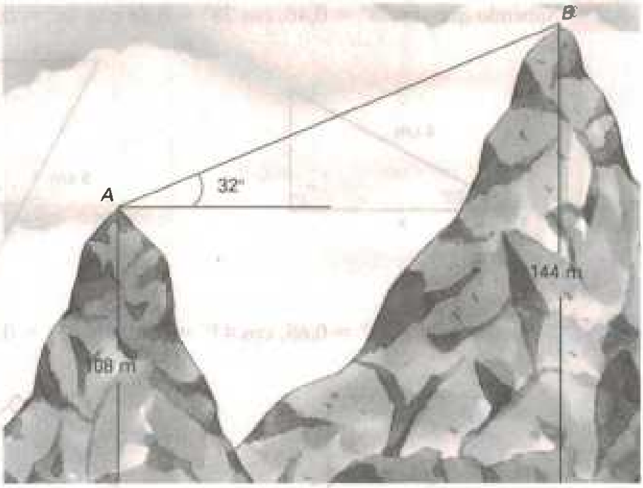


B.4 Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m do pé da encosta (conforme figura) e visualiza o topo sob um ângulo de 55° com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: sen 55° = 0,81, cos 55° = 0,57 e tg 55° = 1,42.)



B.5 Uma escada deve ser construída para unir dois pisos de um prédio. A altura do piso mais elevado em relação ao piso inferior é de 8 m. Para isso, foi construída uma rampa plana unindo os dois pisos. Sabendo que o ângulo formado pela rampa com um plano horizontal é 33°, calcule o comprimento da rampa. (Dados: sen 33° = 0,54, cos 33° = 0,83 e tg 33° = 0,64.)

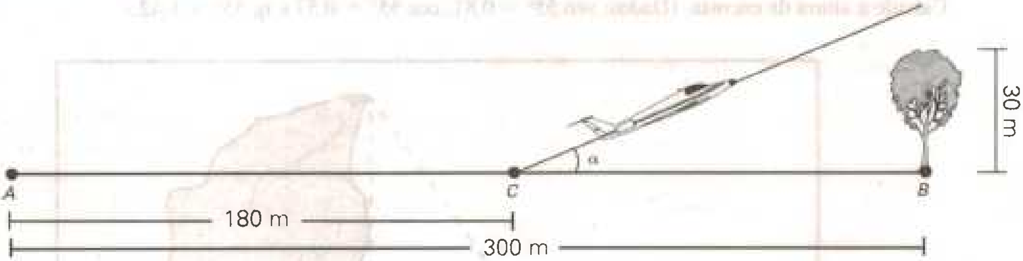
B.6 Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária para unir A e B, um engenheiro mediu as alturas dos morros em relação a um mesmo plano horizontal, obtendo 108 m e 144 m. A seguir, mediu o ângulo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com a horizontal, obtendo 32°. Calcule a distância entre A e B. (Dados: sen 32° = 0,52, cos 32° = 0,84 e tg 32° = 0,62.)



Exercícios complementares

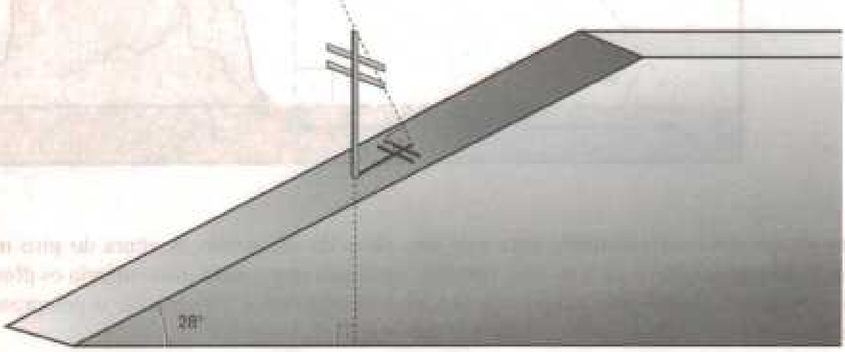
C.1 A polícia federal localizou na floresta amazônica uma pista de pouso clandestina com as seguintes características:

- a pista media 300 m de comprimento, era plana e horizontal;
- no final da pista havia uma árvore de 30 m de altura, conforme figura.

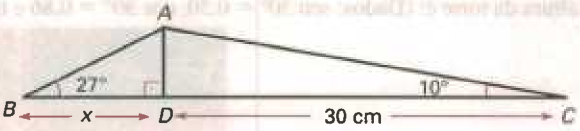


Se um pequeno avião partir do ponto A, no sentido de B, e exatamente no ponto C levantar vôo em linha reta, de modo que essa reta forme um ângulo α com o plano horizontal, qual deve ser a tangente de α (tg α) para que a aeronave passe exatamente 10 m acima da árvore?

C.2 Um poste localiza-se numa rampa plana que forma um ângulo de 28° com o plano horizontal (conforme figura). Num instante em que os raios solares são perpendiculares à rampa, o poste projeta sobre essa rampa uma sombra de 2,3 m de comprimento. Calcule a altura do poste. (Dados: sen 28° = 0,46, cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53.)

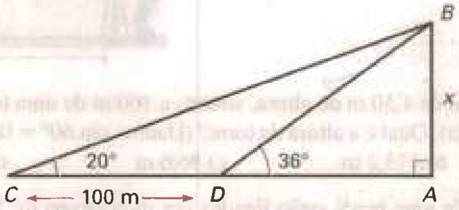


C.3 Determine a medida x do segmento $\overline{BD}$ na figura a seguir. (Dados: sen 27° = 0,45, cos 27° = 0,89 e tg 27° = 0,50; sen 10° = 0,17, cos 10° = 0,98 e tg 10° = 0,17.)



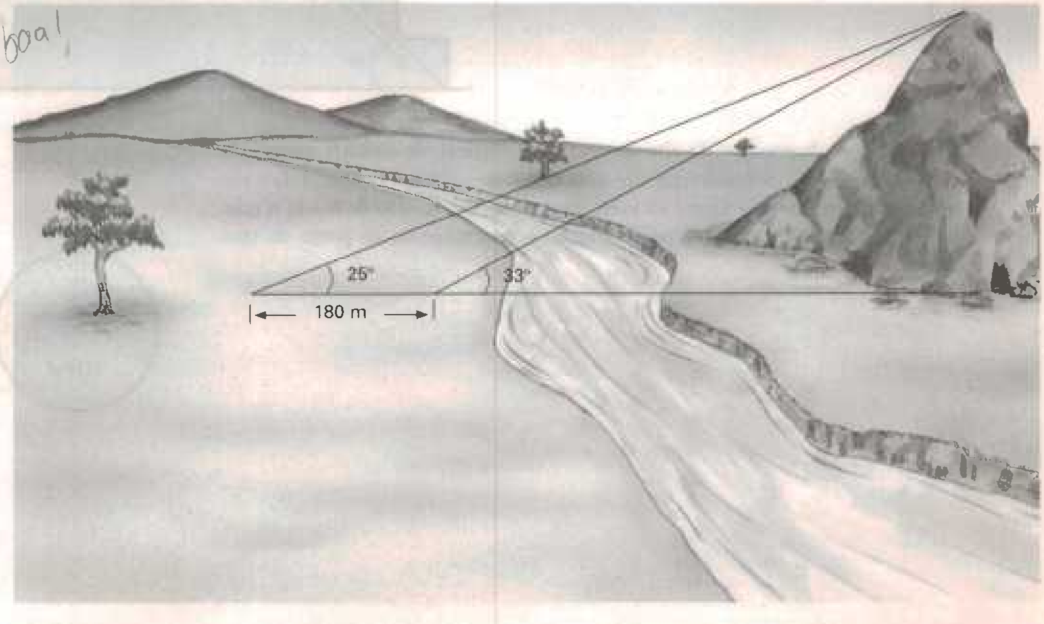
(**Sugestão:** introduza uma incógnita auxiliar, fazendo $AD = y$.)

C.4 Qual é a medida x do segmento $\overline{AB}$ na figura a seguir? (Dados: sen 20° = 0,34, cos 20° = 0,93 e tg 20° = = 0,36; sen 36° = 0,58, cos 36° = 0,80 e tg 36° = 0,72.)



(**Sugestão:** introduza uma incógnita auxiliar, fazendo $AD = y$.)

C.5 Um rio separa um topógrafo de um morro. Para medir a altura desse morro, o topógrafo instala um teodolito num ponto e vê o topo do morro sob um ângulo de 33° com o plano horizontal. A seguir, afasta-se 180 m e vê o topo do morro sob um ângulo de 25° com o plano horizontal, conforme figura. Calcule a altura do morro. (Dados: sen 25° = 0,42, cos 25° = 0,90 e tg 25° = 0,46; sen 33° = 0,54, cos 33° = 0,83 e tg 33° = 0,64.)

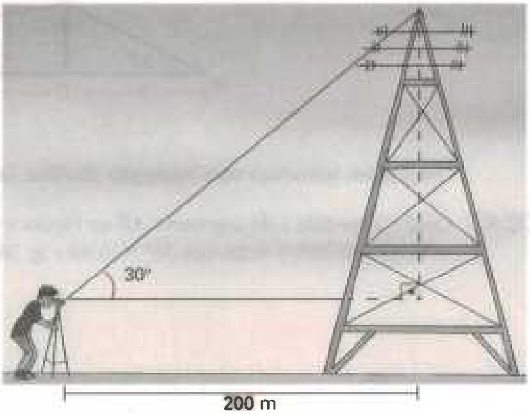


boa!

Questões dos vestibulares

V.1 (Esan-SP) Para obter a altura de uma torre, um topógrafo instala o teodolito a 200 m do centro da base da mesma; o ângulo indicado na figura mede 30°. Se a luneta do teodolito está a 1,7 m do solo, então o valor aproximado da altura da torre é: (Dados: sen 30° = 0,50, cos 30° = 0,86 e tg 30° = 0,57.)

a) 116 m
b) 120 m
c) 120,7 m
d) 112 m
e) 110,7 m

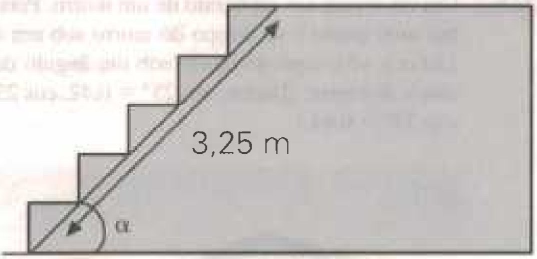


V.2 (Selessul) Uma pessoa de 1,50 m de altura, situada a 100 m de uma torre, avista o seu topo sob um ângulo de 60° com a horizontal. Qual é a altura da torre? (Dados: sen 60° = 0,86, cos 60° = 0,50 e tg 60° = 1,73.)

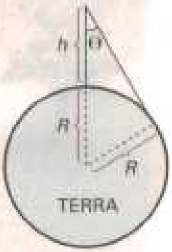
a) 174,5 m b) 173,2 m c) 86,6 m d) 50,0 m e) 17,45 m

V.3 (UFRS) Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 3,25 m de comprimento e α graus de inclinação, conforme a figura. Devem-se construir sobre a rampa cinco degraus de mesma altura. Se $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$, então a altura, em metros, de cada degrau será:

a) 0,15 m
b) 0,25 m
c) 0,30 m
d) 0,35 m
e) 0,65 m



V.4 (FEI-SP) Um observador, do alto de uma torre vertical, de altura h, enxerga a linha do horizonte. Sabendo que um raio visual forma com a vertical da torre um ângulo θ, conforme figura ao lado, determine, em função de h e θ, o raio da Terra. (**Sugestão:** o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.)



Capítulo 48

Dois teoremas importantes

1. Relação entre o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo

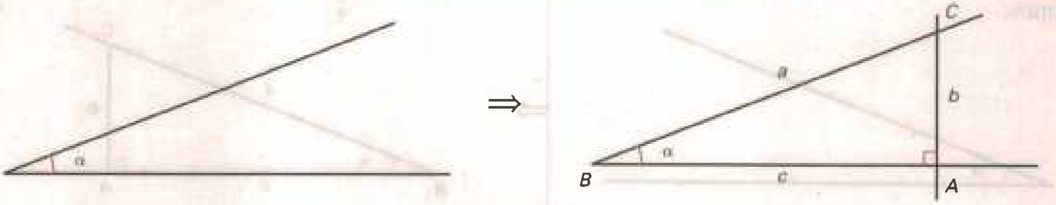
Teorema

Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}.$$

Demonstração

Construindo um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo (conforme figura), temos:



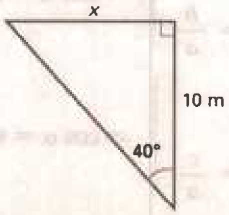
Calculando sen α e cos α, e efetuando o quociente $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}$, concluímos que:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} = \frac{\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha.$$

(c.q.d.)

Exercício resolvido

R.1 Dados sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,76, determinar o valor de x na figura:



Resolução

$$\text{tg } 40° = \frac{x}{10}.$$

Como temos os valores sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,76, podemos determinar o valor da tg 40°, ou seja:

$$\text{tg } 40° = \frac{\text{sen } 40°}{\cos 40°} = \frac{0,64}{0,76} \simeq 0{,}84.$$

Assim, $0{,}84 = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 8{,}4$.

Logo, $x = 8{,}4$ m.

2. Ângulos complementares

Lembre-se de que dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90°$.

Nota

Se α e β são medidas de ângulos complementares, dizemos que α e β são medidas complementares.

Exemplos

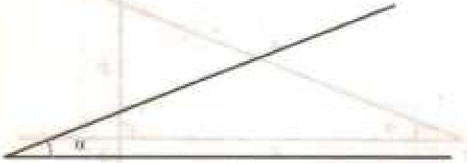
a) 20° é complemento de 70°. b) 32° é complemento de 58°. c) $90° - \alpha$ é o complemento de α.

Teorema

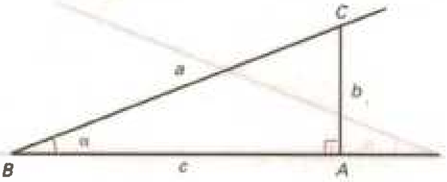
Se α é a medida de um ângulo agudo, então $\text{sen } \alpha = \cos(90° - \alpha)$ e $\cos \alpha = \text{sen }(90° - \alpha)$.

Demonstração

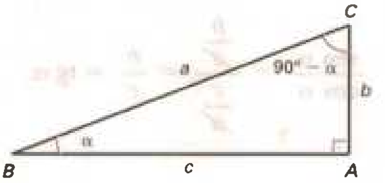
Construindo um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo, temos:



$\Rightarrow$



Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar de $\hat{B}$, pois $\alpha + \text{med}(\hat{C}) = 90° \Rightarrow \text{med}(\hat{C}) = 90° - \alpha$.



Assim, temos que:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{b}{a} \\ \cos(90° - \alpha) &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{c}{a} \\ \text{sen }(90° - \alpha) &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos \alpha = \text{sen }(90° - \alpha)$$

(c.q.d.)

Provamos, assim, que:

> Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Exemplos

a) 20° é o complemento de 70°; logo, sen 20° = cos 70° e cos 20° = sen 70°.
b) 32° é o complemento de 58°; logo, sen 32° = cos 58° e cos 32° = sen 58°.

Exercícios resolvidos

R.2 Sabendo que cos 23° = 0,92, calcular o valor da expressão: $E = \dfrac{\text{sen } 23° + \cos 67°}{4 \text{ tg } 23°}$.

Resolução
Como 23° é o complemento de 67°, temos que cos 67° = sen 23°. Assim, temos:

$$E = \frac{\text{sen } 23° + \text{sen } 23°}{4\,\dfrac{\text{sen } 23°}{\cos 23°}} \;\therefore\; E = 2\,\cancel{\text{sen } 23°} \cdot \frac{\cos 23°}{4\,\cancel{\text{sen } 23°}} \;\therefore\; E = \frac{\cos 23°}{2} = \frac{0,92}{2}.$$

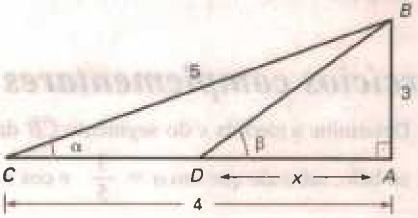
Logo, $E = 0{,}46$.

R.3 Na figura ao lado, α + β = 90°. Determinar o valor de x.

Resolução
Como α e β são complementares, temos que:

$$\text{sen } \beta = \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \cos \beta = \text{sen } \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Logo, tg } \beta = \frac{\dfrac{4}{\cancel{5}}}{\dfrac{3}{\cancel{5}}} = \frac{4}{3}.$$



No triângulo ADB temos que:

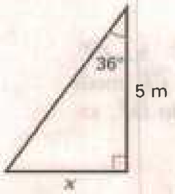
$$\text{tg } \beta = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{3}{x} \;\therefore\; x = \frac{9}{4}.$$

Sugestões

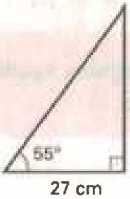
> Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.3.
> Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Dados sen 36° = 0,58 e cos 36° = 0,80, determine o valor de x na figura.



B.2 Sabendo que sen 55° = 0,81 e cos 55° = 0,57, determine o valor de x na figura.



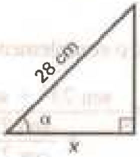
B.3 Sabendo que sen 37° = 0,6, calcule o valor da expressão: $E = 2 \text{ tg } 37° \text{ sen } 53°$.

B.4 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que sen $\alpha = \frac{3}{5}$, calcule o valor da expressão:

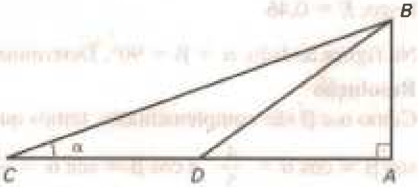
$$E = \frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (90° - \alpha)}{\cos \alpha \cos (90° - \alpha)} + \cos (90° - \alpha).$$

B.5 Na figura ao lado tem-se que sen $(90° - \alpha) = \frac{4}{7}$.

Determine o valor de x.

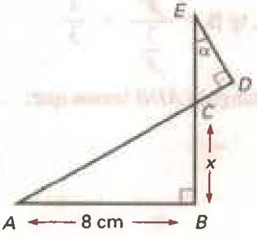


B.6 Na figura ao lado, tem-se
$CD = BD = 5$ cm e $DA = 3$ cm.
Calcule:
a) cos 2α
b) tg $(90° - \alpha)$

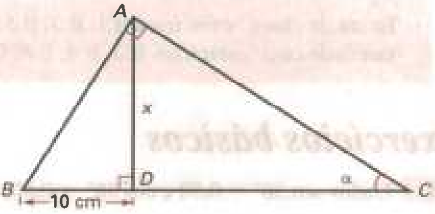


Exercícios complementares

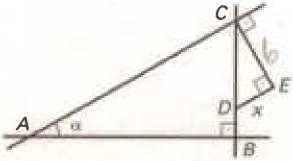
C.1 Determine a medida x do segmento $\overline{CB}$ da figura ao lado, sabendo que sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e cos $\alpha = \frac{4}{5}$.



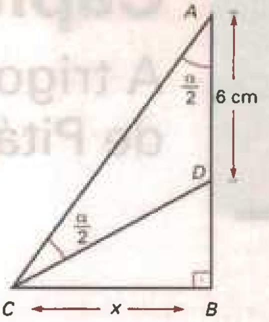
C.2 Calcule a medida x do segmento $\overline{AD}$ da figura ao lado, sabendo que sen $\alpha = \frac{5}{13}$ e cos $\alpha = \frac{12}{13}$.



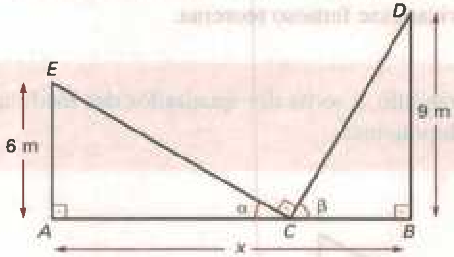
C.3 Na figura ao lado tem-se que $\overline{AC} \perp \overline{CE}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{CE}$ e o segmento $\overline{CE}$ mede 6 cm. Obtenha a medida x do segmento $\overline{DE}$, sabendo que cos α = 3 sen α.



C.4 Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\text{sen}\,\alpha + 2\cos(90° - \alpha) = 1$, determine a medida x do segmento $\overline{CB}$ da figura ao lado.

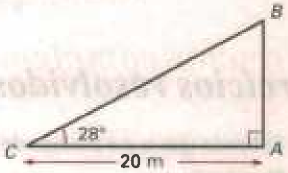


C.5 Os ângulos $E\hat{C}A$ e $D\hat{C}B$ da figura abaixo têm medidas respectivamente iguais a α e β. Obtenha a medida x do segmento $\overline{AB}$, sabendo que $\text{sen}\,\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.



Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-PR) Dados sen 28° = 0,46 e cos 28° = 0,88, a melhor aproximação da medida do segmento $\overline{AB}$ da figura ao lado é:

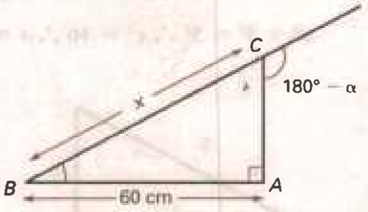


a) 10,4 m
b) 8,6 m
c) 11,2 m
d) 11,8 m
e) 12 m

V.2 (UFCE) Sendo α e β as medidas de dois ângulos agudos, assinale a afirmação verdadeira:

a) Se $\alpha > \beta$, então $\text{sen}\,\alpha < \text{sen}\,\beta$.
b) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$
c) $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$
d) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(90° - \alpha)$
e) Se $\alpha = \beta$, então $\text{tg}\,\alpha = 1$.

V.3 (FEI-SP) Dado que $\cos(90° - \alpha) = \frac{12}{13}$, determine o valor de x na figura abaixo.



Capítulo 49

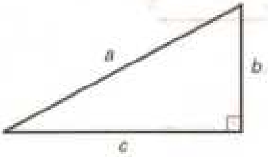
A trigonometria e o teorema de Pitágoras

1. Aplicações

O teorema de Pitágoras é fundamental para entendermos certas relações entre as razões trigonométricas. Por isso vamos revisar esse famoso teorema.

> Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Isto é:



$b^2 + c^2 = a^2.$

Exercícios resolvidos

R.1 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$, calcular cos α.

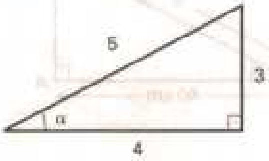
Resolução

Se α é um ângulo agudo e $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a α mede 3 e a hipotenusa mede 5, conforme figura ao lado.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto adjacente a α:

$$x^2 + 3^2 = 5^2 \therefore x^2 = 16 \therefore x = 4.$$

Temos, então:

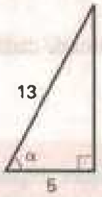


Assim, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

R.2 Sabendo que α é um ângulo agudo e que $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, calcular $\text{tg}\,\alpha$.

Resolução

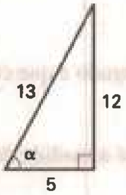
Existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo α tal que o cateto adjacente a α mede 5 e a hipotenusa mede 13 conforme figura ao lado.



Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto oposto a α:

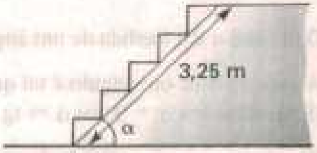
$$x^2 + 5^2 = 13^2 \therefore x^2 = 144 \therefore x = 12.$$

Temos, então:



Assim, $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$.

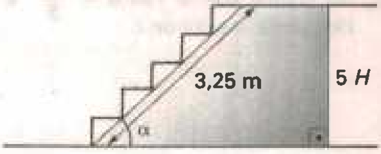
R.3 Dois pisos de um salão estão ligados por uma rampa plana de 3,25 m de comprimento e α graus de inclinação (conforme figura). Serão construídos sobre a rampa cinco degraus de mesma altura. Sendo $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, calcular a altura, em metros, de cada degrau.



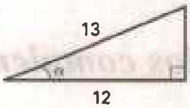
Resolução

Sendo H a altura de cada degrau, temos que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5H}{3{,}25}. \quad \text{(I)}$$



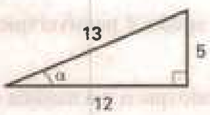
Como $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, temos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto adjacente a α mede 12 e a hipotenusa mede 13, conforme figura ao lado.



Sendo x a medida do cateto oposto a α, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 25 \therefore x = 5.$$

Obtemos então o triângulo:



Assim, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}. \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{5}{13} = \frac{5H}{3{,}25} \Rightarrow H = 0{,}25.$$

Logo, a altura de cada degrau é 0,25 m.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.6, C.1, C.3, C.6, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.7, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, calcule $\operatorname{sen} \alpha$.

B.2 Determine o valor de $\operatorname{tg} \alpha$, sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$.

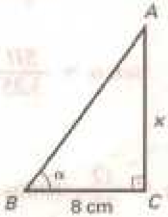
B.3 A medida de um ângulo agudo é α. Obtenha os valores de $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ de modo que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

B.4 Dado que α é a medida de um ângulo agudo e que $\operatorname{tg} \alpha = 2$, calcule $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$.

B.5 A medida α de um ângulo é tal que $0° < \alpha < 90°$ e $\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha$. Calcule os valores de $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$. (**Sugestão:** $\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3$.)

B.6 Prove que, se α é a medida de um ângulo agudo, então $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. (**Nota:** os símbolos $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha$ devem ser entendidos como $(\operatorname{sen} \alpha)^2$ e $(\cos \alpha)^2$, respectivamente.)

B.7 Na figura, tem-se $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $BC = 8$ cm. Determine o valor de x.



Exercícios complementares

C.1 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{m+2}}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{\sqrt{m}}{2}$, determine m.

C.2 Determine m de modo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{m+2}{10}$ e $\cos \alpha = \frac{m}{5}$, sendo α a medida de um ângulo agudo.

C.3 Sendo α a medida de um ângulo agudo, é possível que as igualdades $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ocorram simultaneamente? Por quê?

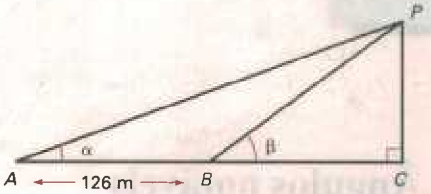
C.4 Determine o valor do $\operatorname{sen} \alpha$ sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha$.

C.5 Calcule o valor da expressão:

$$E = \operatorname{sen}^2 10° + \operatorname{sen}^2 20° + \operatorname{sen}^2 70° + \operatorname{sen}^2 80°.$$

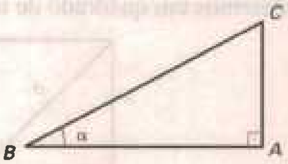
C.6 Para medir a largura de um rio, de margens paralelas, um topógrafo marcou dois pontos A e B, numa margem, distantes 52 m um do outro. Na outra margem, o topógrafo tomou um ponto C tal que os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B$ têm medidas iguais e o ângulo agudo $A\hat{B}C$ tem medida α, com $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Qual é a largura do rio?

C.7 Uma torre está localizada em um terreno plano e horizontal. Sobre esse terreno tomam-se dois pontos A e B, distantes 126 m um do outro, alinhados com a base da torre. Do ponto A, vê-se o ponto P, mais alto da torre, sob um ângulo de medida α com plano horizontal. Do ponto B vê-se P sob um ângulo de medida β com o plano horizontal. Calcule a altura da torre, sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13}$.

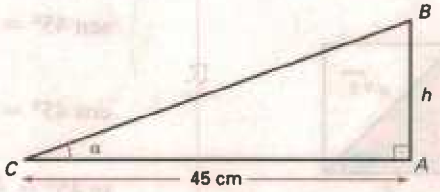


Questões dos vestibulares

V.1 (Cescea-SP) Calcule a soma das medidas dos catetos do triângulo retângulo ao lado, sabendo que $BC = 10$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

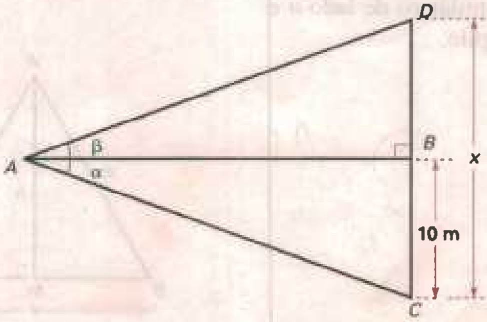


V.2 (Cescea-SP) Na figura, determine h, sabendo que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$.



a) $h = 18$ cm
b) $h = 24$ cm
c) $h = 12$ cm
d) $h = 19$ cm
e) $h = 22$ cm

V.3 (E.E. Mauá-SP) Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5}$ e $BC = 10$ m, determine a medida do segmento $\overline{DC}$ na figura abaixo.



Capítulo 50

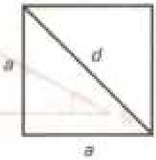
Cálculos de alguns senos, co-senos e tangentes

1. Ângulos notáveis

Para estudar os conceitos que vêm nos próximos itens, convém conhecermos o seno, o co-seno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°.

1.1. Ângulo de 45°

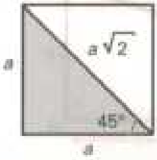
Consideremos um quadrado de lado a.



Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + a^2 \therefore d^2 = 2a^2 \therefore d = a\sqrt{2}\,.$$

Assim, temos:



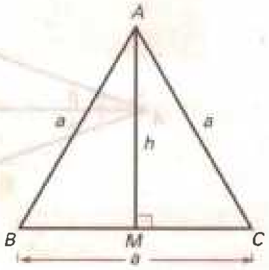
$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

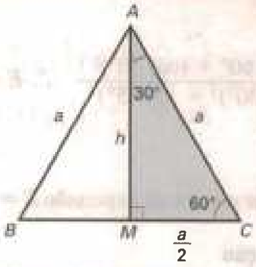
$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1.$$

1.2. Ângulos de 30° e 60°

Seja ABC um triângulo equilátero de lado a e seja h uma altura desse triângulo.



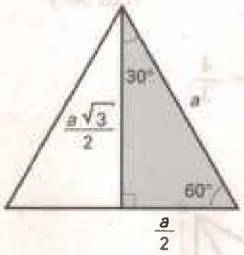
Os triângulos ABM e ACM são congruentes, pois ambos são retângulos, têm um cateto comum (h) e as hipotenusas congruentes (a). Daí, concluímos que $BM = CM = \frac{a}{2}$ e $\text{med}(B\hat{A}M) = \text{med}(C\hat{A}M)$. Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos $\text{med}(B\hat{A}M) = \text{med}(C\hat{A}M) = 30°$.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \therefore h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \therefore h^2 = \frac{3a^2}{4} \therefore h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como 60° é o complemento de 30°, temos:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2};\ \text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}.$$

1.3. Tabela dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular o valor da expressão $E = \dfrac{\cos 60° + \cos^2 30°}{\text{sen}^3\, 30° + \text{tg}^5\, 45°}$.

Resolução

Por convenção temos que: dado um ângulo de medida α, tem-se:

$$\text{sen}^n \alpha = (\text{sen } \alpha)^n, \cos^n \alpha = (\cos \alpha)^n, \text{tg}^n \alpha = (\text{tg } \alpha)^n.$$

Assim, calculamos:

$$E = \frac{\cos 60° + (\cos 30°)^2}{(\text{sen } 30°)^3 + (\text{tg } 45°)^5} \quad \therefore E = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (1)^5} \quad \therefore E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} + 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{8}} \quad \therefore E = \frac{10}{9}.$$

R.2 Calcular o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } 2x + \cos 4x}{\cos^2 2x}$, para $x = 15°$.

Resolução

Convencionemos que, dado um ângulo de medida α, tem-se:

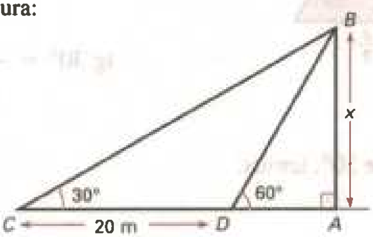
$$\text{sen } k\alpha = \text{sen } (k\alpha), \cos k\alpha = \cos (k\alpha), \text{tg } k\alpha = \text{tg } (k\alpha).$$

Assim, calculamos:

$$E = \frac{\text{sen } (2 \cdot 15°) + \cos (4 \cdot 15°)}{[\cos (2 \cdot 15°)]^2} \quad \therefore E = \frac{\text{sen } 30° + \cos 60°}{(\cos 30°)^2}$$

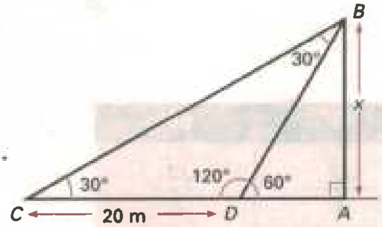
$$\therefore E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad \therefore E = \frac{1}{\frac{3}{4}} \quad \therefore E = \frac{4}{3}.$$

R.3 Determinar o valor de x na figura:



Resolução

Calculando as medidas dos ângulos internos do triângulo BCD, temos:



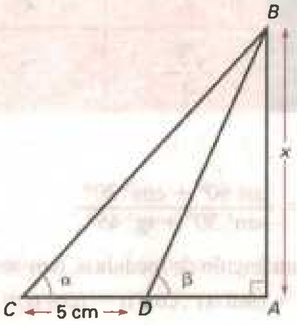
O triângulo BCD é isósceles, pois possui dois ângulos de mesma medida; logo, $CD = BD = 20$ m.

Assim, do triângulo ABD, temos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{x}{BD} = \frac{x}{20} \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20} \quad \therefore x = 10\sqrt{3}.$$

Logo, $x = 10\sqrt{3}$ m.

R.4 Sabendo que tg $\alpha = 2$ e tg $\beta = 3$, calcular o valor de x na figura:

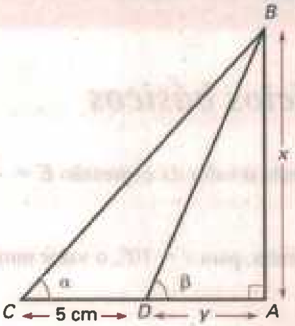


Resolução

Vamos introduzir uma variável auxiliar, fazendo $DA = y$.

Assim, do triângulo ABC temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{5+y} \Rightarrow 2 = \frac{x}{5+y}.$$



Do triângulo ABD temos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{y} \Rightarrow 3 = \frac{x}{y}.$$

Devemos então resolver o sistema:

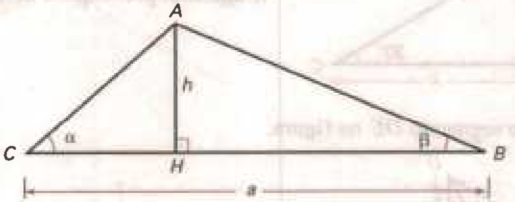
$$\begin{cases} 2 = \dfrac{x}{5+y} \quad \text{(I)} \\ 3 = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = \dfrac{x}{3}. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$2 = \frac{x}{5+\frac{x}{3}} \therefore x = 10 + \frac{2x}{3} \therefore x - \frac{2x}{3} = 10 \therefore \frac{x}{3} = 10 \therefore x = 30.$$

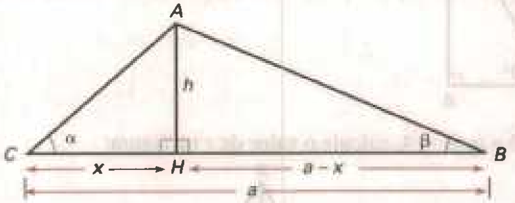
Logo, $x = 30$ cm.

R.5 Na figura, calcular o valor de h em função de α, β e a.



Resolução

Fazendo $CH = x$, temos que $BH = a - x$, ou seja:



Dos triângulos retângulos AHC e AHB, temos as equações:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{(I)} \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{h}{a-x}. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{a - \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}} \Rightarrow a\operatorname{tg}\beta - \frac{h\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = h$$

$$\therefore a\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha - h\operatorname{tg}\beta = h\operatorname{tg}\alpha \therefore a\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha = h\operatorname{tg}\alpha + h\operatorname{tg}\beta$$

$$\therefore a\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha = h(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \therefore h = \frac{a\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.8, C.2, C.4, C.5, C.6.

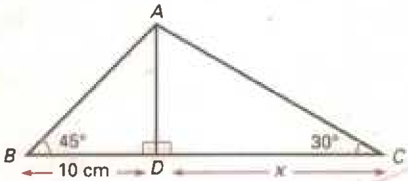
Exercícios básicos

B.1 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen}^2 45° + \cos^4 60°}{\text{tg}^4 60°}$.

B.2 Obtenha, para $x = 10°$, o valor numérico da expressão: $E = \dfrac{\text{sen } 3x + \cos 6x}{\text{tg } \dfrac{9x}{2}}$.

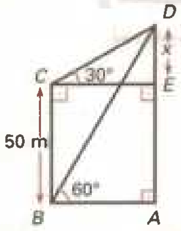
B.3 Sendo $x = 10°$, qual é o valor da expressão: $E = \dfrac{\text{sen}^2 6x + \cos 5x - \text{sen } 4x}{\text{tg}^2 3x}$?

B.4 Determine o valor de x na figura:



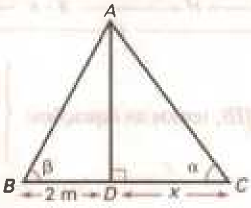
(**Sugestão:** prove que o triângulo *ABD* é isósceles.)

B.5 Calcule a medida x do segmento $\overline{DE}$ na figura:

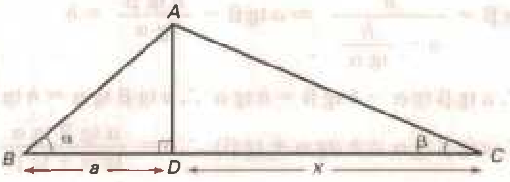


(**Sugestão:** prove que o triângulo *BCD* é isósceles.)

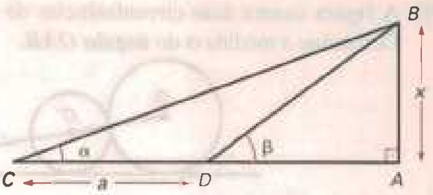
B.6 Sabendo que $\text{tg } \alpha = 3$ e $\text{tg } \beta = 4$, calcule o valor de x na figura:



B.7 Calcule o valor de x, na figura abaixo, em função de α, β e a.



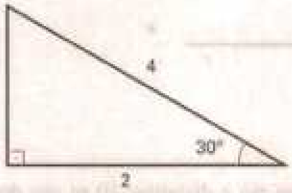
B.8 Determine o valor de x, na figura ao lado, em função de α, β e a.



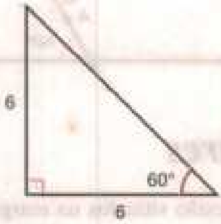
Exercícios complementares

C.1 O triângulo retângulo cujos dados são compatíveis é:

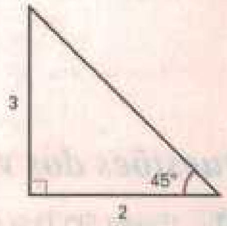
a)



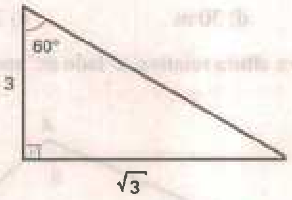
c)



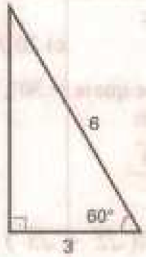
e)



b)



d)



C.2 Um homem de 1,80 m de altura, em pé, em um terreno plano e horizontal, vê, sob um ângulo de 30º com o plano horizontal, um poste localizado nesse mesmo terreno. Ao aproximar-se 3 m em direção ao poste, passa a vê-lo sob um ângulo de 60º com o plano horizontal. Determine a altura do poste.

C.3 Uma torre localiza-se num terreno plano e horizontal. De um ponto A do terreno, ao sul da torre, vê-se o topo dessa torre sob um ângulo de 45° com o plano horizontal. De um ponto B do terreno, a leste da torre, vê-se o topo dessa torre sob um ângulo de 30º com o plano horizontal. Sabendo que a distância entre os pontos A e B é 80 m, determine a altura da torre.

C.4 Um observador, no ponto O da figura ao lado, vê um prédio segundo um ângulo de 105°. Se esse observador está situado a uma distância de 18 m do prédio e a uma altura de 18 m em relação ao terreno horizontal, então a altura do prédio é:

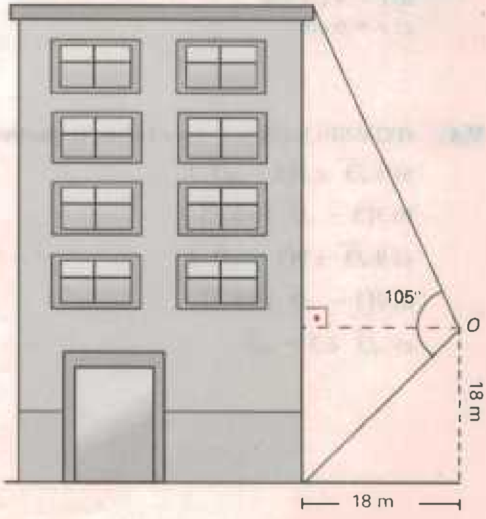
a) $18(\sqrt{3} + 1)$ m

b) $(10\sqrt{3} + 9)$ m

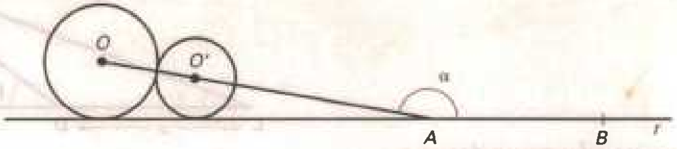
c) $(2 + \sqrt{3})$ m

d) 58 m

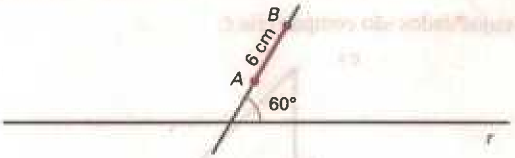
e) $(\sqrt{3} + 28)$ m



C.5 A figura mostra duas circunferências de raios 12 cm e 4 cm, tangentes entre si e tangentes a uma reta r. Determine a medida α do ângulo $O\hat{A}B$.



C.6 Determine a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r.

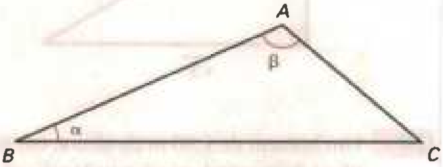


Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Dois pontos A e B estão situados na margem de um rio e distantes 40 m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede 75° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 75°. Determine a largura do rio:

a) 40 m
b) 20 m
c) $20\sqrt{3}$ m
d) 30 m
e) 25 m

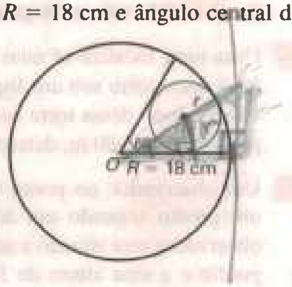
V.2 (Faap-SP) No triângulo ao lado tem-se que $\alpha = 30°$, $\beta = 105°$ e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 2 cm. O perímetro do triângulo ABC, em cm, é:



a) $10(\sqrt{3}+1)$
b) $\dfrac{5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$
c) $2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$
d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
e) $6+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

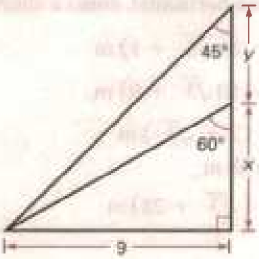
V.3 (Fatec-SP) Um círculo de raio r está inscrito no setor circular de raio $R = 18$ cm e ângulo central de 60° (conforme figura). Nessas condições tem-se que:

a) $r = 3$ cm
b) $r = 9$ cm
c) $r = 9{,}5$ cm
d) $r = 4\sqrt{3}$ cm
e) $r = 6$ cm



V.4 (FGV-SP) Na figura, x e y valem, respectivamente:

a) $3\sqrt{3}$ e $3(3-\sqrt{3})$
b) $3(3-\sqrt{3})$ e $3\sqrt{3}$
c) $9\sqrt{3}$ e $9(1-\sqrt{3})$
d) $9(1-\sqrt{3})$ e $9\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}$ e $3-\sqrt{3}$

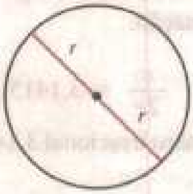


Capítulo 51

Unidades de medida de arcos e ângulos

1. O número π (pi)

Consideremos uma circunferência qualquer.



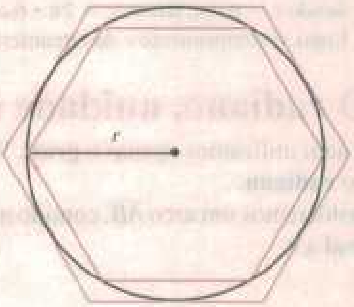
Sejam c seu comprimento (perímetro) e $2r$ a medida de seu diâmetro.

Desde muito antes de Cristo, sabe-se que a razão $\frac{c}{2r}$ é constante. A procura dessa constante foi tarefa árdua de grandes matemáticos ao longo da história. Talvez o matemático mais obcecado pela "captura" desse número tenha sido o grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C -212 a.C.), o primeiro a chegar a um método correto para o cálculo dessa constante.

Através de inscrições e circunscrições de polígonos regulares a uma mesma circunferência, o pesquisador obteve a aproximação:

$$\frac{c}{2r} \simeq 3{,}1415.$$

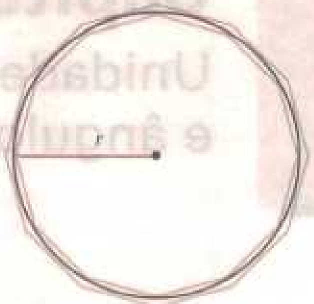
Na busca desse número, Arquimedes inscreveu e circunscreveu a uma mesma circunferência de raio r hexágonos regulares.



Calculando os perímetros do hexágono inscrito e do circunscrito, o matemático obteve: $6r$ e $6{,}92r$, respectivamente. Assim, a razão $\frac{c}{2r}$ é tal que:

$$\frac{6r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6,92r}{2r} \Rightarrow 3 < \frac{c}{2r} < 3{,}46.$$

A seguir, Arquimedes inscreveu e circunscreveu a essa circunferência de raio r dodecágonos regulares.



Calculou então os perímetros dos dodecágonos inscrito e circunscrito: $6{,}20r$ e $6{,}44r$, respectivamente.

Logo, a constante $\frac{c}{2r}$ é tal que: $\frac{6{,}20r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6{,}44r}{2r} \Rightarrow 3{,}10 < \frac{c}{2r} < 3{,}22$.

O filósofo grego continuou esse procedimento até chegar a polígonos regulares inscrito e circunscrito com 96 lados, obtendo assim a aproximação:

$$\frac{c}{2r} \simeq 3{,}1415.$$

Sabe-se, hoje, que a razão $\frac{c}{2r}$ é o número irracional 3,14159265..., que simbolizamos pela letra grega π (pi).

$$\boxed{\frac{c}{2r} = \pi.}$$

Dessa igualdade, chegamos à fórmula que calcula o comprimento de uma circunferência de raio r:

$$\boxed{c = 2\pi r}\text{, onde } \pi \simeq 3{,}14.$$

Exercício resolvido

R.1 Calcular o comprimento (perímetro) de uma circunferência cujo raio mede 6 cm.

Resolução

O comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $c = 2\pi r$.

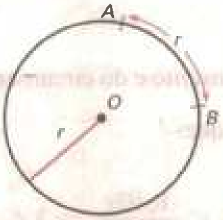
Sendo $r = 6$ cm, temos $c = 2\pi \cdot 6$ cm.

Logo, o comprimento c da circunferência é $c = 12\pi$ cm.

2. O radiano, unidade de medida de arco e ângulo

Até aqui utilizamos apenas o **grau**. Vamos estudar, agora, uma outra unidade para medir arcos e ângulos, o **radiano**.

Consideremos um arco $\overset{\frown}{AB}$, contido numa circunferência de raio r, tal que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ seja igual a r.

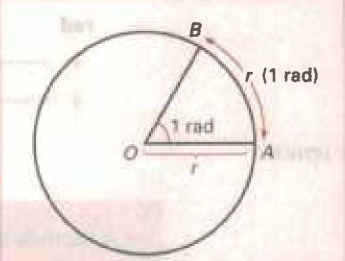


Dizemos que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 1 radiano (1 rad).

Definições

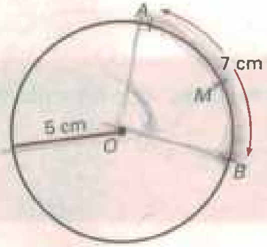
I. Um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

II. Um ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 rad se, e somente se, determina numa circunferência de centro O um arco de 1 rad.



Exercícios resolvidos

R.2 Determinar a medida do arco $\widehat{AMB}$, na figura, em radianos.



Resolução

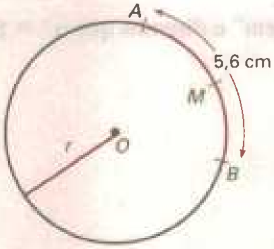
Pela regra de três:

rad	cm
1	5
x	7

temos $x = \dfrac{7}{5}$ rad $= 1{,}4$ rad.

Logo, a medida do arco $\widehat{AMB}$ é 1,4 rad.

R.3 Sabendo que o arco $\widehat{AMB}$ da figura mede 2,8 rad, determinar o raio da circunferência.



Resolução

Pela regra de três:

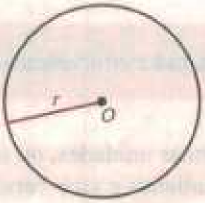
rad	cm
1	r
2,8	5,6

temos $r = \dfrac{5{,}6}{2{,}8}$ cm $= 2$ cm.

Logo, o raio da circunferência mede 2 cm.

3. A medida da circunferência em radianos

Sabemos que uma circunferência mede 360°. Qual será sua medida em radianos?
Pensemos...



O comprimento de uma circunferência de raio r, numa certa unidade u, é $2\pi r$. Logo, sendo x a medida da circunferência em radianos, temos pela regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & u \\ 1 & \text{———} & r \\ x & \text{———} & 2\pi r \end{array} \qquad \begin{array}{l} \therefore\ x = \dfrac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} \text{ rad} \\ \therefore\ \boxed{x = 2\pi \text{ rad}} \end{array}$$

Assim, temos:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

Como $\pi \simeq 3{,}14$, a conclusão anterior nos diz que o comprimento da circunferência equivale a $2\pi \simeq 6{,}28$ raios dessa circunferência.

4. Medidas equivalentes

Definição

Uma medida α graus é equivalente a outra medida β radianos se, e somente se:

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\beta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}.$$

Isto é, α graus é equivalente a β radianos se, e somente se, ambos são medidas de um mesmo arco.

Nota

Em certos momentos, cometeremos um "abuso de linguagem" e diremos que $\alpha^\circ = \beta$ rad.

Exemplos

a) 45° é equivalente a $\frac{\pi}{4}$ rad, pois: $\dfrac{45^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\frac{\pi}{4} \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$.

b) 60° é equivalente a $\frac{\pi}{3}$ rad, pois: $\dfrac{60^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\frac{\pi}{3} \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$.

5. Transformações de unidades

Vimos que uma circunferência mede 360° ou 2π rad. Portanto meia circunferência mede 180° ou π rad, isto é:

π rad é equivalente a 180°.

Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em graus, podemos obter a medida desse arco em radianos e vice-versa.

Exercícios resolvidos

R.4 Determinar, em radianos, a medida equivalente a 120°.

Resolução

Lembrando que π rad equivalem a 180°, basta resolvermos a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{graus} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 120 \end{array} \qquad \therefore\ 180x = 120\pi \qquad \therefore\ x = \frac{\cancel{120}\pi}{\cancel{180}}\ \text{rad}\ \therefore\ x = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad.}$$

R.5 Determinar, em graus, a medida equivalente a $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolução

$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{graus} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ \frac{\pi}{6} & \text{———} & x \end{array} \qquad \therefore\ x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi}\ \text{graus}\ \therefore\ x = 30°.$$

R.6 Determinar, em graus, a medida equivalente a 1 rad.

Resolução

$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{graus} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ 1 & \text{———} & x \end{array} \qquad \therefore\ x = \frac{180}{\pi}\ \text{graus.}$$

Fazendo π = 3,14, temos $x = \frac{180}{3,14}$ graus $\therefore\ x \simeq 57°$.

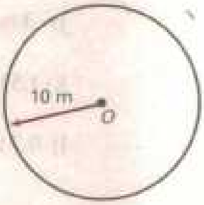
Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.6, B.7, B.9 (a até f), B.10 (a até f).
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.8, B.9 (g até l), B.10 (g até l), C.1, C.2, C.3, C.4.

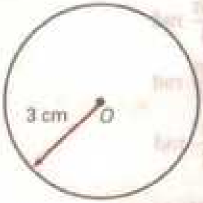
Exercícios básicos

B.1 Calcule o perímetro de cada uma das circunferências.

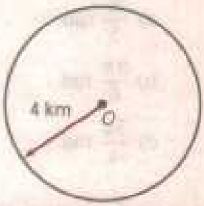
a)



b)



c)

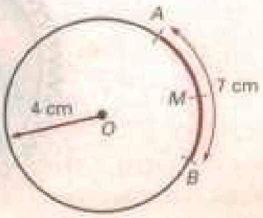


B.2 Um pneu de automóvel, com 0,5 m de raio, percorreu uma distância de 6 280 m. Quantas voltas deu o pneu? (Adote π = 3,14.)

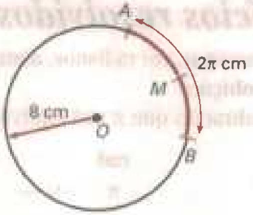
B.3 Um atleta deu 22 voltas numa pista circular de 50 m de raio. Que distância percorreu? (Adote π = 3,14.)

B.4 Uma toalha redonda tem 1,5 m de raio. Uma mulher pretende colocar renda em todo o perímetro da toalha. Quantos metros de renda serão necessários? (Adote π = 3,14.)

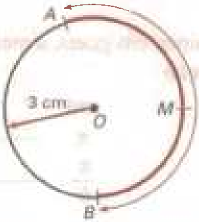
B.5 Determine, em radianos, a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$.



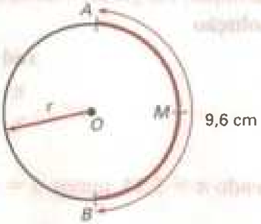
B.6 Determine, em graus, a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$, da figura.



B.7 Sabendo que a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$ é 4,2 rad, determine o comprimento desse arco em centímetros.



B.8 Sabendo que o arco $\overset{\frown}{AMB}$, da figura, mede 3,2 rad, determine a medida do raio da circunferência.



B.9 Determine, em radianos, a medida equivalente a:

a) 240°
b) 315°
c) 210°
d) 45°
e) 90°
f) 270°
g) 30°
h) 300°
i) 20°
j) 22°30′
k) 7°30′
l) 40°

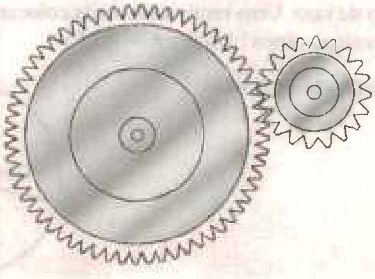
(**Sugestão:** Nos itens j e k, transforme em graus antes, isto é: 22°30′ = 22,5°; 7°30′ = 7,5°.)

B.10 Expresse, em graus, a medida equivalente a:

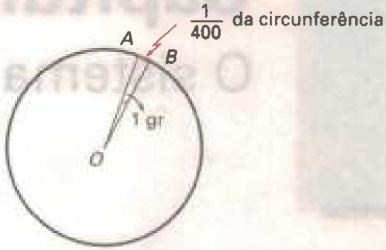
a) $\frac{\pi}{5}$ rad
b) $\frac{5\pi}{6}$ rad
c) $\frac{3\pi}{4}$ rad
d) $\frac{7\pi}{4}$ rad
e) $\frac{2\pi}{3}$ rad
f) $\frac{\pi}{2}$ rad
g) $\frac{4\pi}{3}$ rad
h) $\frac{5\pi}{9}$ rad
i) $\frac{11\pi}{6}$ rad
j) 3 rad
k) 1,5 rad
l) 0,7 rad

Exercícios complementares

C.1 Duas rodas dentadas, com sessenta dentes a maior e vinte dentes a menor, estão engrenadas entre si. Quando a maior girar 32π rad, quantas voltas dará a menor?



C.2 Uma unidade de medida de ângulo, o **grado**, é definida da seguinte maneira: um ângulo de medida 1 grado (1 gr) é um ângulo de vértice O que determina numa circunferência de centro O um arco de comprimento igual a $\frac{1}{400}$ dessa circunferência.
Quantos radianos mede um ângulo de 50 gr?



C.3 Qual é a razão do comprimento da linha do equador para o diâmetro da Terra?

C.4 Sabendo que a medida do lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio r é igual ao próprio r e que a medida do lado de um hexágono regular circunscrito a essa circunferência é $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, com $\sqrt{3} = 1{,}73$, mostre que $3 < \pi < 3{,}46$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Vunesp) Uma curva de certa rodovia tem o formato de um arco de circunferência. Se, em tal curva, a rodovia muda sua direção 8°20′ em 31,4 m, o raio dessa curva é:
(Adote $\pi = 3{,}14$.)

a) 192 m b) 200 m c) 208 m d) 216 m e) 224 m

V.2 (Fuvest-SP) Quantos graus mede, aproximadamente, um arco de 0,105 rad?

V.3 (UnB-DF) Quanto mede em radianos um arco de 2°15′? (**Sugestão:** transforme 15′ em grau.)

Capítulo 52

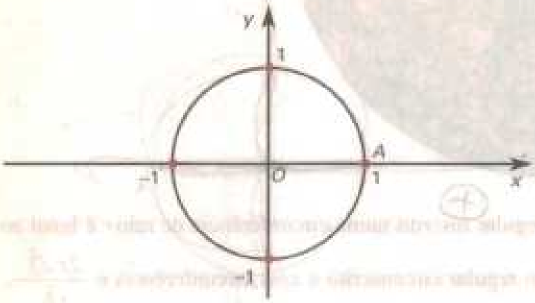
O sistema trigonométrico

1. Introdução

Até aqui, definimos seno, co-seno e tangente somente para ângulos agudos. Vamos estender esses conceitos para ângulos não-agudos. Para isso é necessária a construção de um sistema chamado **circunferência trigonométrica**.

2. Circunferência trigonométrica

Consideremos uma circunferência de raio unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.



Essa estrutura, juntamente com as convenções a seguir, é a circunferência trigonométrica.

Convenções

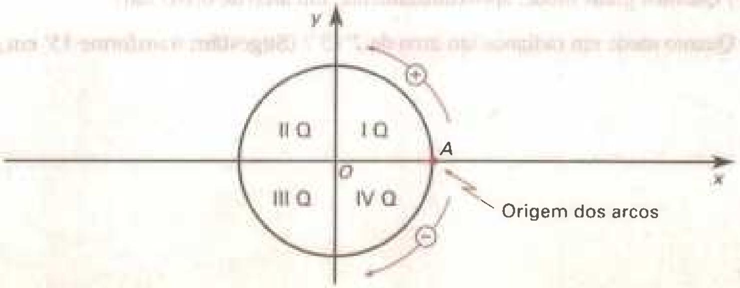
I. O ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

II. Se um arco for medido no **sentido horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **negativo** (−).

III. Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **positivo** (+).

IV. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes**; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário, a partir do ponto A.

Em resumo:

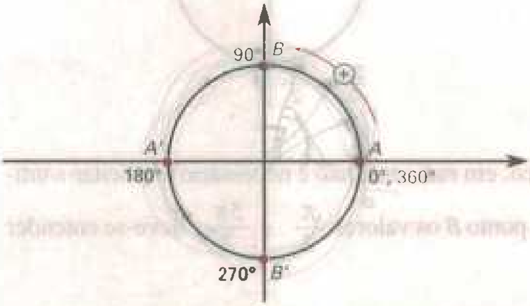


3. Arcos trigonométricos

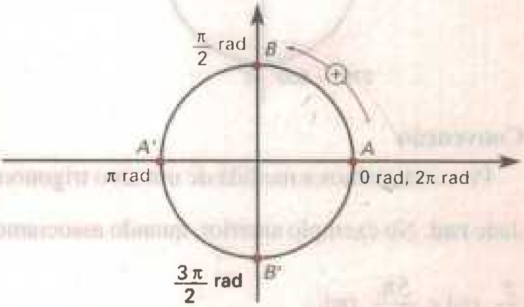
A cada ponto *M* da circunferência trigonométrica associamos medidas em graus ou radianos do arco $\overset{\frown}{AM}$.

Exemplos

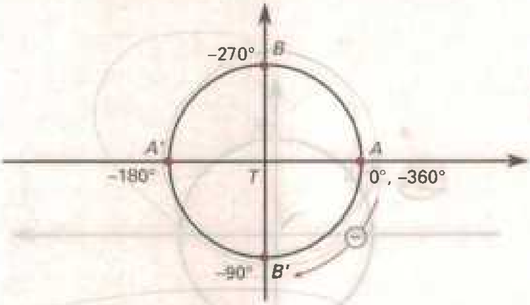
a) Partindo do ponto *A* e girando uma volta completa no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos *A*, *B*, *A'* e *B'*:


90°
B
+
A'
180°
A
0°, 360°
270°
B'

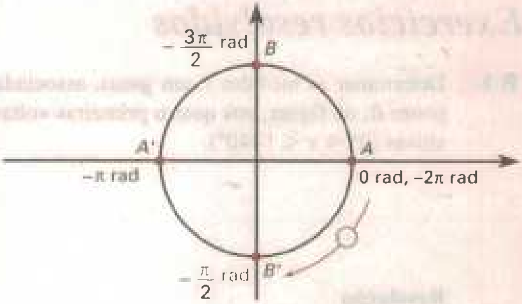
ou


$\frac{\pi}{2}$ rad
B
+
A'
π rad
A
0 rad, 2π rad
$\frac{3\pi}{2}$ rad
B'

b) Partindo do ponto *A* e girando uma volta completa no sentido horário, associamos as seguintes medidas aos pontos *A*, *B*, *A'* e *B'*:


−270°
B
A'
−180°
A
0°, −360°
−
−90°
B'

ou


$-\frac{3\pi}{2}$ rad
B
A'
−π rad
A
0 rad, −2π rad
−
$-\frac{\pi}{2}$ rad
B'

3.1. Arcos côngruos

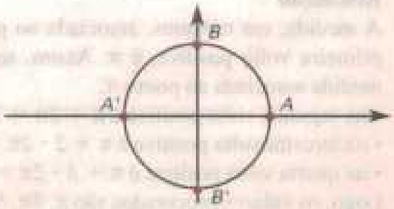
Definição

> Dois arcos trigonométricos *AM* e *AN* são **côngruos** se, e somente se, as extremidades *M* e *N* coincidem.

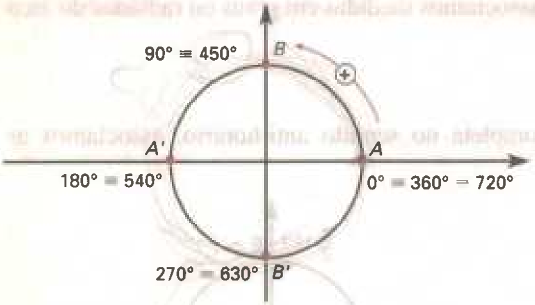
Indicaremos que α e β são medidas de arcos **côngruos** por $\alpha \equiv \beta$ (lê-se "α é côngruo a β").

Exemplo

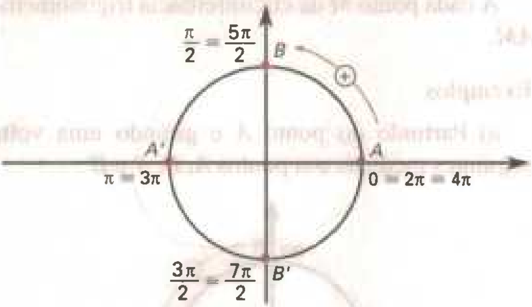
Consideremos a circunferência trigonométrica:



Partindo do ponto A e girando duas voltas completas no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



ou

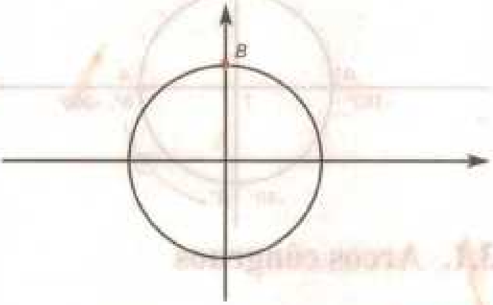

$\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$
B
⊕
A'
A
π = 3π
0 = 2π = 4π
$\frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$
B'

Convenção

Para indicarmos a medida de um arco trigonométrico, em radianos, não é necessário explicitar a unidade **rad**. No exemplo anterior, quando associamos ao ponto B os valores $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$, deve-se entender $\frac{\pi}{2}$ rad e $\frac{5\pi}{2}$ rad.

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar as medidas x, em graus, associadas ao ponto B, da figura, nas quatro primeiras voltas positivas ($0° \leq x < 1\,440°$).



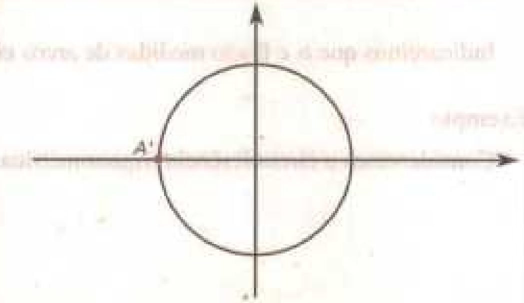
Resolução

A medida, em graus, associada ao ponto B, na primeira volta positiva, é 90°. Assim, temos que a medida associada ao ponto B:

- na segunda volta positiva é $90° + 360° = 450°$;
- na terceira volta positiva é $90° + 2 \cdot 360° = 810°$;
- na quarta volta positiva é $90° + 3 \cdot 360° = 1\,170°$.

Logo, os valores procurados são 90°, 450°, 810° e 1 170°.

R.2 Determinar as medidas x, em radianos, associadas ao ponto A', da figura, nas quatro primeiras voltas positivas ($0 \leq x < 8\pi$).



Resolução

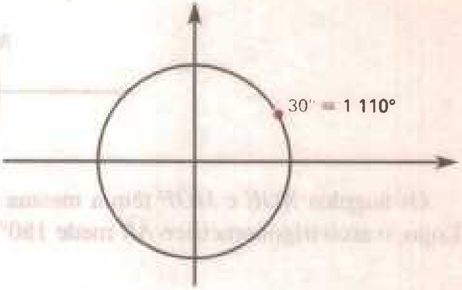
A medida, em radianos, associada ao ponto A', na primeira volta positiva, é π. Assim, temos que a medida associada ao ponto A':

- na segunda volta positiva é $\pi + 2\pi = 3\pi$;
- na terceira volta positiva é $\pi + 2 \cdot 2\pi = 5\pi$;
- na quarta volta positiva é $\pi + 3 \cdot 2\pi = 7\pi$.

Logo, os valores procurados são π, 3π, 5π e 7π.

R.3 Determinar a medida x do arco da primeira volta positiva ($0° \leq x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1 110°.

Resolução



Basta eliminarmos do arco de 1 110° todas as suas voltas completas. Para isso, dividimos 1110° por 360°:

$$\begin{array}{r|l} 1110^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 30^\circ & 3 \end{array}$$

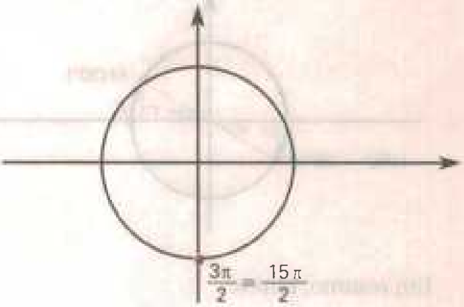
Assim, $1\,110° = 3 \cdot 360° + 30°$.
O arco de 1 110° possui três voltas completas e mais 30°.
Portanto $x = 30°$. Dizemos que 30° é côngruo a 1 110°.

R.4 Determinar a medida x do arco da primeira volta positiva ($0 \leq x < 2\pi$) que possui a mesma extremidade do arco de $\frac{15\pi}{2}$ rad.

Resolução

Como no exercício anterior, vamos eliminar as voltas completas de $\frac{15\pi}{2}$ rad. Para isso vamos transformar esse arco numa soma de dois outros tal que um deles seja o total de voltas completas contidas em $\frac{15\pi}{2}$ rad. Isto é: $\frac{15\pi}{2} = \underbrace{\frac{12\pi}{2}}_{\text{três voltas completas}} + \frac{3\pi}{2}$.

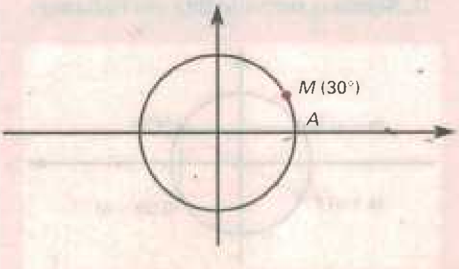
Logo, $x = \frac{3\pi}{2}$. Dizemos que $\frac{3\pi}{2}$ é côngruo a $\frac{15\pi}{2}$.



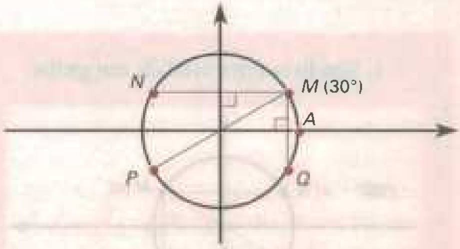
4. Simetrias

É muito útil sabermos relacionar medidas de arcos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso nos ajudará, mais adiante, a calcular os senos e os co-senos desses arcos.

Consideremos, por exemplo, o ponto M da figura abaixo associado à medida 30°.

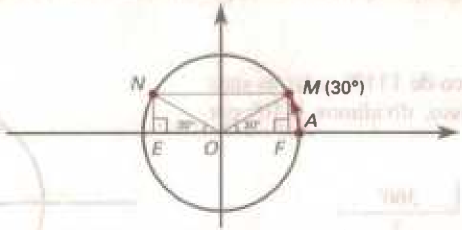


Pelo ponto M, tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas. Essas retas interceptam a circunferência nos pontos N, P e Q, respectivamente.

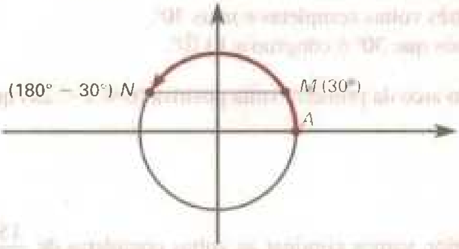


Os pontos N, P e Q são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto M.

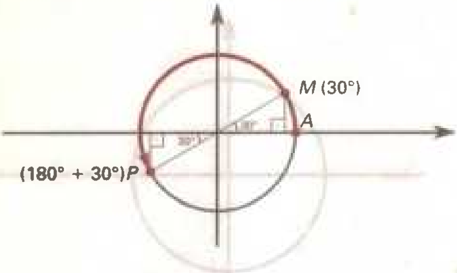
Determinemos as medidas x $(0° \leqslant x < 360°)$ associadas aos pontos N, P e Q.


N
M (30°)
A
30°
30°
E
O
F

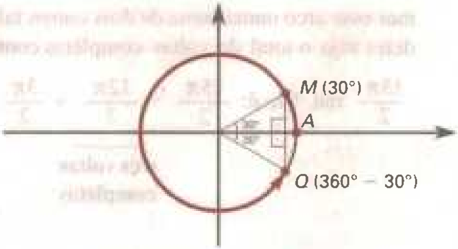
Os ângulos $N\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida (pois os triângulos NOE e MOF são congruentes). Logo, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AN}$ mede $180° - 30° = 150°$.


(180° − 30°) N
M (30°)
A

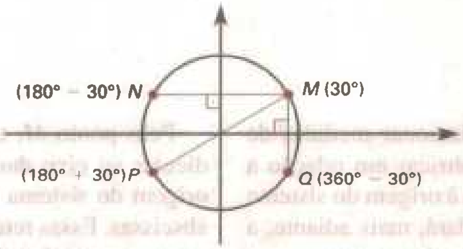
Analogamente, temos:


M (30°)
A
30°
30°
(180° + 30°)P

e

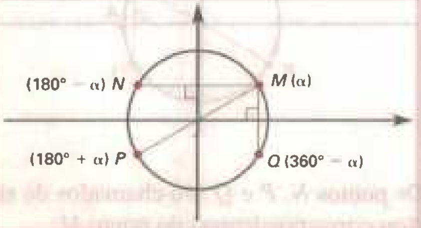

M (30°)
A
30°
30°
Q (360° − 30°)

Em resumo, temos:

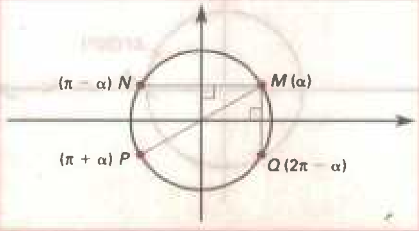

(180° − 30°) N
M (30°)
(180° + 30°)P
Q (360° − 30°)

Generalizando o resultado anterior, temos:

I. Sendo α uma medida em graus:

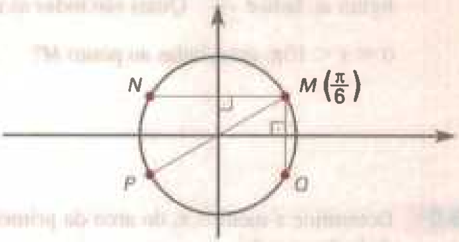

(180° − α) N
M (α)
(180° + α) P
Q (360° − α)

II. Sendo α uma medida em radianos:

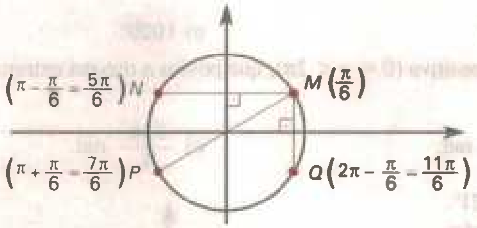

(π − α) N
M (α)
(π + α) P
Q (2π − α)

Exercício resolvido

R.5 O ponto M da figura está associado à medida $\frac{\pi}{6}$ rad. Determinar as medidas x $(0 \leq x < 2\pi)$ associadas aos pontos N, P e Q.


N
$M\left(\frac{\pi}{6}\right)$
P
Q

Resolução


$\left(\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\right) N$
$M\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$\left(\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}\right) P$
$Q\left(2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}\right)$

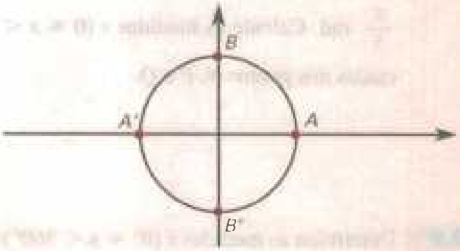
Logo, $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

Sugestões

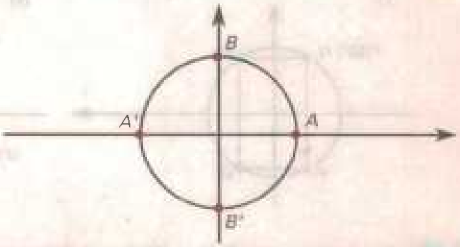
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.6, B.7, B.8, B.9, C.1
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.10, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

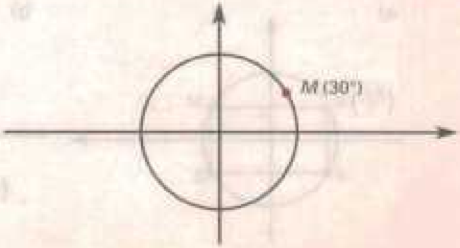
B.1 Determine as medidas x, em graus, associadas aos pontos A, B, A', B', nas três primeiras voltas positivas $(0° \leq x < 1080°)$.



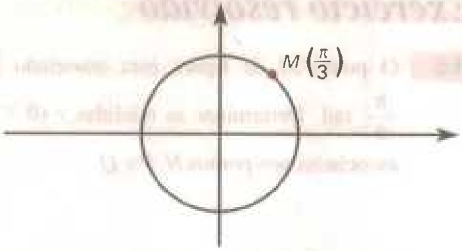
B.2 Obtenha as medidas x, em radianos, associadas aos pontos A, B, A', B', nas três primeiras voltas positivas $(0 \leq x < 6\pi)$.



B.3 Uma medida em graus associada ao ponto M da figura ao lado é 30°. Calcule todas as medidas x, $0° \leq x < 1800°$, associadas ao ponto M.



B.4 Uma medida em radianos associada ao ponto M da figura ao lado é $\frac{\pi}{3}$. Quais são todas as medidas x, $0 \leq x < 10\pi$, associadas ao ponto M?


$M\left(\frac{\pi}{3}\right)$

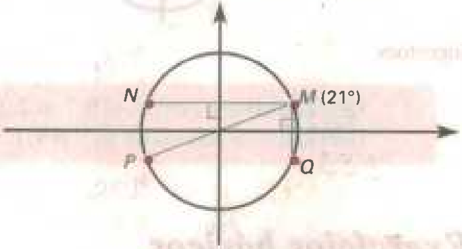
B.5 Determine a medida x, do arco da primeira volta positiva ($0° \leq x < 360°$), que possui a mesma extremidade do arco de:

a) 1850°; b) 1320°; c) 1020°.

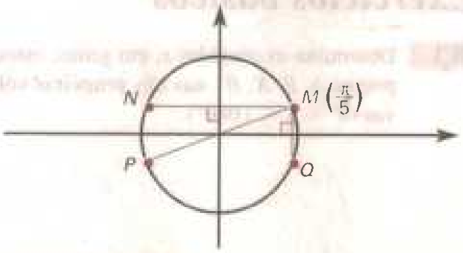
B.6 Obtenha a medida x, do arco da primeira volta positiva ($0 \leq x < 2\pi$), que possui a mesma extremidade do arco de:

a) $\frac{18\pi}{5}$ rad; b) $\frac{13\pi}{2}$ rad; c) $\frac{21\pi}{4}$ rad.

B.7 O ponto M, da figura, está associado à medida 21°. Quais são as medidas x ($0° \leq x < 360°$) associadas aos pontos N, P e Q?

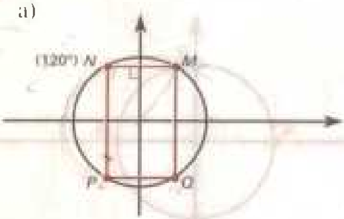


B.8 O ponto M, da figura, está associado à medida $\frac{\pi}{5}$ rad. Calcule as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos pontos N, P e Q.

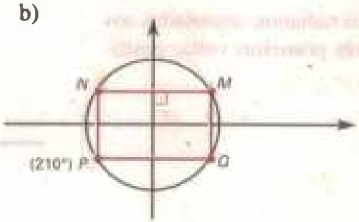

N
$M\left(\frac{\pi}{5}\right)$
P
Q

B.9 Determine as medidas x ($0° \leq x < 360°$) associadas aos vértices dos retângulos:

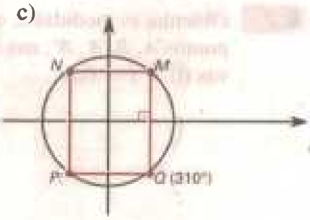
a)



b)

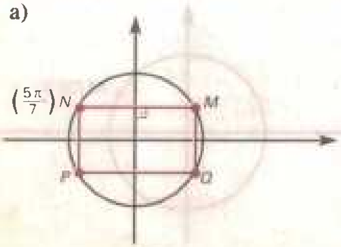


c)

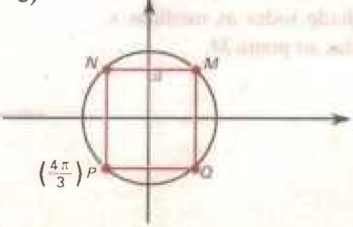


B.10 Quais são as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos vértices dos retângulos abaixo?

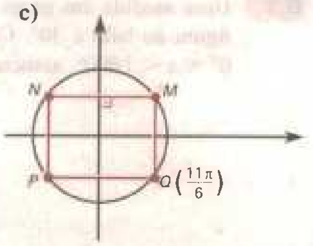
a)


$\left(\frac{5\pi}{7}\right)$ N
M
P
Q

b)

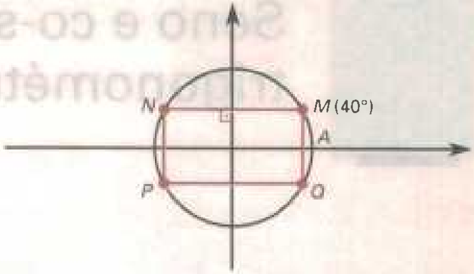

N
M
$\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ P
Q

c)

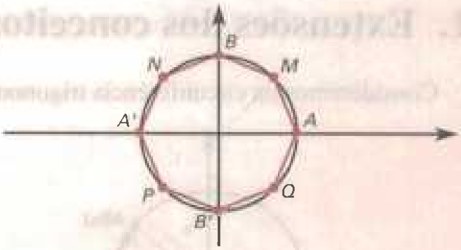

N
M
P
Q $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

Exercícios complementares

C.1 O quadrilátero *MNPQ*, ao lado, é um retângulo. Obtenha os valores x, $-360° \leqslant x \leqslant 360°$, associados aos pontos M, N, P e Q.



C.2 O polígono *AMBNA'PB'Q*, ao lado, é um octógono regular. Determine os valores x, $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, associados aos pontos A, M, B, N, A', P, B', Q.



C.3 Se α e β são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$.
b) $\alpha = \beta + 360°$.
c) $\alpha = \beta + 2 \cdot 360°$.
d) $\alpha = \beta - 2 \,.\, 360°$.
e) $\alpha = \beta + k \cdot 360°$, para algum k, $k \in \mathbb{Z}$.

C.4 Se α e β são duas medidas, em radianos, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$.
b) $\alpha = \beta + 2\pi$.
c) $\alpha = \beta + 4\pi$.
d) $\alpha = \beta - 2\pi$.
e) $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$, para algum k, $k \in \mathbb{Z}$.

C.5 Qual é a medida do arco da primeira volta positiva ($0° \leqslant x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de $-40°$?

C.6 Determine a medida do arco da primeira volta positiva ($0° \leqslant x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de $-1\,110°$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Se α e β são medidas de dois arcos trigonométricos tais que $\beta = 180° - \alpha$, então pode-se afirmar que:

a) a extremidade do arco de medida α é um ponto do 1º quadrante e a do arco de medida β é um ponto do 2º quadrante.
b) as extremidades dos arcos de medidas α e β são simétricas em relação ao eixo das ordenadas.
c) as extremidades dos arcos de medidas α e β são simétricas em relação ao eixo das abscissas.
d) as extremidades dos arcos de medidas α e β são simétricas em relação à origem do sistema cartesiano.
e) nenhuma das anteriores está correta.

V.2 (UFCE) Dois arcos trigonométricos são côngruos se, e somente se, tiverem a mesma extremidade. Qual das medidas abaixo é de um arco côngruo ao arco trigonométrico de $\frac{\pi}{7}$ rad?

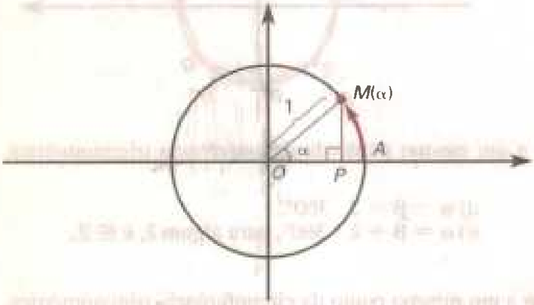
a) $\frac{22\pi}{7}$ rad
b) $\frac{6\pi}{7}$ rad
c) $\frac{8\pi}{7}$ rad
d) $\frac{29\pi}{7}$ rad
e) $\frac{13\pi}{7}$ rad

Capítulo 53

Seno e co-seno de um arco trigonométrico

1. Extensões dos conceitos de seno e co-seno

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, $0° < \alpha < 90°$.



No triângulo retângulo *OMP* temos:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP;$$

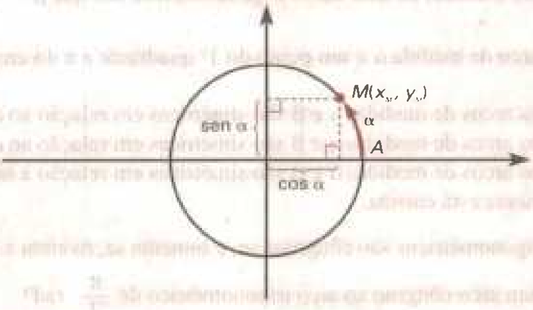
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{MP}{1} = MP.$$

Note que as medidas *OP* e *MP* são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto *M*.

Veremos a seguir como ampliar os conceitos de seno e de co-seno de um arco (ou ângulo) para qualquer arco trigonométrico.

Definição

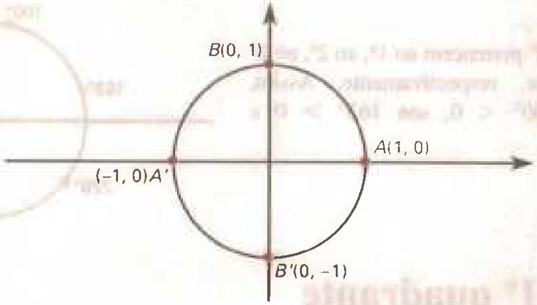
Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, chamam-se co-seno e seno de α a abscissa e a ordenada do ponto *M*, respectivamente:



- $\cos \alpha$ = Abscissa de $M = x_M$,
- $\operatorname{sen} \alpha$ = Ordenada de $M = y_M$.

Exemplo

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário (medida igual a 1), temos que as coordenadas dos pontos A, B, A' e B' são:



Note que:

$\cos 0° = x_A = 1$
$\cos 90° = x_B = 0$
$\cos 180° = x_{A'} = -1$
$\cos 270° = x_{B'} = 0$
$\cos 360° = x_A = 1$

$\text{sen } 0° = y_A = 0$
$\text{sen } 90° = y_B = 1$
$\text{sen } 180° = y_{A'} = 0$
$\text{sen } 270° = y_{B'} = -1$
$\text{sen } 360° = y_A = 0$

Exercício resolvido

R.1 Calcular o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } 3x + \cos 6x}{\text{sen } 9x}$, para $x = 30°$.

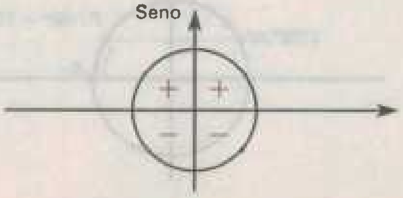
Resolução

Substituindo x por 30° na expressão, temos $E = \dfrac{\text{sen } 90° + \cos 180°}{\text{sen } 270°}$.

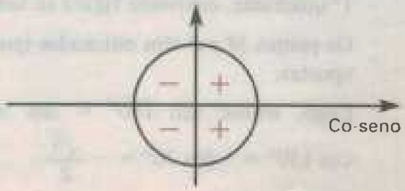
Logo, $E = \dfrac{1 + (-1)}{-1} \Rightarrow E = 0$.

2. Variação de sinal do seno e do co-seno

I. O seno de um arco é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o seno:



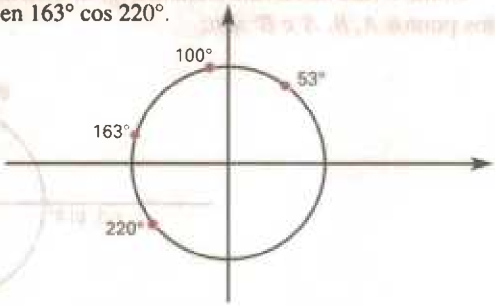
II. O co-seno de um arco é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o co-seno:



Exercício resolvido

R.2 Determinar o sinal do produto $P = \text{sen } 53° \cos 100° \text{ sen } 163° \cos 220°$.

Resolução



53°, 100°, 163° e 220° pertencem ao 1º, ao 2º, ao 2º e ao 3º quadrante, respectivamente. Assim, $\text{sen } 53° > 0$, $\cos 100° < 0$, $\text{sen } 163° > 0$ e $\cos 220° < 0$.
Logo, $P > 0$.

3. Redução ao 1º quadrante

O objetivo desse estudo é relacionar o seno e o co-seno de arcos do 2º, do 3º e do 4º quadrante com o seno e o co-seno do arco correspondente a cada um desses arcos no 1º quadrante. Para exemplificar, utilizaremos a tabela dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Observe que essa tabela apresenta senos e co-senos de alguns arcos do 1º quadrante. Vejamos como utilizá-la nos demais quadrantes.

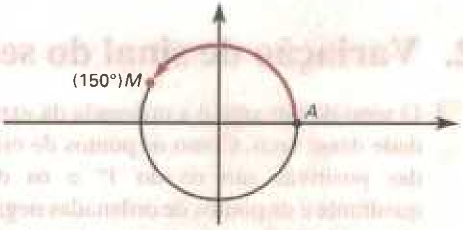
3.1. Redução do 2º para o 1º quadrante

Exercício resolvido

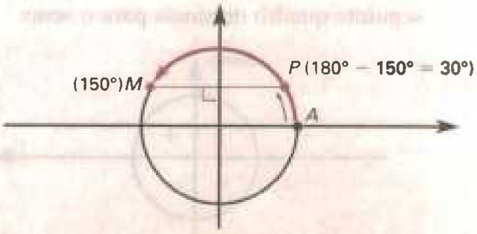
R.3 Calcular sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante:



Traçando por M a perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura ao lado.



Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas.

Logo, temos: $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

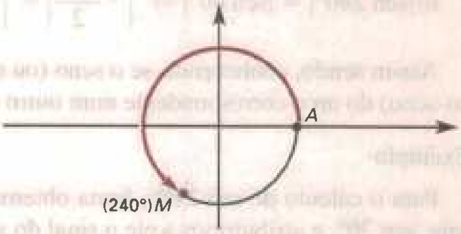
3.2. Redução do 3º para o 1º quadrante

Exercício resolvido

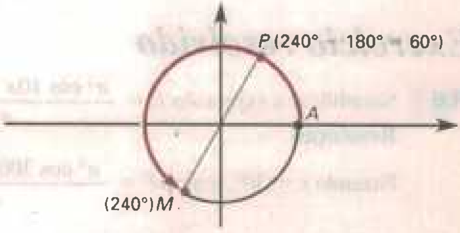
R.4 Calcular sen 240° e cos 240°.

Resolução

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante:



Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura ao lado.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas.

Temos então: $\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

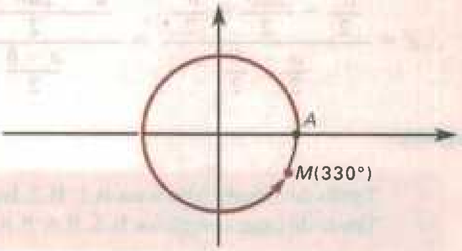
3.3. Redução do 4º para o 1º quadrante

Exercício resolvido

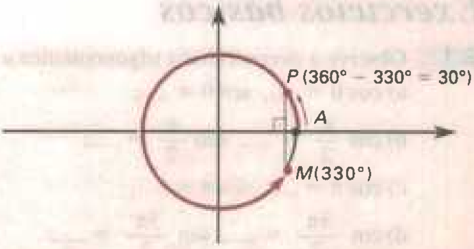
R.5 Calcular sen 330° e cos 330°.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º quadrante:



Traçando por M a perpendicular ao eixo dos co-senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura ao lado.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais.

Logo, temos: $\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$ e $\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.4. Conclusões

Os senos (ou co-senos) de dois arcos correspondentes têm o **mesmo módulo**.

Exemplos

a) $|\text{sen } 150°| = |\text{sen } 30°| \Rightarrow \left|\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

b) $|\text{sen } 240°| = |\text{sen } 60°| \Rightarrow \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

c) $|\cos 330°| = |\cos 30°| \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

d) $|\cos 240°| = |\cos 60°| \Rightarrow \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

Assim sendo, conhecendo-se o seno (ou co-seno) de um arco do 1º quadrante, o cálculo do seno (ou co-seno) do arco correspondente num outro quadrante se resume, simplesmente, ao estudo do sinal.

Exemplo

Para o cálculo do sen 210°, basta obtermos o seno do correspondente de 210° no 1º quadrante, ou seja, sen 30°, e atribuirmos a ele o sinal do seno no 3º quadrante, isto é, o sinal negativo:

$$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30°.$$

Exercício resolvido

R.6 Simplificar a expressão $E = \dfrac{a^2 \cos 10x + 2ab \text{ sen } 11x + b^2 \text{ sen } 5x}{a \text{ sen } x + b \cos 4x}$, para $x = 30°$ e $a \neq b$.

Resolução

Fazendo $x = 30°$, temos $E = \dfrac{a^2 \cos 300° + 2ab \text{ sen } 330° + b^2 \text{ sen } 150°}{a \text{ sen } 30° + b \cos 120°}$.

Reduzindo ao 1º quadrante, obtemos:

$$E = \frac{a^2 \cos 60° + 2ab\,(-\text{sen } 30°) + b^2 \text{ sen } 30°}{a \text{ sen } 30° + b\,(-\cos 60°)} = \frac{a^2 \cdot \frac{1}{2} + 2ab\left(-\frac{1}{2}\right) + b^2 \cdot \frac{1}{2}}{a \cdot \frac{1}{2} + b\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore E = \frac{\frac{a^2}{2} - \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}} = \frac{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} \quad \therefore E = \frac{(a-b)^2}{a-b} \Rightarrow E = a - b.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.5, B.7, B.10, C.1, C.4, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.6, B.8, B.9, C.2, C.3, C.5, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Observe a circunferência trigonométrica e complete as igualdades.

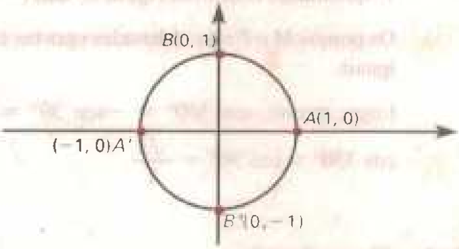
a) $\cos 0 =$ ....., $\text{sen } 0 =$ .....;

b) $\cos \frac{\pi}{2} =$ ....., $\text{sen } \frac{\pi}{2} =$ .....;

c) $\cos \pi =$ ....., $\text{sen } \pi =$ .....;

d) $\cos \frac{3\pi}{2} =$ ....., $\text{sen } \frac{3\pi}{2} =$ .....;

e) $\cos 2\pi =$ ....., $\text{sen } 2\pi =$ ....



B.2 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{\cos 0° \text{ sen } 270° + \text{sen } 90° \cos 180°}{\text{sen}^2\, 90° + \cos^2 180°}$.

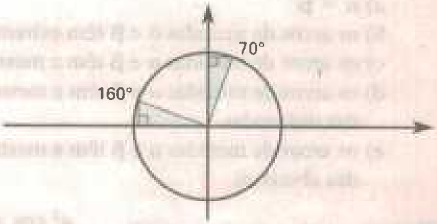
B.3 Obtenha o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } 2x + \cos 8x}{\text{sen}^2\, 3x}$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

B.4 Determine o sinal do produto $P = \text{sen } \dfrac{5\pi}{6} \cdot \cos \dfrac{5\pi}{4} \cdot \text{sen } \dfrac{5\pi}{3} \cdot \text{sen } \dfrac{2\pi}{3}$.

B.5 Sendo $180° < \alpha < \beta < 270°$, assinale a afirmação verdadeira:

a) $\text{sen } \alpha \cos \beta < 0$
b) $\text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$
c) $\cos \alpha > \cos \beta$
d) $\text{sen } \alpha = \cos \beta$
e) $\cos \alpha \cos \beta < 0$

B.6 Calcule o valor da expressão $E = \cos 160° + \text{sen } 70°$.
(**Sugestão:** observe que os triângulos destacados na figura são congruentes.)



B.7 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

Calcule:

a) sen 120°
b) cos 120°
c) sen 210°
d) cos 210°
e) sen 300°
f) cos 300°
g) sen 135°
h) cos135°
i) sen 225°
j) cos 225°
k) sen 315°
l) cos 315°

B.8 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) $\text{sen } \dfrac{5\pi}{6}$
b) $\cos \dfrac{5\pi}{6}$
c) $\text{sen } \dfrac{4\pi}{3}$
d) $\cos \dfrac{4\pi}{3}$
e) $\text{sen } \dfrac{11\pi}{6}$
f) $\cos \dfrac{11\pi}{6}$

[redacted] Determine o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } 330° + \cos^2 300°}{\text{sen } 200° + \cos 70° + \text{sen}^2\, 240°}$.

B.10 Qual é o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen}^2 \dfrac{2\pi}{3} + \cos \dfrac{5\pi}{3}}{\cos^4 \dfrac{5\pi}{6}}$?

Exercícios complementares

C.1 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } 450° - \cos 540°}{\text{sen } 990°}$.

C.2 Obtenha o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen } \dfrac{11\pi}{2} - \text{sen } \dfrac{9\pi}{2}}{\cos 48\pi - \cos 33\pi}$.

C.3 Qual é o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen}^2\, 960° + \cos 1\,380°}{\text{sen } 2\,010°}$?

C.4 Se sen α = sen β, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$

b) os arcos de medidas α e β têm extremidades simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

c) os arcos de medidas α e β têm a mesma extremidade.

d) os arcos de medidas α e β têm a mesma extremidade ou têm extremidades simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

e) os arcos de medidas α e β têm a mesma extremidade ou têm extremidades simétricas em relação ao eixo das abscissas.

C.5 Se cos α = cos β, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$

b) os arcos de medidas α e β têm extremidades simétricas em relação ao eixo das abscissas.

c) os arcos de medidas α e β têm a mesma extremidade.

d) os arcos de medidas α e β têm a mesma extremidade ou têm extremidades simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

e) os arcos de medidas α e β têm a mesma extremidade ou têm extremidades simétricas em relação ao eixo das abscissas.

C.6 Simplifique a expressão $E = \dfrac{a^2 \cos x + b^2 \cos 2x}{a \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} + b \operatorname{sen} \dfrac{5x}{2}}$, com $x = 60°$ e $a \neq b$.

C.7 A expressão $E = \dfrac{a^2 \operatorname{sen} x + 2ab \operatorname{sen} 5x + b^2 \cos 2x}{a \operatorname{sen} 2x + b \cos x}$, para $x = \dfrac{\pi}{6}$ e $a \neq -b$, é equivalente a:

a) $E = \dfrac{(a + b)\sqrt{3}}{3}$

b) $E = \dfrac{a + b}{3}$

c) $E = \dfrac{\sqrt{3}}{a + b}$

d) $E = 1$

e) $E = \dfrac{3(a + b)}{\sqrt{3}}$

Questões dos vestibulares

V.1 (Fesp-SP) A expressão $\dfrac{5 \cos 90° - 4 \cos 180°}{2 \operatorname{sen} 270° - 2 \operatorname{sen} 90°}$ vale:

a) $\dfrac{5}{2}$

b) -1

c) $\dfrac{9}{4}$

d) 1

e) n.d.a.

V.2 (Mapofei-SP) Simplificando $\dfrac{a^2 \cos 180° - (a - b)^2 \operatorname{sen} 270° + 2ab \cos 0°}{b^2 \operatorname{sen} 90°}$, com $b \neq 0$, obtém-se:

a) 0

b) 1

c) -1

d) $\dfrac{1}{2}$

e) n.d.a.

V.3 (UFRS) No círculo trigonométrico da figura ao lado, tem-se $\alpha = 120°$. O valor de $OA \cdot OB$ é:

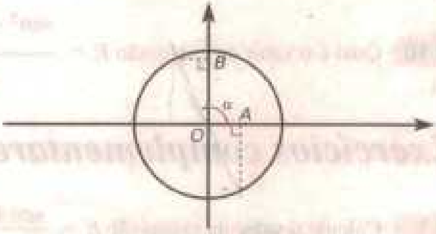
a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$



V.4 (Fatec-SP) O valor numérico de D, onde $D = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para $x = \dfrac{2\pi}{3}$, é:

a) 1

b) $\dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{6 - 5\sqrt{3}}{6}$

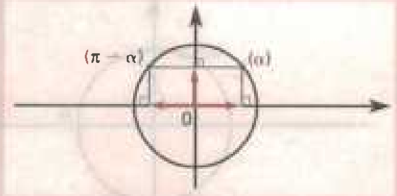
e) $\dfrac{6 + 5\sqrt{3}}{6}$

Capítulo 54

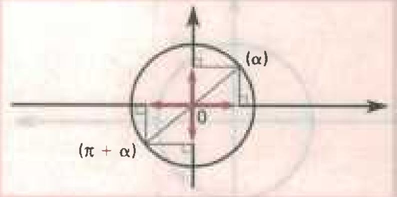
Redução ao 1º quadrante (generalização)

1. Arcos de medidas $\alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$

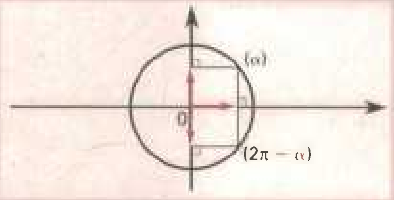
Dado um arco de medida α, com extremidade no 1º quadrante, temos:



- $\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$
- $\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\,\alpha$



- $\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
- $\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\,\alpha$



- $\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
- $\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\,\alpha$

Se α for uma medida em graus, então essas relações devem ser expressas como:

- $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$;
- $\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\,\alpha$;
- $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$;
- $\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\,\alpha$;
- $\text{sen}\,(360° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$;
- $\cos\,(360° - \alpha) = \cos\,\alpha$.

Nota

Mesmo que a extremidade do arco de medida α não seja ponto do 1º quadrante, as relações anteriores continuam verdadeiras. Verifique!

Exercício resolvido

R.1 Simplificar a expressão $E = \dfrac{\text{sen}\,(180° - \alpha) - \text{sen}\,(180° + \alpha)}{\text{sen}\,(360° - \alpha)}$, com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$

Resolução

Sabemos que $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ e $\text{sen}\,(360° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$.

Assim, temos $E = \dfrac{\text{sen}\,\alpha - (-\text{sen}\,\alpha)}{-\text{sen}\,\alpha}$ $\therefore$ $E = \dfrac{2\,\cancel{\text{sen}\,\alpha}}{-\cancel{\text{sen}\,\alpha}}$ $\therefore$ $E = -2$.

R.2 Simplificar a expressão $E = \dfrac{8\cos(\pi - x) + 6\cos(\pi + x)}{4\cos(2\pi - x)}$.

Resolução

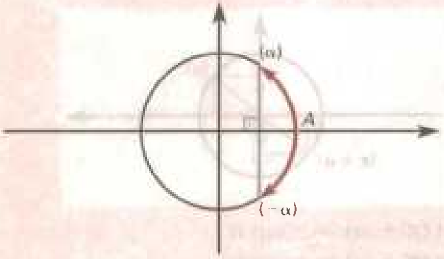
Sabemos que $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ e $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

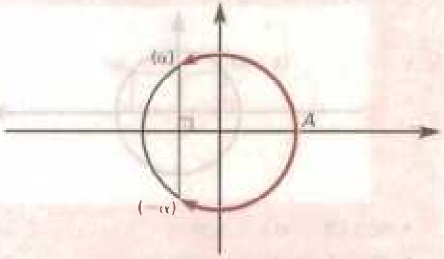
Logo, temos $E = \dfrac{8(-\cos x) + 6(-\cos x)}{4\cos x} = \dfrac{-8\cos x - 6\cos x}{4\cos x}$

$$\therefore\ E = \frac{-14\cancel{\cos x}}{4\cancel{\cos x}}\quad \therefore\ E = -\frac{\cancel{14}}{\cancel{4}}\quad \therefore\ E = -\frac{7}{2}.$$

2. Arcos de medidas opostas (α e −α)

Dois arcos de medidas opostas (α e −α) têm extremidades simétricas em relação ao eixo dos co-senos. Observe





Note que as extremidades de arcos de medidas opostas têm ordenadas opostas e abscissas iguais, isto é

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \ \text{ e } \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular sen (−30°) e cos (−45°).

Resolução

Sabemos que $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Logo, temos $\text{sen}(-30°) = -\text{sen}\,30° = -\dfrac{1}{2}$ e $\cos(-45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

R.4 Calcular sen (−210°) e cos (−300°).

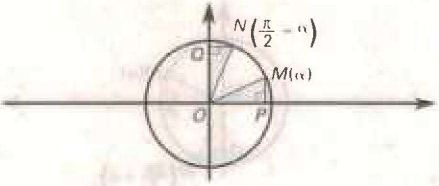
Resolução

$$\text{sen}(-210°) = -\text{sen}\,210° = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } \cos(-300°) = \cos 300° = \frac{1}{2}.$$

3. Arcos de medidas α, $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ e $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$

Consideremos um arco de medida α, com extremidade no 1º quadrante. Vamos estudar as relações existentes entre o seno e co-seno de α com o seno e o co-seno de cada um dos arcos, $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$ e $\dfrac{3\pi}{2} + \alpha$.

3.1. Medidas α e $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$


$N\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
Q
$M(\alpha)$
O
P

Os triângulos *OMP* e *ONQ* são congruentes. Logo, temos:

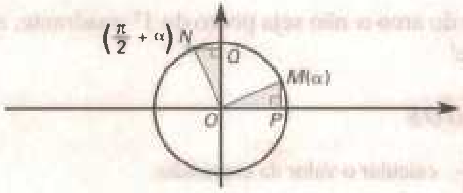
I. a ordenada de *N* é igual à abscissa de *M*, isto é:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

II. a abscissa de *N* é igual à ordenada de *M*, isto é:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha.$$

3.2. Medidas α e $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$


$\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) N$
Q
$M(\alpha)$
O
P

Os triângulos *OMP* e *ONQ* são congruentes. Logo, temos:

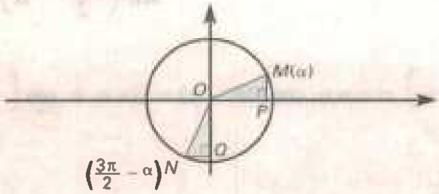
I. a ordenada de *N* é igual à abscissa de *M*, isto é:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha.$$

II. a abscissa de *N* é o oposto da ordenada de *M*, isto é:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha.$$

3.3. Medidas α e $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$


O
$M(\alpha)$
P
Q
$\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) N$

Os triângulos *OMP* e *ONQ* são congruentes. Logo, temos:

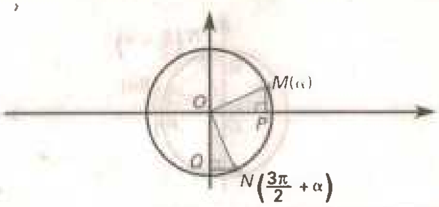
I. a ordenada de *N* é o oposto da abscissa de *M*, isto é:

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

II. a abscissa de *N* é o oposto da ordenada de *M*, isto é:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha.$$

3.4. Medidas α e $\dfrac{3\pi}{2} + \alpha$



Os triângulos *OMP* e *ONQ* são congruentes. Logo, temos:

I. a ordenada de *N* é o oposto da abscissa de *M*, isto é:

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

II. a abscissa de *N* é igual à ordenada de *M*, isto é:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha.$$

Nota

Mesmo que a extremidade do arco α não seja ponto do 1º quadrante, as oito relações anteriores continuam verdadeiras. Verifique!

Exercícios resolvidos

R.5 Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, calcular o valor da expressão:

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

Resolução

Sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$ e $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$.

Assim, temos $E = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha \;\therefore\; E = 2\,\text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$.

R.6 Simplificar a expressão, com $\cos\alpha \neq 0$: $E = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\,(2\pi - \alpha)}{\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

Resolução

Sabemos que: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ e $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

Assim, temos:

$$E = \frac{\cos\alpha + \cos\alpha}{(-\cos\alpha)^2} \;\therefore\; E = \frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha} \;\therefore\; E = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7 (a, b), C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7 (c, d), C.1, C.2, C.4.

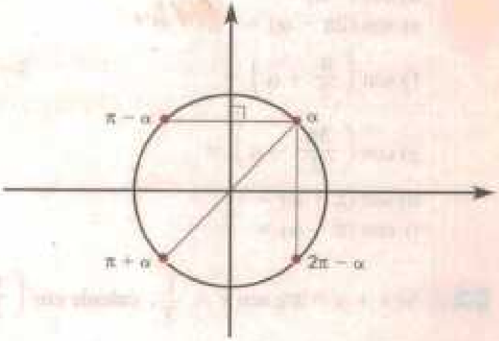
Exercícios básicos

B.1 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\cos(360° - \alpha) - \cos(180° + \alpha)}{\cos\alpha - \cos(180° - \alpha)}$, com $\cos\alpha \neq 0$.

B.2 Sendo $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$, calcule $E = \dfrac{\cos(180° + \alpha) + \cos(360° - \alpha) + \operatorname{sen}(180° - \alpha)}{\operatorname{sen}^2(180° + \alpha)}$.

B.3 Observe a figura e assinale V ou F:

a) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
b) $\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$
c) $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
d) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
e) $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
f) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$



B.4 Simplifique a expressão $E = \dfrac{3\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{5\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)}$, com $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$.

B.5 Calcule:

a) $\operatorname{sen}(-45°)$
b) $\cos(-60°)$
c) $\operatorname{sen}(-240°)$
d) $\cos(-330°)$
e) $\operatorname{sen}(-960°)$
f) $\cos(-1200°)$

B.6 Calcule:

a) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$
b) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$
c) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$
d) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$

B.7 Simplifique cada uma das expressões:

a) $E = \dfrac{\cos(\pi + x) + \cos(-x) + \cos(\pi - x)}{\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(\pi - x) + \cos x}$, com $\cos x \neq 0$.

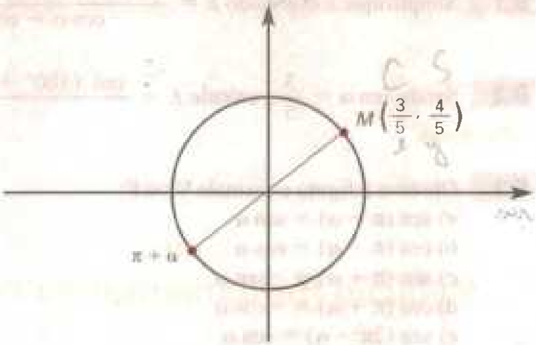
b) $E = \dfrac{\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$, com $\operatorname{sen} x \neq 0$.

c) $E = \dfrac{\operatorname{sen}(180° - x) + \cos(90° - x)}{\cos(270° + x)}$, com $\cos x \neq 0$.

d) $E = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos(\pi + x)}{1 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}$, com $\cos x \neq 1$.

Exercícios complementares

C.1 Observando a circunferência trigonométrica ao lado, complete as igualdades:



a) sen α =
b) cos α =
c) sen $(\pi - \alpha)$ =
d) cos $(-\alpha)$ =
e) sen $(2\pi - \alpha)$ =
f) sen $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ =
g) cos $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ =
h) sen $(\pi + \alpha)$ =
i) cos $(\pi - \alpha)$ =

C.2 Se $x + y = \pi$ e sen $x = \frac{1}{3}$, calcule cos $\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$.

C.3 Obedecidas as condições de existência, simplifique a expressão:

$$E = \frac{(a+b)^2 \operatorname{sen}(\pi - x) - 2ab \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{a^2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - b^2 \operatorname{sen}(-x)}.$$

C.4 Obedecidas as condições de existência, simplifique a expressão:

$$E = \frac{\operatorname{sen}\frac{9\pi}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)}{2 \operatorname{sen}(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}.$$

Questões dos vestibulares

V.1 (FEI-SP) Se cos $x = \frac{3}{5}$, então sen $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{5}$ e) n.d.a.

V.2 (Mackenzie-SP) Se $x = \frac{\pi}{5}$, então o valor de $2 \cos \pi \operatorname{sen}(\pi - x) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ é igual a:

a) $2 \cos \frac{\pi}{5}$ c) $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$ e) n.d.a.
b) $-\cos \frac{\pi}{5}$ d) $-2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$

V.3 (Cesgranrio) Se sen $\alpha = \frac{1}{3}$, então o valor de sen $(25\pi + \alpha)$ − sen $(88\pi - \alpha)$ é:

a) 0 b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

Capítulo 55

Relação entre o seno e o co-seno de um mesmo arco

1. Relação fundamental da trigonometria

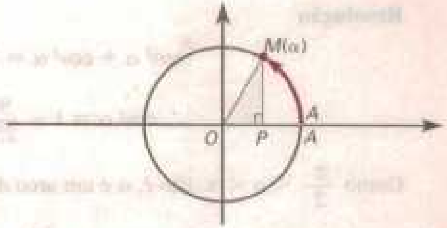
Dado um arco trigonométrico de medida α, tem-se: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

Demonstração

1º caso

Seja α a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OMP*, temos: $(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$. Mas sabemos que: $MP = \text{sen } \alpha$, $OP = \cos \alpha$ e $OM = 1$ (raio).



Logo, temos: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

2º caso

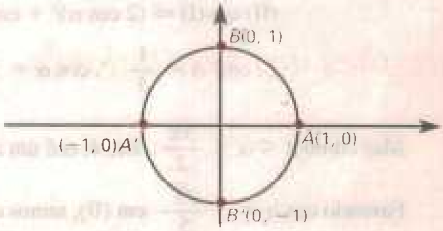
Seja α a medida de um arco com extremidade num dos pontos *A*, *B*, *A'* ou *B'*.

No ponto *A*, $1^2 + 0^2 = 1$.

No ponto *B*, $0^2 + 1^2 = 1$.

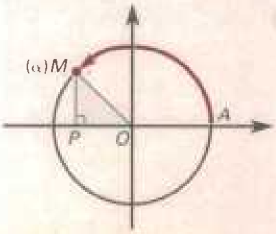
No ponto *A*, $(-1)^2 + 0^2 = 1$.

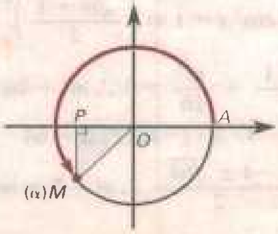
No ponto *B'*, $0^2 + (-1)^2 = 1$.

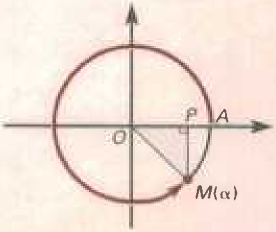


3º caso

Seja α a medida de um arco com extremidade no 2º, no 3º ou no 4º quadrante.







Aplicando o teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos hachurados, temos que:

$$(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2.$$

Em cada um dos triângulos, podemos escrever: $MP = |\text{sen}\ \alpha|$, $OP = |\cos \alpha|$ e $OM = 1$ (raio).

Assim, $|\text{sen}\ \alpha|^2 + |\cos \alpha|^2 = 1^2$.

Lembrando a propriedade do módulo de um número real: $|x|^2 = x^2$, temos, finalmente:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

1.1. Conseqüências da relação fundamental

Da relação fundamental: $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, obtemos as relações:

$$\text{sen}^2\ \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{e} \quad \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2\ \alpha.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular o valor do $\cos \alpha$.

Resolução

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \therefore \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \therefore \cos \alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, isto é, α é um arco do 2º quadrante, temos que: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

R.2 Sendo $\text{sen}\ \alpha = 2 \cos \alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determinar os valores de $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha$.

Resolução $\begin{cases} \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \textbf{(I)} \\ \text{sen}\ \alpha = 2 \cos \alpha. & \textbf{(II)} \end{cases}$

$$\text{(II) em (I)} \Rightarrow (2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \therefore 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \therefore 5 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \therefore \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \therefore \cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Mas como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, isto é, α é um arco do 3º quadrante, temos que: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Fazendo $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ em (II), temos que: $\text{sen}\ \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

R.3 Determinar m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{m+1}}{2}$ e $\cos x = \frac{m}{4}$.

Resolução

$$\text{sen}^2\ x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{m+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{4}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{m+1}{4} + \frac{m^2}{16} = 1 \therefore m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) \therefore \Delta = 64$$

$$\therefore m = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} \therefore m = 2 \text{ ou } m = -6.$$

Note que $m = -6$ não convém ao problema, pois, sendo sen x um número real, teríamos o absurdo sen $x = \frac{\sqrt{-6+1}}{2}$.

Logo, $m = 2$.

R.4 Resolver a equação na variável x: $x^2 - 2x + \cos^2 \alpha = 0$.

Resolução

Na variável x, a equação é do 2º grau. Logo, temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \cos^2 \alpha$$
$$\therefore \Delta = 4 - 4\cos^2 \alpha \therefore \Delta = 4(1 - \cos^2 \alpha).$$

Sabemos que $1 - \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha$; então $\Delta = 4 \,\text{sen}^2 \alpha$

Logo, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4\text{sen}^2 \alpha}}{2} \therefore x = \frac{2 \pm 2 \,\text{sen}\, \alpha}{2} \therefore x = 1 \pm \text{sen}\, \alpha.$$

Então, $S = \{1 + \text{sen}\, \alpha, 1 - \text{sen}\, \alpha\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.6, B.8, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.5, B.7, B.9, B.10, B.11, C.2, C.3, C.5

Exercícios básicos

B.1 Sendo $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule o valor de sen α.

B.2 Calcule o valor de $\cos \alpha$, sabendo que $\text{sen}\, \alpha = -\frac{1}{3}$ e que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

B.3 Quais são os valores de sen x e cos x, sendo $\text{sen}\, x = -2\cos x$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$?

B.4 Obtenha m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que $\text{sen}\, x = \frac{m}{5}$ e $\cos x = \frac{m+1}{5}$.

B.5 Determine o valor de m de modo que $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{m}}{5}$ e $\cos x = \frac{2\sqrt{m}}{5}$.

B.6 Resolva a equação na variável x: $x^2 + 2x + \text{sen}^2 \alpha = 0$.

B.7 Simplifique a expressão, com $\cos x \neq 0$:

$$E = \frac{\text{sen}\, \frac{9\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos^2 x}$$

B.8 Determine o valor do cos x sabendo que $3\,\text{sen}^2 x - 4\,\text{sen}\, x + 1 = 0$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

B.9 Sabendo que $4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\, x - 5 = 0$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule o valor de sen x. (**Sugestão:** substitua $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$.)

B.10 Calcule o valor da expressão $E = \text{sen}^2\,10° + \text{sen}^2\,20° + \text{sen}^2\,30° + \text{sen}^2\,40° + \text{sen}^2\,50° + \text{sen}^2\,60° + \text{sen}^2\,70° + \text{sen}^2\,80°$.

B.11 Obtenha o valor da expressão $E = \dfrac{\text{sen}^2\,240° + \cos 300°}{\text{sen}^2\,10° + \cos^2 350°}$.

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $\text{sen}\,x + \cos x = \dfrac{1}{3}$, calcule $\text{sen}\,x \cos x$.

C.2 Sabe-se que:

$$\begin{cases} \text{sen}\,x + \cos x = a \\ \text{sen}\,x \cos x = \dfrac{2a-2}{5}. \end{cases}$$

Determine a. (**Sugestão:** eleve ao quadrado ambos os membros da primeira igualdade.)

C.3 Dê o conjunto solução da equação do 2º grau em x:

$$x^2 + x\cos\alpha - \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{4} = 0.$$

C.4 As raízes da equação do 2º grau $x^2 + x + k + 1 = 0$ são $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$. Determine k. (**Sugestão:** a soma e o produto das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são, respectivamente, $S = -\dfrac{b}{a}$ e $P = \dfrac{c}{a}$.)

C.5 A expressão $E = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$, para $\cos x \neq 1$, é equivalente a:

a) $E = 1 - \cos x$
b) $E = 1 + \cos x$
c) $E = 1$
d) $E = 1 + \text{sen}\,x$
e) $E = 1 - \text{sen}\,x$

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) A expressão $\dfrac{\text{sen}^3\,x + \cos^3 x}{\text{sen}\,x + \cos x}$, com $\text{sen}\,x \neq -\cos x$, é igual a:

a) 1
b) $\text{sen}\,x + \cos x$
c) $1 - \text{sen}\,x \cos x$
d) 2
e) $\dfrac{2}{\text{sen}\,x}$

V.2 (Fuvest-SP) Quais são as raízes da equação do 2º grau:

$$x^2\,\text{sen}\,\alpha - 2x\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha = 0, \text{ onde } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}?$$

a) $\dfrac{2(\cos\alpha + 1)}{\text{sen}\,\alpha}$ e $\dfrac{2(\cos\alpha - 1)}{\text{sen}\,\alpha}$
b) $\dfrac{\cos\alpha + 1}{\text{sen}\,\alpha}$ e $\dfrac{\cos\alpha - 1}{\text{sen}\,\alpha}$
c) $\cos\alpha + 1$ e $\cos\alpha - 1$
d) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + 1}{\cos\alpha}$ e $\dfrac{\text{sen}\,\alpha - 1}{\cos\alpha}$
e) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + 1}{2}$ e $\dfrac{\text{sen}\,\alpha - 1}{2}$

V.3 (PUC-RJ) Sabe-se que θ é a medida em graus de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. Se $\text{sen}\,\theta = \dfrac{k+1}{2}$, $\cos\theta = k$, e a hipotenusa do triângulo mede 20 cm, determine sua área.

Capítulo 56

Equações trigonométricas em seno ou co-seno

1. Conceituação de equação trigonométrica

Toda equação que apresenta a incógnita em um arco de uma razão trigonométrica (seno ou co-seno, por exemplo) é denominada **equação trigonométrica**.

Exemplos

a) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

b) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$

d) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 1$

2. Resolução de uma equação trigonométrica

Resolver uma equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ em um conjunto universo U significa determinar o conjunto de **todos** os valores α, $\alpha \in U$, tais que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

3. Equações imediatas em seno ou co-seno

Resolveremos, nesse item, equações do tipo:

$\operatorname{sen} x = k$ ou $\cos x = k$, em que k é uma constante real.

Exemplos

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ b) $\operatorname{sen} x = 5$ c) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lembremos que os valores máximo e mínimo do seno e do co-seno são respectivamente 1 e −1, ou seja:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \quad \text{e} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

Assim sendo, equações do tipo $\operatorname{sen} x = k$ ou $\cos x = k$, $k \in \mathbb{R}$, terão raiz se, e somente se:

$$-1 \leqslant k \leqslant 1.$$

Exemplo

A equação $\operatorname{sen} x = 5$ não possui raiz, pois não existe um arco x cujo seno seja igual a 5.

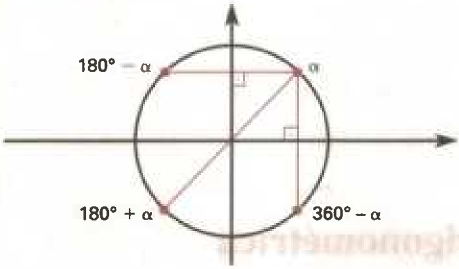
4. Método gráfico para a resolução de uma equação imediata

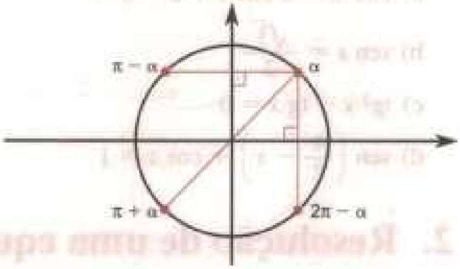
Existem vários métodos para a resolução de uma equação imediata. Optamos pelo método gráfico. Os requisitos para o entendimento desse método são:

I. tabela dos arcos notáveis:

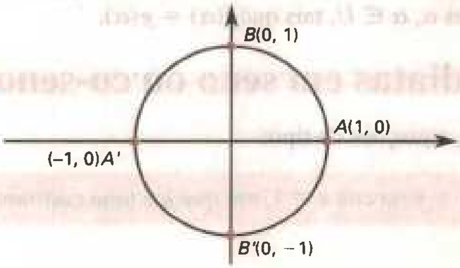
	30° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

II. simetrias:





III. coordenadas dos pontos A, B, A' e B':

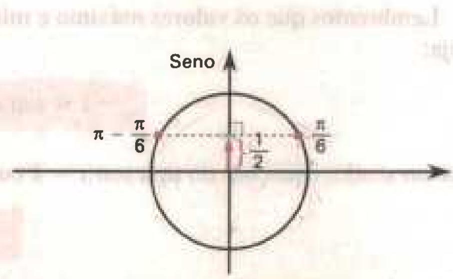


Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a equação sen $x = \frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada igual a $\frac{1}{2}$, conforme figura ao lado.



Os valores de x da primeira volta positiva para os quais sen $x = \frac{1}{2}$ são:

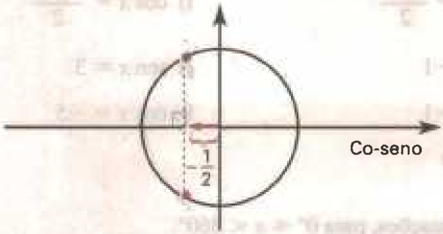
$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

R.2 Resolver a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

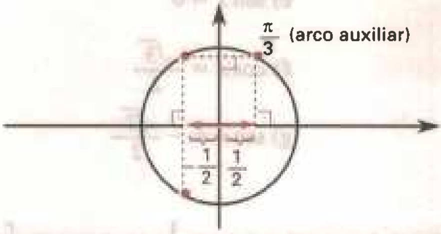
Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissa igual a $-\frac{1}{2}$:

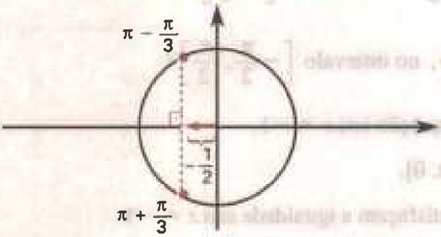


Observe que os pontos que possuem o co-seno igual a $-\frac{1}{2}$ pertencem ao 2º e 3º quadrante e, portanto, não estão na tabela dos arcos notáveis.

Para podermos utilizar a tabela, vamos buscar no 1º quadrante um **arco auxiliar**, isto é, o arco (da tabela) cujo co-seno é igual a $\frac{1}{2}$:



Finalmente, pelas simetrias, transportamos o **arco auxiliar** para o 2º e o 3º quadrante. Assim:



$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

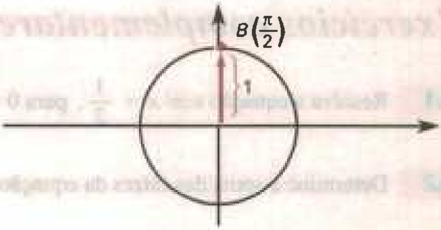
Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

R.3 Resolver a equação $\text{sen}\, x = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que possuem ordenada igual a 1, conforme figura ao lado. O único ponto da circunferência que tem ordenada 1 é o ponto B. Portanto:

$x = \frac{\pi}{2}$. Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

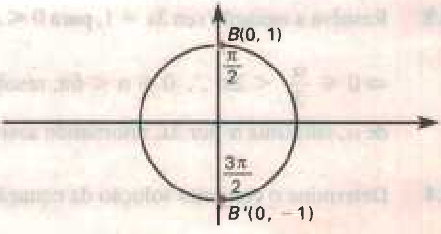


R.4 Resolver a equação $\cos x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência que têm abscissa igual a zero, conforme figura ao lado. Os pontos de abscissa zero são B e B'. Portanto:

$x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$. Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1(a até c), B.2 (a até c), B.3, B.4, C.1, C.2, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d até k), B.2 (d até j), B.5, B.6, B.7, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Resolva as equações para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\text{sen}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x = 1$

d) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{sen}\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\text{sen}\, x = -1$

g) $\cos x = -1$

h) $\text{sen}\, x = 0$

i) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\text{sen}\, x = 3$

k) $\cos x = -5$

B.2 Determine o conjunto solução de cada uma das equações, para $0° \leqslant x < 360°$.

a) $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen}\, x = 1$

d) $\cos x = 0$

e) $\text{sen}\, x = 0$

f) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{sen}\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos x = -1$

j) $\text{sen}\, x = -1$

B.3 **Obtenha o conjunto solução da equação sen** $x = \dfrac{1}{2}$, no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

B.4 Qual é o conjunto solução da equação $\cos x = \dfrac{1}{2}$, no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

B.5 Considerando o universo $U = [0, 4\pi]$, resolva a equação $\cos x = -1$.

B.6 Resolva a equação $\text{sen}\, x = -1$, no intervalo $[-2\pi, 0]$.

B.7 Dê o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, que satisfaçam a igualdade $\text{sen}\, x = -1$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva a equação $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.2 Determine a soma das raízes da equação $\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{9}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.3 Resolva a equação $\text{sen}\, 3x = 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** faça $3x = \alpha \;\therefore\; x = \dfrac{\alpha}{3}$, assim $0 \leqslant x < 2\pi \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{\alpha}{3} < 2\pi \;\therefore\; 0 \leqslant \alpha < 6\pi$; resolva a equação $\text{sen}\, \alpha = 1$, para $0 \leqslant \alpha < 6\pi$; encontrados os valores de α, substitua α por $3x$, retornando assim à variável original.)

C.4 Determine o conjunto solução da equação $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \dfrac{\pi}{7}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.5 Obtenha o conjunto solução da equação $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{7}$, no universo $U = [0, 2\pi[$.

C.6 Resolva a equação $\text{sen}\, x = \cos x$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** procure na circunferência trigonométrica os pontos que têm abscissa e ordenada iguais.)

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) O menor valor positivo de x, para o qual $9^{-\cos x} = \frac{1}{3}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

V.2 (Cescea-SP) A soma das raízes da equação $1 - 4\cos^2 x = 0$, compreendidas entre 0 e π, é:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{6}$

V.3 (UnB-DF) A soma das raízes da equação $\operatorname{sen} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, para $0 \leq x < 2\pi$, é:

a) π b) 2π c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{6}$

V.4 (Cesgranrio) O número de raízes da equação $\cos x + \operatorname{sen} x = 0$ no intervalo $[\pi, 3\pi]$ é:

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4 e) 0

Capítulo 57

Equações na forma fatorada

1. Propriedade do produto nulo

Sendo a e b dois números reais, tem-se: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Essa propriedade é muito útil nas resoluções de equações na forma fatorada, como veremos a seguir.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a equação $(2 \text{ sen}^2 x - 1)(4 \cos x - 2) = 0$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

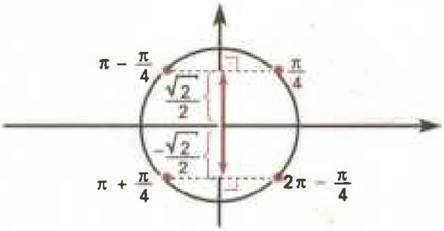
Resolução

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$$2 \text{ sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad 4 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

Resolvendo as equações imediatas anteriores, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:

- $\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$


$\pi - \frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi + \frac{\pi}{4}$
$2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore$

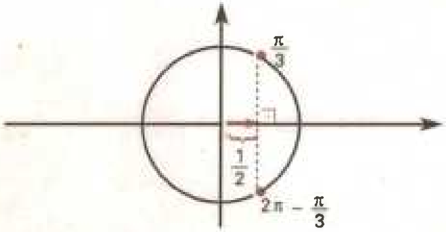
$x = \frac{\pi}{4}$

ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

- ou $\cos x = \frac{1}{2}$


$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$
$2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\therefore$

$x = \frac{\pi}{3}$

ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

R.2 Resolver a equação $2 \cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

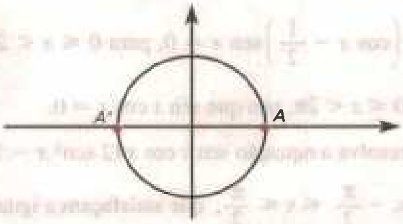
Resolução

Fatorando o primeiro membro da igualdade pelo caso do fator comum, temos que: $\operatorname{sen} x\,(2 \cos x - 1) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, temos: $\operatorname{sen} x = 0$ ou $2 \cos x - 1 = 0$.

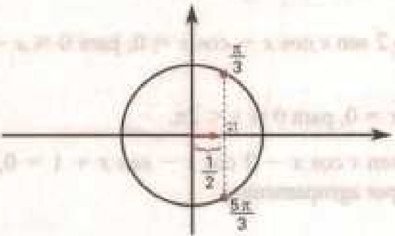
Isto é:

- $\operatorname{sen} x = 0$



$\therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$

- ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$



$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$.

Logo, $S = \left\{0, \pi, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

R.3 Resolver a equação $\cos x \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

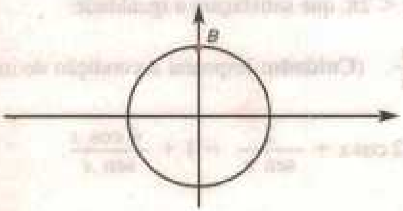
Fatorando o primeiro membro da igualdade pelo caso do agrupamento, temos que:

$$\cos x\,(\operatorname{sen} x - 1) + (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \quad \therefore \quad (\operatorname{sen} x - 1)(\cos x + 1) = 0.$$

Pela propriedade do produto nulo, temos: $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ ou $\cos x + 1 = 0$.

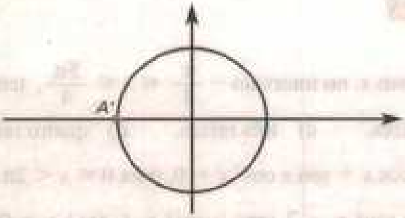
Isto é:

- $\operatorname{sen} x = 1$



$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{2}$

- ou $\cos x = -1$



$\therefore\ x = \pi$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.8, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5, B.6, B.7, C.2, C,3, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Resolva a equação $(8 \operatorname{sen}^3 x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.2 Determine o conjunto solução da equação:

$$(\operatorname{sen}^2 x - 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} x = 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi.$$

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, tais que $\operatorname{sen} x \cos x = 0$.

B.4 Considerando o universo $U = [0, \pi]$, resolva a equação $\operatorname{sen} x \cos x (2 \operatorname{sen}^2 x - 1) = 0$.

B.5 Determine o conjunto dos valores de x, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, que satisfaçam a igualdade $\operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen}^2 x - 9) = 0$.

B.6 Qual é o conjunto solução da equação $2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$? (**Sugestão:** fatore o primeiro membro da igualdade.)

B.7 Resolva a equação $\operatorname{sen}^2 x \cos x - \cos x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.8 Dê o conjunto solução da equação $2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos x - \operatorname{sen} x + 1 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi[$. (**Sugestão:** fatore o primeiro membro por agrupamento.)

Exercícios complementares

C.1 Resolva a equação $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$, para $0 \leq x < 2\pi$. (**Cuidado: não divida** os dois membros da igualdade por $\operatorname{sen} x$.)

C.2 Determine o conjunto solução da equação $\cos x (2 \operatorname{sen} x + 3) = 2 \cos x$, para $0 \leq x < 2\pi$. (**Cuidado: não divida** os dois membros da igualdade por $\cos x$.)

C.3 Obtenha, no universo $U = [0, 2\pi[$, o conjunto solução da equação $\operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x - \cos x + 2 = 0$.

C.4 Dê o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade:

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$ (**Cuidado:** imponha a condição de existência $\cos x \neq 0$.)

C.5 Resolva, para $0 \leq x < 2\pi$, a equação $2 \cos x + \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 1 + \frac{4 \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (FEI-SP) A equação $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$, no intervalo $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$, tem:

a) nenhuma raiz.
b) duas raízes.
c) três raízes.
d) quatro raízes.
e) cinco raízes.

V.2 (Faap-SP) Resolva a equação $\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos^3 x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

V.3 (Cescem-SP) Resolvendo a equação $\operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$, tem-se como conjunto solução:

a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$
b) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
e) $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Capítulo 58

Resolução de equações trigonométricas através de equações polinomiais

1. Equação polinomial

Equação polinomial é toda equação que pode ser escrita como um polinômio igualado a zero.

Exemplos

a) $5t^2 - 4t - 1 = 0$ (equação do 2º grau). b) $6t^3 - 2t^2 - 4t = 0$ (equação do 3º grau).

Certas equações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma equação polinomial, bastando para isso uma mudança de variável. Observe os exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a equação $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x - 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

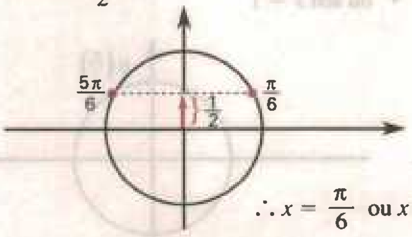
Fazendo $\text{sen}\,x = t$, temos a equação do 2º grau:

$$2t^2 + t - 1 = 0 \therefore \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2(-1) \therefore \Delta = 9 \therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -1.$$

Como $\text{sen}\,x = t$, temos $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\,x = -1$.

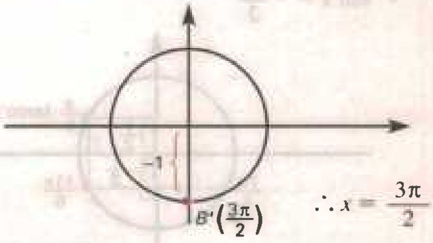
Resolvendo as equações imediatas anteriores, na primeira volta positiva, temos:

- $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$



$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

- ou $\text{sen}\,x = -1$



$\therefore x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

R.2 Resolver a equação $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 3\cos x = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Fazendo $\cos x = t$:

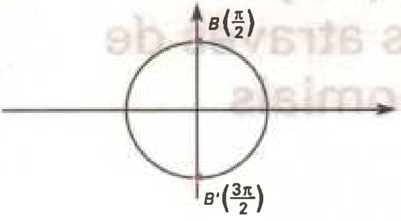
$$2t^3 - 7t^2 + 3t = 0 \Rightarrow t(2t^2 - 7t + 3) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ ou } 2t^2 - 7t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 3.$$

Como $\cos x = t$, temos $\cos x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 3$.

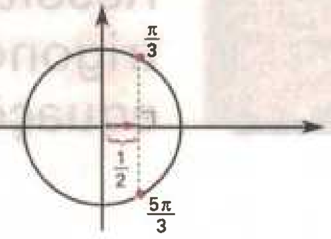
Resolvendo as equações imediatas anteriores, na primeira volta positiva, temos:

- $\cos x = 0$
- ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$



$B\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$B'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$



$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

- ou $\cos x = 3 \Rightarrow \nexists x$, pois o maior valor do co-seno é 1.

Logo, $S = \left\{ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3} \right\}$.

R.3 Resolver a equação $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Quando uma equação apresenta seno e co-seno, um recurso muito útil é usar uma das identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ ou } \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

para transformar a equação noutra equivalente, que apresente somente seno ou co-seno.
Na equação proposta pelo exercício vamos substituir $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$.
Temos, então:

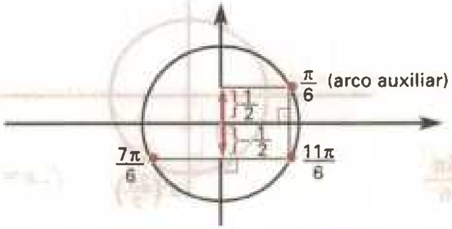
$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \therefore 2 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \therefore -2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

Fazendo $\operatorname{sen} x = t$, temos $-2t^2 + t + 1 = 0 \therefore t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2}$ ou $t = 1$.

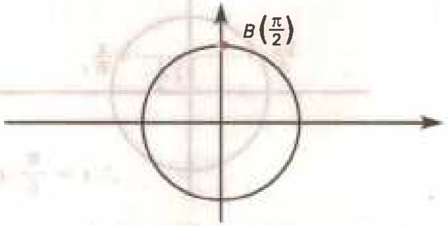
Assim, $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x = 1$.

Resolvendo as equações imediatas anteriores, na primeira volta positiva, temos:

- $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$
- ou $\operatorname{sen} x = 1$



$\therefore x = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$



$\therefore x = \dfrac{\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{ \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.8, C.1, C.3, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7, B.9, C.2, C.4, C.5, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Resolva a equação $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x - 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

B.2 Determine o conjunto solução da equação $2\,\text{sen}^3 x - \text{sen}^2 x - \text{sen}\,x = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

B.3 Obtenha os valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $2\cos^2 x + 3\,\text{sen}\,x - 3 = 0$.

B.4 Resolva a equação $2\,\text{sen}^2 x - 3\cos x = 0$, no universo $U = [0, 2\pi[$.

B.5 Qual é o conjunto solução da equação $\text{sen}^3 x + \cos^2 x - 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$?

B.6 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1$.

B.7 Sendo $0 < x < \pi$, determine o conjunto solução da equação $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = 0$.

B.8 Dê o conjunto solução da equação $2\,\text{sen}^2 x - 1 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi]$.

B.9 Resolva a equação $2\cos^2 x - 1 = 0$, para $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva a equação $2\,\text{sen}^4 x + \text{sen}^2 x - 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** faça $\text{sen}^2 x = y$.)

C.2 Determine, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução da equação $3\,\text{sen}^2 x + 2 = 3 - \cos^4 x$.

C.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $8\,\text{sen}^6 x - 7\,\text{sen}^3 x - 1 = 0$. (**Sugestão:** faça $\text{sen}^3 x = y$.)

C.4 Resolva a equação $2\cos^3 x - 6\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi[$.

C.5 Qual é o conjunto solução da equação $5\,\text{sen}^4 x - \cos^4 x = 5$, para $0 \leqslant x < 2\pi$? (**Sugestão:** $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \text{sen}^2 x)^2$.)

C.6 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação $\text{sen}^2 x - (1 + \sqrt{2})\,\text{sen}\,x + \sqrt{2} = 0$.
(**Sugestão:** a soma e o produto das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são, respectivamente, $S = -\dfrac{b}{a}$ e $P = \dfrac{c}{a}$.)

C.7 Resolva a equação $2\,\text{sen}^2 x + |\text{sen}\,x| - 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** $\text{sen}^2 x = |\text{sen}\,x|^2$.)

C.8 Obtenha o conjunto solução da equação $\cos^2 x + 2\,|\cos x| = 5 - 2\cos x$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

$$\left(\textbf{Sugestão: } |\cos x| = \begin{cases} \cos x, \text{ se } \cos x \geqslant 0 \\ -\cos x, \text{ se } \cos x \leqslant 0. \end{cases}\right)$$

Questões dos vestibulares

V.1 (Faap-SP) Determine x, $0 \leqslant x < 2\pi$, tal que $4\,\text{sen}^4 x - 11\,\text{sen}^2 x + 6 = 0$.

V.2 (FGV-SP) A solução da equação $\dfrac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1$, para $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$, é:

a) $x = 0$
b) $x = \dfrac{\pi}{6}$
c) $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{6}$.
d) $x = \dfrac{\pi}{3}$
e) $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$.

V.3 (Fuvest-SP) O número de raízes da equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$, é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) infinito.

Capítulo 59

Inequações trigonométricas em seno ou co-seno

1. Inequações imediatas em seno ou co-seno

Inequações do tipo:

$\operatorname{sen} x > k$; $\operatorname{sen} x \geqslant k$; $\operatorname{sen} x < k$; $\operatorname{sen} x \leqslant k$; $\operatorname{sen} x \neq k$;
$\cos x > k$; $\cos x \geqslant k$; $\cos x < k$; $\cos x \leqslant k$; $\cos x \neq k$.

em que k é uma constante real, são denominadas inequações imediatas.

Exemplos

a) $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{1}{2}$

b) $\cos x < \frac{1}{2}$

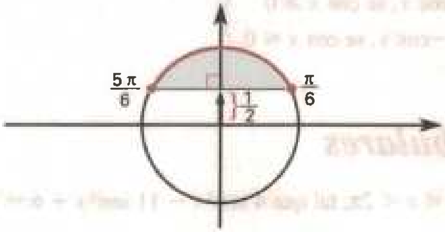
1.1. Método gráfico para a resolução de uma inequação imediata

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenadas maiores ou iguais a $\frac{1}{2}$:



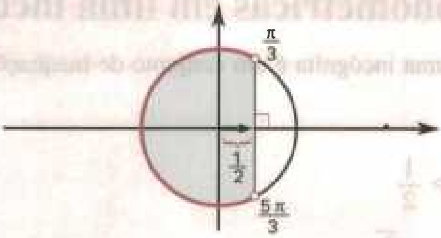
Os pontos que possuem ordenada $\frac{1}{2}$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, e os que têm ordenadas maiores do que $\frac{1}{2}$ são todos entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$.

R.2 Resolver a inequação $\cos x < \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Os pontos que têm o co-seno menor que $\frac{1}{2}$, isto é, abscissa menor que $\frac{1}{2}$, são todos entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, isto é:

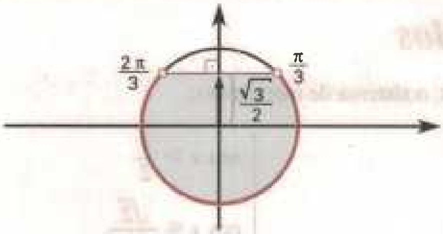


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

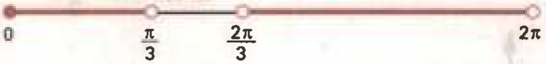
R.3 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenadas menores que $\frac{\sqrt{3}}{2}$:



A maior dificuldade dessa resolução é a maneira de se dar a resposta. Para entender o porquê da forma da resposta, vamos "esticar" (retificar) a circunferência:



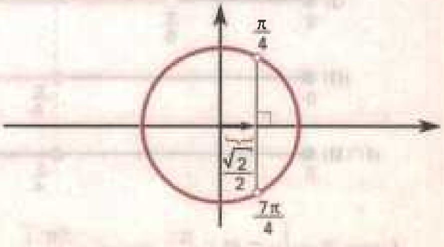
Dessa maneira, percebemos que o conjunto solução é a reunião de **dois** intervalos, ou seja: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

R.4 Resolver a inequação $\cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissas diferentes de $\frac{\sqrt{2}}{2}$:



O conjunto solução é formado por todos os valores da primeira volta positiva, exceto $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$, ou seja:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{4} \text{ e } x \neq \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

2. Sistema de inequações trigonométricas em uma incógnita

Um sistema de inequações trigonométricas em uma incógnita é um conjunto de inequações simultâneas.

Exemplo

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Resolver um sistema de inequações significa encontrar o conjunto dos valores da incógnita que satisfaçam todas as inequações do sistema, simultaneamente.

Exercícios resolvidos

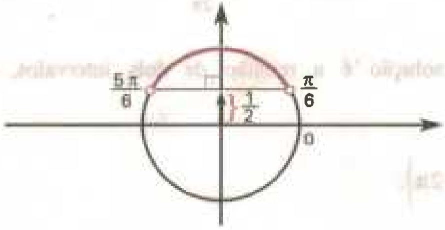
R.5 Resolver para $0 \leqslant x < 2\pi$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

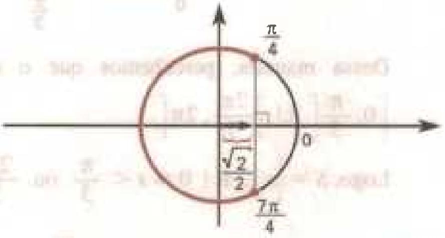
Resolução

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

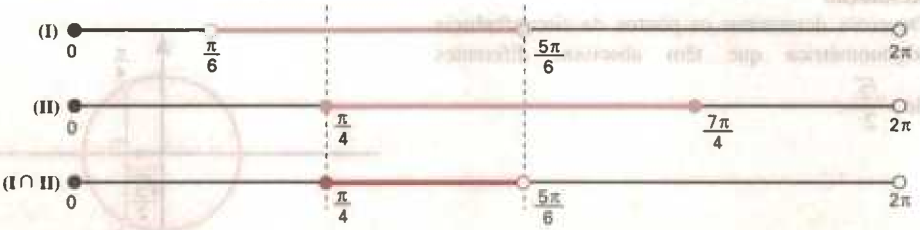
I. $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$


$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
0

II. $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$


$\frac{\pi}{4}$
0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$

O conjunto solução do sistema é a intersecção das soluções de (I) e (II). Retificando as circunferências, temos:


(I)
0
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{6}$
2π
(II)
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
2π
(I ∩ II)
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
2π

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}\right\}$.

R.6 Resolver a inequação $|\cos x| < \frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

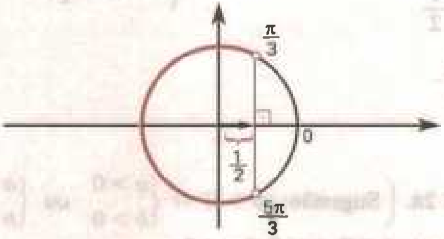
Recordemos a propriedade M.9 dos módulos: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,\ \forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$.

Através dessa propriedade, temos $|\cos x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$.

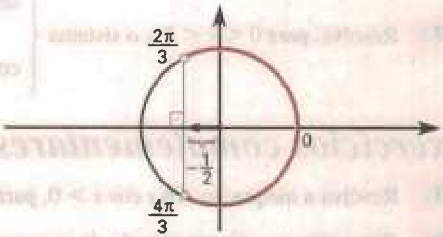
Essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema: $\begin{cases} \cos x < \frac{1}{2} \\ \cos x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

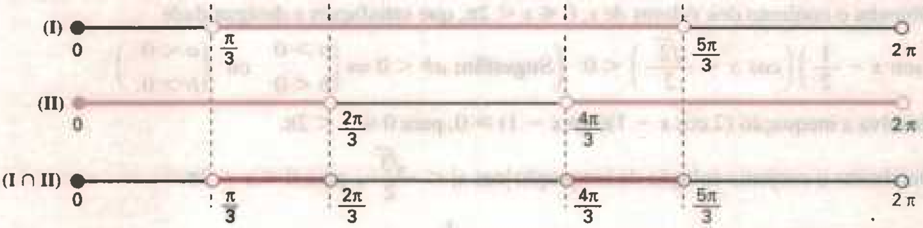
I. $\cos x < \frac{1}{2}$



II. $\cos x > -\frac{1}{2}$



O conjunto solução do sistema é a intersecção das soluções de (I) e (II). Retificando as circunferências, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até e), B.2, B.4, B.5, B.6, C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (f até m), B.3, B.7, C.2, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Resolva as seguintes inequações, para $0 \leq x < 2\pi$:

a) $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\operatorname{sen} x \leq -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen} x > 0$

d) $\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$

e) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos x \leq 0$

h) $\cos x > 0$

i) $\operatorname{sen} x \geq 1$

j) $\cos x < 1$

k) $\cos x > 1$

l) $\operatorname{sen} x \neq 1$

m) $\cos x \neq \frac{1}{2}$

B.2 Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e sen } x > \frac{1}{2}\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e } \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, determine $A \cap B$.

B.3 Dados os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e sen } x < \frac{1}{2}\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi \text{ e } \cos x > \frac{1}{2}\right\}$, determine $A \cap B$.

B.4 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o sistema $\begin{cases} \text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

B.5 Determine, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução do sistema $\begin{cases} \text{sen } x > 0 \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$

B.6 Determine o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam o sistema $\begin{cases} \text{sen } x < \frac{1}{2} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

B.7 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o sistema $\begin{cases} \text{sen } x > -\frac{1}{2} \\ \cos x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Exercícios complementares

C.1 Resolva a inequação sen $x \cos x > 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. $\left(\textbf{Sugestão: } ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0. \end{cases}\right)$

C.2 Determine o conjunto solução da inequação $2 \text{ sen } x \cos x \leqslant 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam a desigualdade

$\left(\text{sen } x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$. $\left(\textbf{Sugestão: } ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0. \end{cases}\right)$

C.4 Resolva a inequação $(2 \cos x - 1)(\text{sen } x - 1) \geqslant 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.5 Determine o conjunto solução da inequação $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.6 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a inequação $|\text{sen } x| \leqslant \frac{1}{2}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Facta) Se $|\cos x| < \frac{1}{2}$ e $0 < x < \pi$, então:

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ b) $0 < x < \frac{\pi}{3}$ c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

V.2 (Mackenzie-SP) Resolvendo o sistema $\begin{cases} \text{sen } x \geqslant 0 \\ \cos x < \frac{1}{2}, \end{cases}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$, obtém-se:

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \pi$ c) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi$ e) $\frac{\pi}{3} < x \leqslant \pi$

V.3 (Cescem-SP) Se $0 \leqslant a < 2\pi$ e, para todo x, $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $x^2 + x + \text{sen } a - \frac{1}{4} > 0$, então:

a) $\frac{\pi}{4} < a < \frac{3\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{3} < a < \frac{2\pi}{3}$

c) $0 \leqslant a < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < a < 2\pi$

d) $\frac{\pi}{6} < a < \frac{5\pi}{6}$

e) $0 \leqslant a < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant a < \frac{3\pi}{2}$

Capítulo 60

Resolução de inequações trigonométricas através de inequações polinomiais

1. Inequação polinomial

Chama-se "**inequação polinomial** na incógnita x" toda inequação que pode ser colocada em uma das formas $P(x) > 0$, $P(x) \geqslant 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leqslant 0$, $P(x) \neq 0$, em que $P(x)$ é um polinômio.

Exemplos

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$ (inequação do 2º grau). b) $x^3 - 4x^2 + 3x \leqslant 0$ (inequação do 3º grau).

Certas inequações trigonométricas podem ser resolvidas através de inequações polinomiais auxiliares, bastando para isso uma mudança de variável. Resolveremos algumas, como modelos.

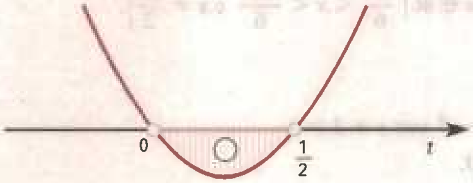
Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a inequação $2\cos^2 x - \cos x < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

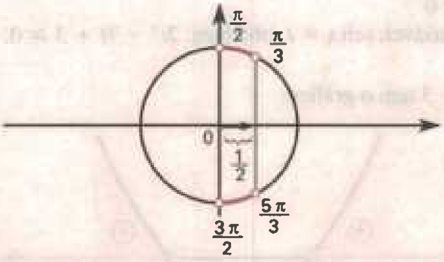
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, temos: $2t^2 - t < 0$.

A função $f(t) = 2t^2 - t$ tem o gráfico:



Observe que $f(t) < 0$ para $0 < t < \frac{1}{2}$.

Logo, $0 < \cos x < \frac{1}{2}$.



Temos então como conjunto solução $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

R.2 Obter, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução da inequação: $2\cos^2 x + 3\,\text{sen}\,x - 3 > 0$.

Resolução

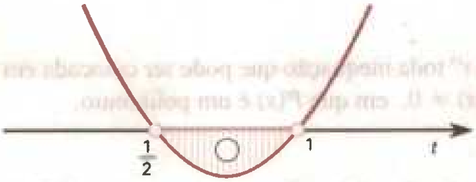
Lembrando que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\,x$, podemos escrever a inequação na forma:

$$2(1 - \text{sen}^2\,x) + 3\,\text{sen}\,x - 3 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - 2\,\text{sen}^2\,x + 3\,\text{sen}\,x - 3 > 0 \therefore -2\,\text{sen}^2\,x + 3\,\text{sen}\,x - 1 > 0.$$

Multiplicando ambos os membros por -1, temos: $2\,\text{sen}^2\,x - 3\,\text{sen}\,x + 1 < 0$.

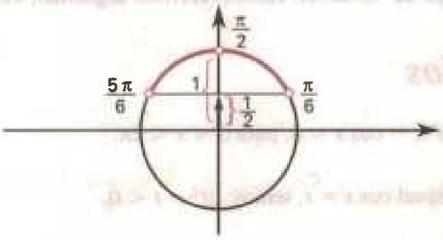
Efetuando a mudança de variável, $\text{sen}\,x = t$, obtemos: $2t^2 - 3t + 1 < 0$.

A função $f(t) = 2t^2 - 3t + 1$ tem o gráfico:



Observe que $f(t) < 0$, para $\frac{1}{2} < t < 1$.

Logo, $\frac{1}{2} < \text{sen}\,x < 1$.



Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$.

R.3 Resolver, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o sistema:

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}^2\,x - 7\,\text{sen}\,x + 3 \geqslant 0 \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

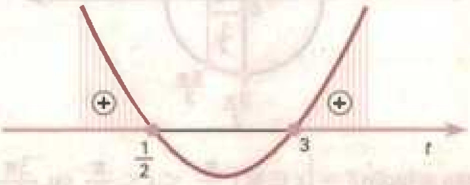
Resolução

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

I. $2\,\text{sen}^2\,x - 7\,\text{sen}\,x + 3 \geqslant 0$

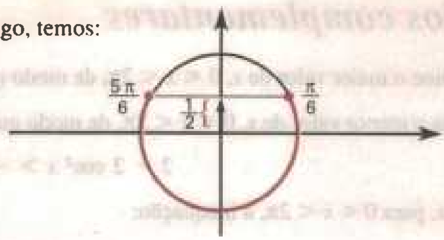
Efetuando a mudança de variável, $\text{sen}\,x = t$, obtemos: $2t^2 - 7t + 3 \geqslant 0$.

A função $f(t) = 2t^2 - 7t + 3$ tem o gráfico:



Note que $f(t) \geqslant 0$ para $t \leqslant \frac{1}{2}$ ou $t \geqslant 3$. Logo, temos:

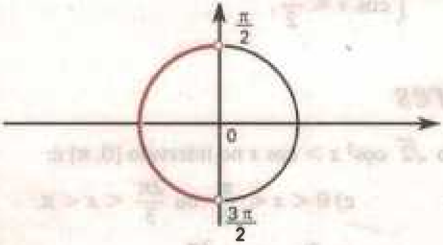
- $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$



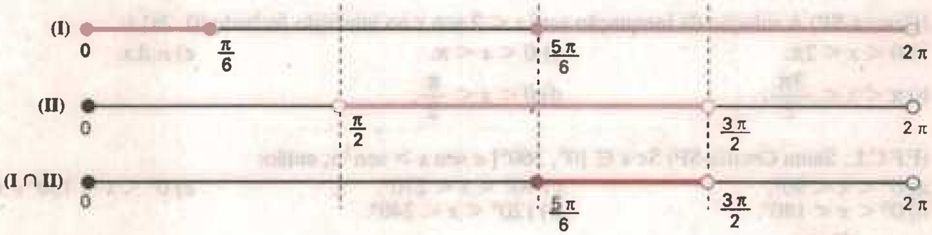
- ou $\operatorname{sen} x \geqslant 3 \Rightarrow \nexists\, x$ (pois o maior valor possível para $\operatorname{sen} x$ é 1).

O conectivo **ou** indica a união das soluções das inequações anteriores. Logo a solução da inequação $2\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x + 3 \geqslant 0$ é a mesma de $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$.

II. $\cos x < 0$



O conjunto solução do sistema é a intersecção das soluções de (I) e (II), ou seja:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.7, C.1, C.2, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.5, B.6, C.3.

Exercícios básicos

B.1 Resolva a inequação $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

B.2 Obtenha, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução da inequação $2\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{2}\operatorname{sen} x \geqslant 0$.

B.3 Sendo $0 \leqslant x < 2\pi$, obtenha o conjunto dos valores de x que satisfaçam a desigualdade $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 < 0$.

B.4 Determine o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, de modo que $2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 1 < 0$.

B.5 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a inequação $2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos x - 4 > 0$.

B.6 Qual é o conjunto solução da inequação $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen} x - 8 < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$?

B.7 Dê o conjunto solução da inequação $2\cos^2 x - 1 \leqslant 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Exercícios complementares

C.1 Determine o maior valor de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, de modo que $2\cos^2 x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \leqslant 0$.

C.2 Obtenha o menor valor de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, de modo que:

$$2 - 2\cos^2 x > -5\operatorname{sen}(-x) - 2.$$

C.3 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a inequação:

$$4\cos^2 x - (2 + 2\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leqslant 0.$$

C.4 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o sistema $\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2 x - 1 < 0 \\ \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Questões dos vestibulares

V.1 (FGV-SP) A solução da inequação $\sqrt{2}\cos^2 x > \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a) $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$.

b) $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x < \pi$.

c) $0 < x < \dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{2\pi}{3} < x < \pi$.

d) $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{2\pi}{3}$.

e) n.d.a.

V.2 (Cescea-SP) A solução da inequação $\operatorname{sen}^2 x < 2\operatorname{sen} x$ no intervalo fechado $[0, 2\pi]$ é:

a) $0 < x < 2\pi$.

b) $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

c) $0 < x < \pi$.

d) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

e) n.d.a.

V.3 (F.F.C.L. Santa Cecília-SP) Se $x \in \,]0°, 360°[$ e $\operatorname{sen} x > \operatorname{sen}^2 x$, então:

a) $0° < x < 90°$.

b) $0° < x < 180°$.

c) $90° < x < 270°$.

d) $120° < x < 240°$.

e) $0° < x < 180°$ e $x \neq 90°$.

Capítulo 61

Inequações produto e inequações quociente em seno ou co-seno

1. Técnicas de resolução

Exercícios resolvidos

R.1 Resolver, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a inequação $(4\,\text{sen}^2 x - 1)(2\,\text{sen}\,x - \sqrt{3}\,) \leqslant 0$.

Resolução
Efetuando a mudança de variável $\text{sen}\,x = t$, obtemos $(4t^2 - 1)(2t - \sqrt{3}\,) \leqslant 0$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções:

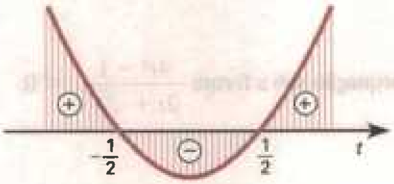
$$f(t) = 4t^2 - 1 \;\text{ e }\; g(t) = 2t - \sqrt{3}\,,$$

temos:

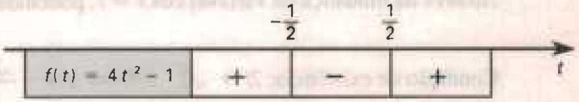
- Raízes de f

$$4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \;\text{ ou }\; t = \frac{1}{2}.$$

- Gráfico de f



$\Longrightarrow$

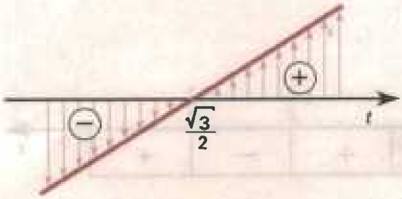


$f(t) = 4t^2 - 1$	+	−	+

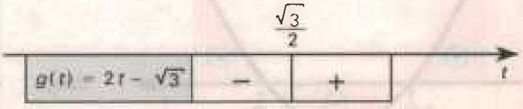
- Raiz de g

$$2t - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Gráfico de g



$\Longrightarrow$



$g(t) = 2t - \sqrt{3}$	−	+

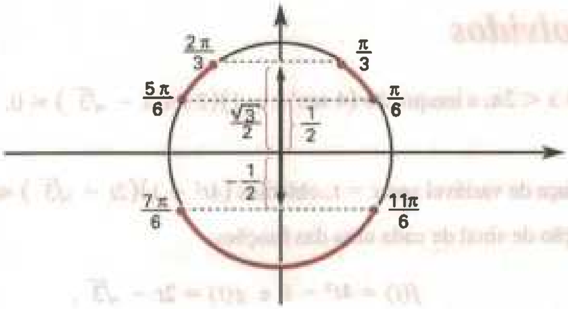
Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$, temos:

t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$f(t) = 4t^2 - 1$	+	−	+	+
$g(t) = 2t - \sqrt{3}$	−	−	−	+
$f(t) \cdot g(t) = (4t^2 - 1)(2t - \sqrt{3})$	−	+	−	+

Observe que $f(t) \cdot g(t) \leqslant 0$, para $t \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $\operatorname{sen} x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Na circunferência trigonométrica, obtemos:



Portanto o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

R.2 Resolver a inequação $\dfrac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x + \sqrt{2}} \leqslant 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Através da mudança de variável $\cos x = t$, podemos escrever a inequação sob a forma $\dfrac{4t^2 - 1}{2t + \sqrt{2}} \leqslant 0$.

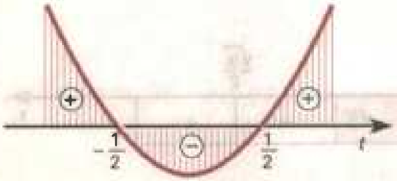
Condição de existência: $2t + \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow t \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções $f(t) = 4t^2 - 1$ e $g(t) = 2t + \sqrt{2}$, temos:

- Raízes de f

$$4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{1}{2}.$$

- Gráfico de f



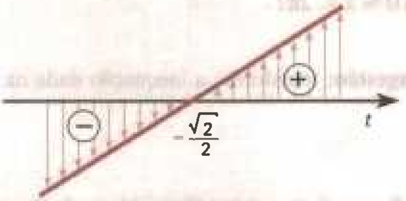
$\Longrightarrow$

t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$f(t) = 4t^2 - 1$	+	−	+

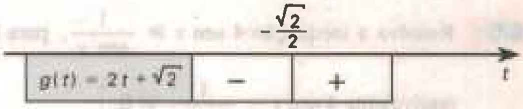
- Raiz de g

$$2t + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow t = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Gráfico de g

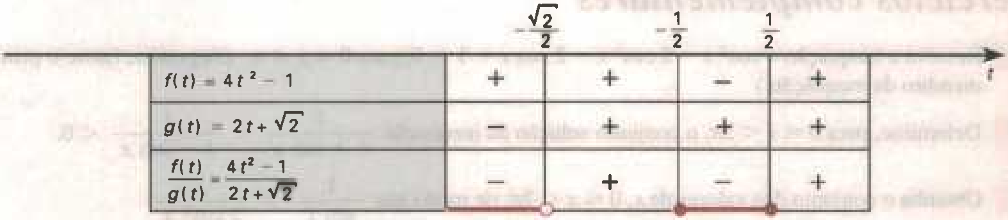


$\Longrightarrow$



$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$g(t) = 2t + \sqrt{2}$
−
+
t

Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:

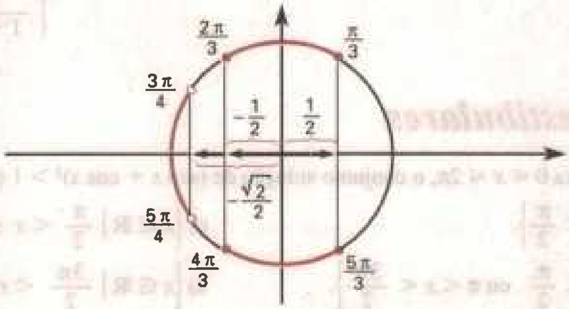


t		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$f(t) = 4t^2 - 1$	+	+	−	+	
$g(t) = 2t + \sqrt{2}$	−	+	+	+	
$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{4t^2 - 1}{2t + \sqrt{2}}$	−	+	−	+	

Portanto $\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0$, para $t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$.

Logo, $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

Na circunferência trigonométrica, obtemos:



$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$

Assim, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.6, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a inequação $(4\cos^2 x - 1)(2\cos x - \sqrt{3}) < 0$.

B.2 Determine, para $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da inequação $(4\,\text{sen}^2 x - 1)(2\,\text{sen}^2 x - 1) \geq 0$.

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a desigualdade $\dfrac{4\,\text{sen}^2 x - 1}{2\,\text{sen}\,x + \sqrt{2}} \geq 0$.

B.4 Qual é o conjunto solução da inequação $\dfrac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} > 0$, para $0 \leq x < 2\pi$?

B.5 Resolva a inequação $4\,\text{sen}\,x \geq \dfrac{1}{\text{sen}\,x}$, para $0 \leq x < 2\pi$. (**Sugestão:** transforme a inequação dada na equivalente $4\,\text{sen}\,x - \dfrac{1}{\text{sen}\,x} \geq 0$.)

B.6 Dê o conjunto solução da inequação $(2\cos x - 1)(\text{sen}^2 x - 1) \leq 0$, para $0 \leq x < 2\pi$. (**Sugestão:** substitua $\text{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$.)

Exercícios complementares

C.1 Resolva a inequação $4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 > 0$, para $0 \leq x \leq \pi$. (**Sugestão:** fatore o primeiro membro da inequação.)

C.2 Determine, para $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da inequação $\dfrac{1}{1 + \text{sen}\,x} + \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,x} < 0$.

C.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, de modo que $\dfrac{1}{\text{sen}\,x} \geq \dfrac{3}{2\cos^2 x}$.

C.4 Resolva a inequação $-1 < \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,x} < 1$, para $0 \leq x < 2\pi$.

(**Sugestão:** essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema: $\begin{cases} \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,x} < 1 \\ \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,x} > -1 \end{cases}$.)

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Para $0 \leq x \leq 2\pi$, o conjunto solução de $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 > 1$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

V.2 (UFRS) O conjunto solução da inequação $4\cos^3 x - \cos x < 0$, para $0 \leq x < 2\pi$, é:

a) $S = \left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right[$.

b) $S = \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right[$.

c) $S = \varnothing$.

d) $S = \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right[$.

e) $S = \left]\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$.

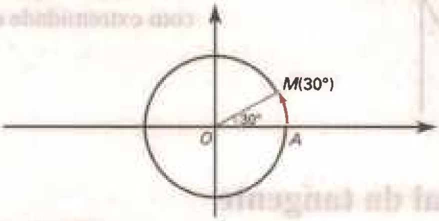
V.3 (Unicamp-SP) Determine α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, de modo que a desigualdade $x^2 - 2x > \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ seja satisfeita para todo x, $x \in \mathbb{R}$.

Capítulo 62

Tangente de um arco trigonométrico

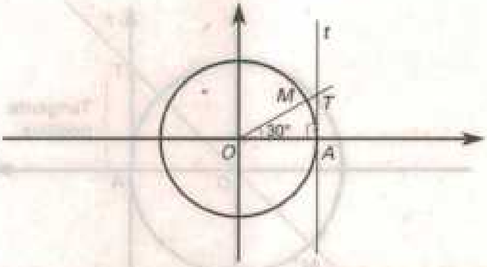
1. Extensão do conceito de tangente

Para compreendermos a definição que virá a seguir, consideremos na circunferência trigonométrica um arco $\widehat{AM}$ de medida 30°:



A medida do ângulo $A\hat{O}M$ também é 30°.

Seja t a reta perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto A:



O prolongamento do raio $\overline{OM}$ intercepta a reta t no ponto T. No triângulo AOT, temos que:

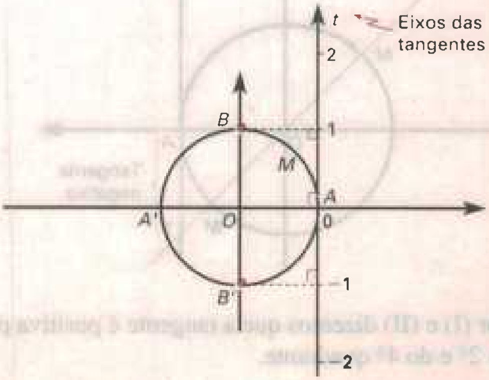
$$\text{tg } 30° = \frac{AT}{OA}.$$

Como $OA = 1$, pois $\overline{OA}$ é o raio da circunferência trigonométrica, obtemos:

$$\text{tg } 30° = \frac{AT}{1} \Rightarrow \boxed{\text{tg } 30° = AT.}$$

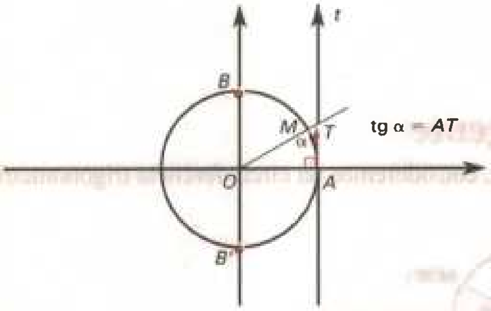
Assim, a tg 30° é a medida do segmento $\overline{AT}$.

Para estendermos o conceito de tangente de um arco trigonométrico, consideremos como **eixo das tangentes** o eixo real t, perpendicular ao eixo das abscissas, com origem A e a mesma orientação do eixo das ordenadas.



Definição

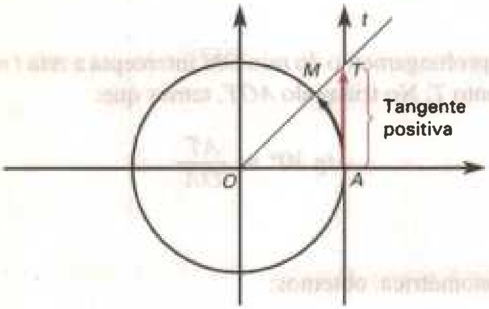
Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$, $M \neq B$ e $M \neq B'$, de medida α, chama-se "tangente de α" (tg α) a ordenada do ponto T obtido pela intersecção do prolongamento do raio $\overline{OM}$ com o eixo das tangentes.

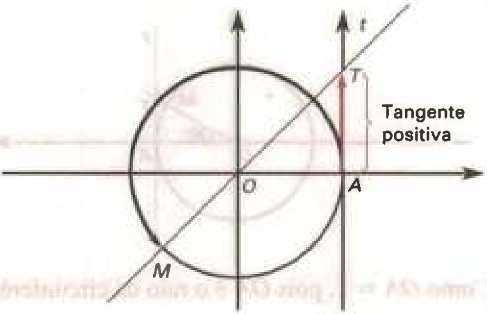

t
B
M
T
α
O
A
B'
tg α = AT

Observe que o ponto M não pode coincidir com B nem com B', pois os prolongamentos dos raios $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em B ou B'.

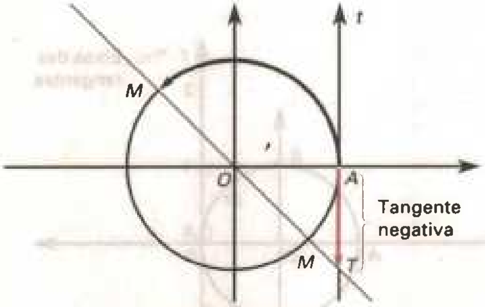
1.1. Variação de sinal da tangente

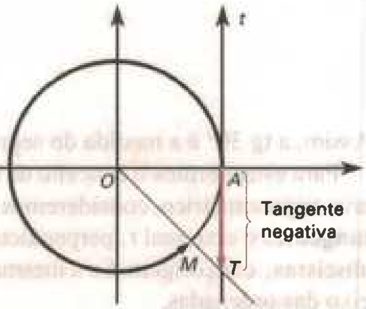
I. Se um arco $\widehat{AM}$ tiver extremidade no 1º ou no 3º quadrante, então o prolongamento do raio $\overline{OM}$ interceptará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada positiva:


t
M
T
Tangente positiva
O
A


t
T
Tangente positiva
O
A
M

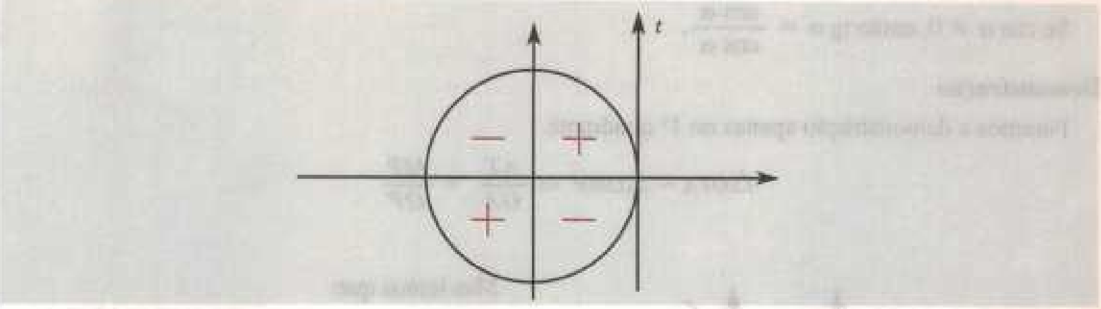
II. Se um arco $\widehat{AM}$ tiver extremidade no 2º ou no 4º quadrante, então o prolongamento do raio $\overline{OM}$ interceptará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada negativa:


t
M
O
A
Tangente negativa
M
T


t
O
A
Tangente negativa
M
T

Por (I) e (II) dizemos que a tangente é positiva para arcos do 1º e do 3º quadrante e negativa para arcos do 2º e do 4º quadrante.

Em resumo, a variação de sinal da tangente é dada por:



Exercícios resolvidos

R.1 Calcular os valores de:

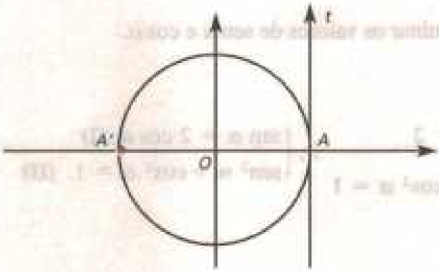
a) tg π

b) tg 0

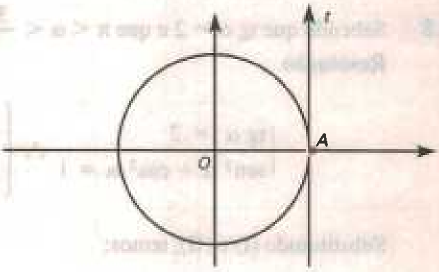
c) tg $\frac{\pi}{2}$

Resolução

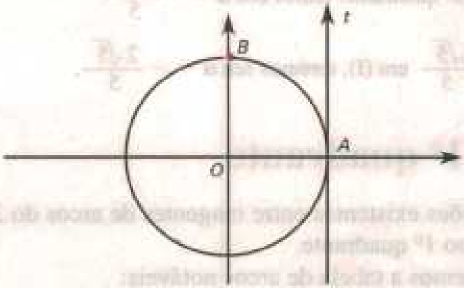
a) A extremidade do arco de medida π rad é o ponto A'. Prolongando o raio $\overline{OA'}$, interceptamos o eixo das tangentes no ponto A, cuja ordenada é zero. Logo, tg $\pi = 0$.



b) A extremidade do arco de medida 0 rad é o ponto A. Prolongando o raio $\overline{OA}$, interceptamos o eixo das tangentes no ponto A, cuja ordenada é zero. Logo, tg $0 = 0$.



c) A extremidade do arco de medida $\frac{\pi}{2}$ rad é o ponto B. Prolongando o raio $\overline{OB}$, não há ponto de intersecção com o eixo das tangentes. Logo, não existe a tg $\frac{\pi}{2}$.



R.2 Determinar o sinal do produto $P = \text{tg } 13° \text{ tg } 190° \text{ tg } 352°$.

Resolução

Os arcos de medidas 13°, 190° e 352° têm extremidades no 1º, no 3º e no 4º quadrante, respectivamente.
Logo, tg $13° > 0$; tg $190° > 0$; tg $352° < 0$.
Assim, temos que $P < 0$.

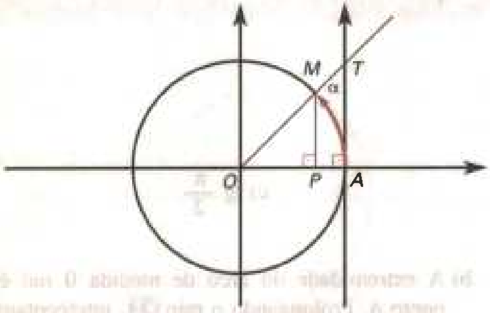
1.2. Teorema

Se $\cos\alpha \neq 0$, então $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Demonstração

Faremos a demonstração apenas no 1º quadrante.

$$\triangle OTA \sim \triangle OMP \Rightarrow \frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}$$



Mas temos que:

$AT = \operatorname{tg}\alpha$,
$OA = 1$,
$MP = \operatorname{sen}\alpha$,
$OP = \cos\alpha$.

Logo, $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. (c.q.d.)

Exercício resolvido

R.3 Sabendo que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e que $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, determinar os valores de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

Resolução

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = 2 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha \quad \textbf{(I)} \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II), temos:

$$(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \therefore 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \therefore 5\cos^2\alpha = 1 \therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \therefore \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Como α pertence ao 3º quadrante, temos $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Fazendo $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ em (I), teremos $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. Redução ao 1º quadrante

Vamos estudar as relações existentes entre tangentes de arcos do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com os arcos correspondentes no 1º quadrante.

Para exemplificar, usaremos a tabela de arcos notáveis:

	30°	45°	60°
tg	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

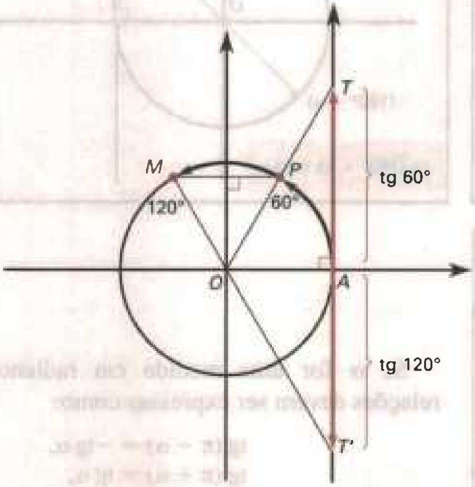
Exercício resolvido

R.4 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcular:

a) tg 120°   b) tg 210°   c) tg 300°

Resolução

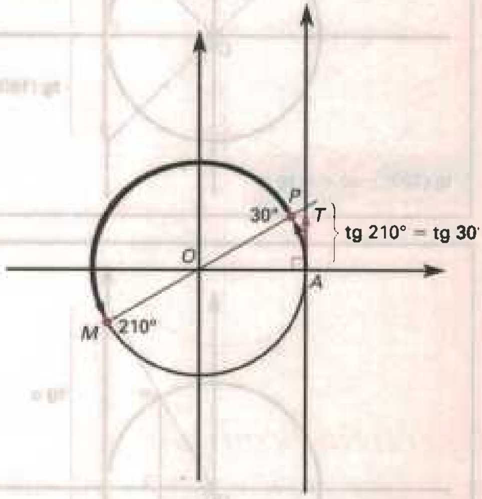
a) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 120° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.



Como os triângulos *OTA* e *OT'A* são congruentes, segue-se que os pontos *T* e *T'* têm ordenadas opostas.

Logo, concluímos tg 120° = −tg 60° = $-\sqrt{3}$.

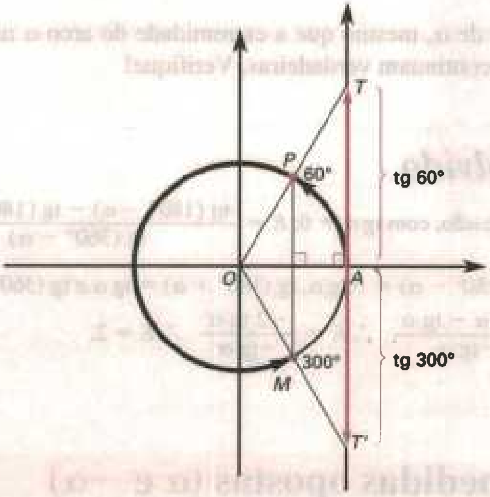
b) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 210° é o ponto *P*, extremidade do arco de 30°.



Observe que a ordenada do ponto *T* é simultaneamente a tg 210° e a tg 30°, isto é:

$$\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 300° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.

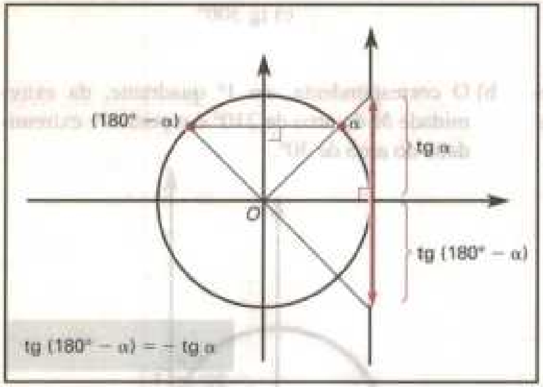


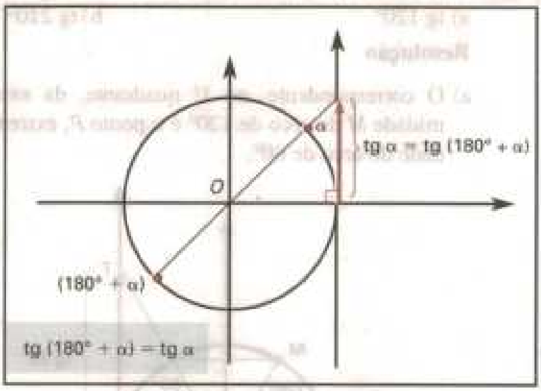
Como os triângulos *OTA* e *OT'A* são congruentes, segue-se que os pontos *T* e *T'* têm ordenadas opostas.

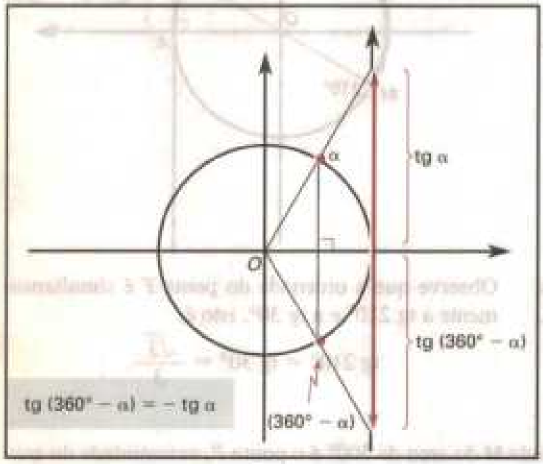
Logo, concluímos tg 300° = −tg 60° = $-\sqrt{3}$.

2.1. Redução ao 1º quadrante (generalização)

Dado um arco de medida α, com extremidade no 1º quadrante, temos:







Se α for uma medida em radianos, essas relações devem ser expressas como:

$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,
$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$,
$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Nota

Existindo a tangente de α, mesmo que a extremidade do arco α não seja ponto do 1º quadrante, as três relações anteriores continuam verdadeiras. Verifique!

Exercício resolvido

R.5 Simplificar a expressão, com $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$: $E = \dfrac{\operatorname{tg}(180° - \alpha) - \operatorname{tg}(180° + \alpha)}{\operatorname{tg}(360° - \alpha)}$.

Resolução

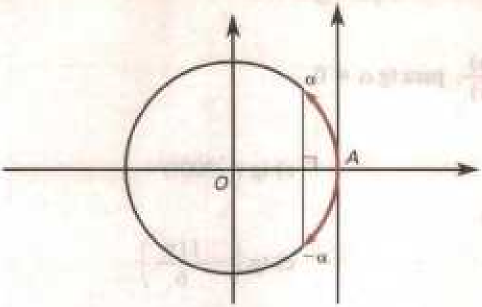
Sabemos que $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

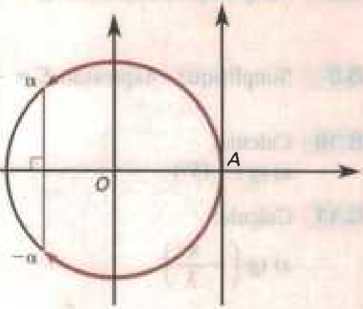
Assim, $E = \dfrac{-\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$ $\therefore E = \dfrac{-2\,\cancel{\operatorname{tg}\alpha}}{-\cancel{\operatorname{tg}\alpha}}$ $\therefore E = 2$.

3. Arcos de medidas opostas (α e −α)

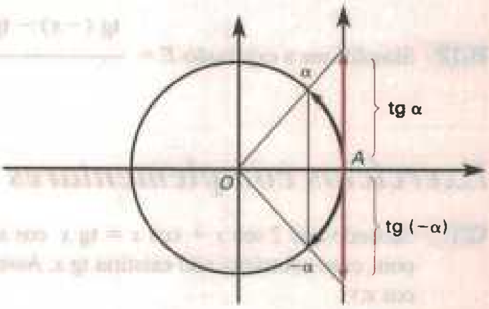
Dois arcos de medidas opostas (α e −α) têm extremidades simétricas em relação ao eixo dos co-senos.

Observe:





Note que os prolongamentos dos raios que passam pelas extremidades dos arcos α e −α interceptam o eixo das tangentes em pontos de ordenadas opostas, conforme figura ao lado.



Assim, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Exercício resolvido

R.6 Calcular o valor de tg (−60°).

Resolução

Sabemos que $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Logo, $\operatorname{tg}(-60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.8, B.10, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, B.7, B.9, B.11, B.12, C.2, C.3, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) tg 180° b) tg 360° c) tg 270°

B.2 Sabendo que $\operatorname{tg}\alpha = -3$ e que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule os valores de sen α e cos α.

B.3 Sabendo que $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine os valores de sen x e cos x.

B.4 Sabendo que $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, determine tg x.

B.5 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) tg 150° b) tg 240° c) tg 330° d) tg 135° e) tg 225° f) tg 315°

B.6 Calcule o valor da expressão $E = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, para $x = 120°$.

B.7 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$ b) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$ c) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$ d) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$

B.8 Simplifique a expressão $E = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,(180° + \alpha) - \mathrm{tg}\,(180° - \alpha)}{5\,\mathrm{tg}\,(360° - \alpha)}$, para $\mathrm{tg}\,\alpha \neq 0$.

B.9 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\mathrm{tg}\,(\pi + \alpha) - \mathrm{tg}\,(2\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}\,(2\pi - \alpha) + \mathrm{tg}\,(\pi - \alpha)}$, para $\mathrm{tg}\,\alpha \neq 0$.

B.10 Calcule:

a) $\mathrm{tg}\,(-45°)$ b) $\mathrm{tg}\,(-120°)$ c) $\mathrm{tg}\,(-300°)$

B.11 Calcule:

a) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$ c) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$

B.12 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\mathrm{tg}\,(-x) - \mathrm{tg}\,(2\pi - x) + \dfrac{\mathrm{sen}\,(\pi + x)}{\cos\,(-x)}}{\dfrac{\mathrm{sen}\,(-x)}{\cos\,(\pi - x)}}$, para $\mathrm{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $2\,\mathrm{sen}\,x + \cos x = \mathrm{tg}\,x \ \cos x$, determine o valor de $\mathrm{tg}\,x$. (**Sugestão:** devemos ter $\cos x \neq 0$, pois, caso contrário, não existiria $\mathrm{tg}\,x$. Assim sendo, podemos dividir ambos os membros da igualdade por $\cos x$.)

C.2 Sabendo que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e que $3\cos x - \dfrac{\mathrm{sen}^2\,x}{\cos x} = \mathrm{tg}\,x \ \mathrm{sen}\,x$, determine o valor de $\mathrm{tg}\,x$.

C.3 Sabendo que $\cos x \ \cos y \neq 0$, $\cos x \ \cos y \neq \mathrm{sen}\,x \ \mathrm{sen}\,y$ e que $E = \dfrac{\mathrm{sen}\,x \cos y + \mathrm{sen}\,y \cos x}{\cos x \cos y - \mathrm{sen}\,x \ \mathrm{sen}\,y}$, então E é equivalente a:

a) $E = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y$ c) $E = \dfrac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x}$ e) $E = \mathrm{tg}\,x \ \mathrm{tg}\,y$

b) $E = \mathrm{tg}\,x - \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,y}$ d) $E = \dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x \ \mathrm{tg}\,y}$

C.4 Em que quadrantes o produto $\mathrm{sen}\,x \ \mathrm{tg}\,x$ é positivo?

C.5 Sendo α a medida de um arco trigonométrico com $\cos \alpha > 0$ e $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$, determine a que quadrante pertence a extremidade do arco de medida α.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Se $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, então o valor de $\cos x - \mathrm{sen}\,x$ é:

a) $\dfrac{7}{5}$ b) $-\dfrac{7}{5}$ c) $-\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $-\dfrac{1}{5}$

V.2 (ITA-SP) O valor da expressão $x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{1 - \mathrm{tg}^2\,\theta}$ quando $\cos\theta = -\dfrac{3}{7}$ e $\mathrm{tg}\,\theta < 0$ é:

a) $\dfrac{4\sqrt{10}}{31}$ b) $-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$ d) $\dfrac{3\sqrt{10}}{7}$ e) n.d.a.

V.3 (Faap-SP) Sabendo que $\mathrm{tg}\,x = a$, calcule em função de a o valor da expressão $E = \dfrac{\mathrm{sen}\,x + \cos x}{\mathrm{sen}\,x - \cos x}$, $\mathrm{sen}\,x \neq \cos x$ e $\cos x \neq 0$.

Capítulo 63

Equações trigonométricas em tangente

1. Equações imediatas em tangente

Toda equação do tipo:

$$\operatorname{tg} x = k,$$

em que k é uma constante real, é denominada **equação imediata** em tg x.

Exemplos

a) $\operatorname{tg} x = 1$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

1.1. Método gráfico para a resolução de uma equação imediata em tangente

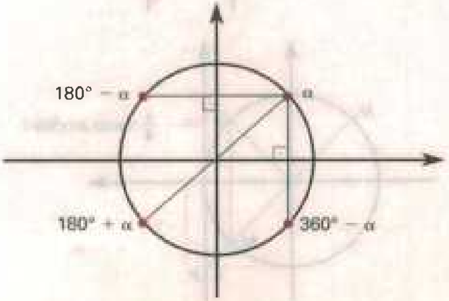
Estudaremos agora um método gráfico para resolver equações do tipo $\operatorname{tg} x = k$, $k \in \mathbb{R}$.

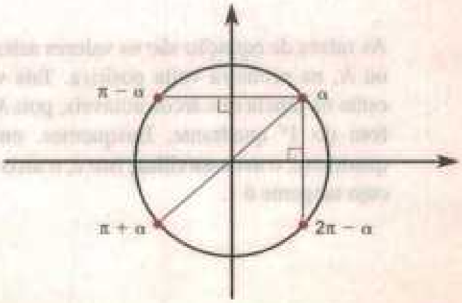
Os requisitos para o entendimento desse método são:

I. Tabela dos arcos notáveis

	$30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

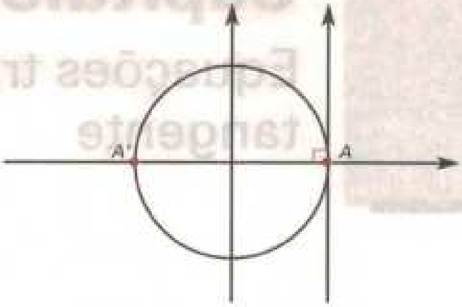
II. Simetrias





III. Os valores de tg 0 e tg π

Os prolongamentos dos raios pelos pontos A ou A' encontram o eixo das tangentes no próprio ponto A. Logo, temos: tg 0 = 0 e tg π = 0.

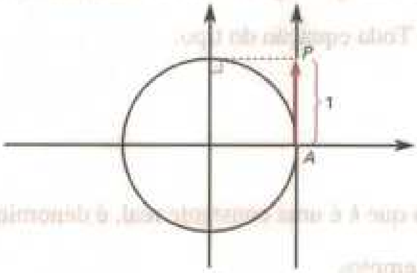


Exercícios resolvidos

R.1 Resolver a equação tg $x = 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

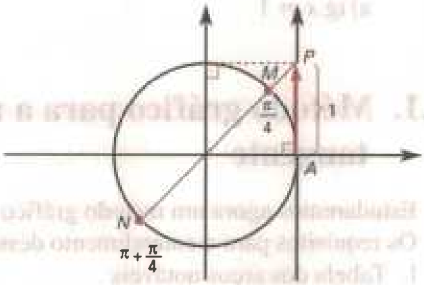
Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada igual a 1.



Traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Tal reta intercepta a circunferência nos pontos M e N. Os valores da primeira volta positiva associados a M ou N são as raízes da equação.

Logo, $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

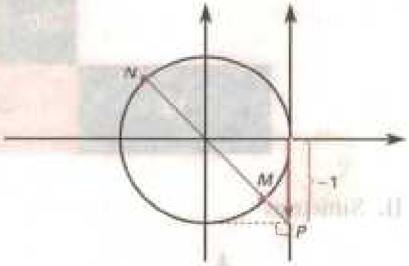
Assim, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.



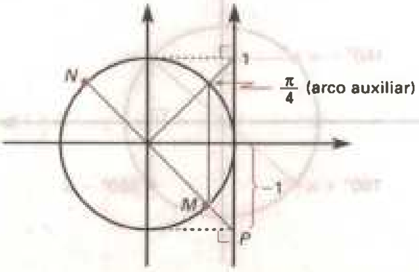
R.2 Resolver a equação tg $x = -1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

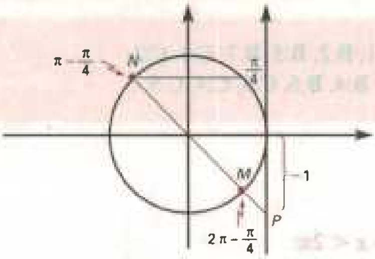
Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada igual a -1 e traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência, obtendo M e N.



As raízes da equação são os valores associados a M ou N, na primeira volta positiva. Tais valores não estão na tabela dos arcos notáveis, pois M e N estão fora do 1º quadrante. Busquemos, então, no 1º quadrante, o **arco auxiliar**, isto é, o arco (da tabela) cuja tangente é 1.



Finalmente, pelas simetrias, transportamos o arco auxiliar para o 2º e para o 4º quadrante.

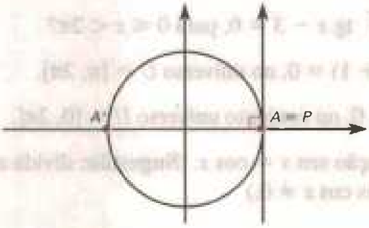


Logo, $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Assim, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

R.3 Resolver a equação tg $x = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada zero e a seguir traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica:



Tal reta intercepta a circunferência nos pontos A e A'.
Logo, $x = 0$ ou $x = \pi$.
Assim, $S = \{0, \pi\}$.

R.4 Resolver a equação $3\,\text{tg}^2\,x - 4\sqrt{3}\,\text{tg}\,x + 3 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

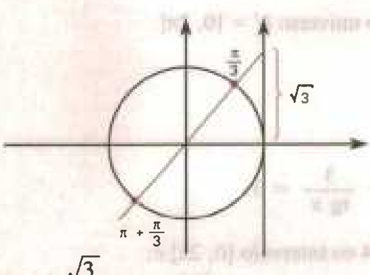
Fazendo tg $x = t$, temos $3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$ $\therefore$ $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$ $\therefore$ $\Delta = 48 - 36 = 12$.

Assim, temos $t = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6}$ $\therefore$ $t = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3}$ ou $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Como tg $x = t$, temos tg $x = \sqrt{3}$ ou tg $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

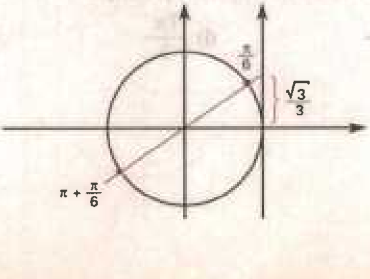
Resolvendo cada uma das equações imediatas anteriores, na primeira volta positiva, temos:

- tg $x = \sqrt{3}$



$x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

- ou tg $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.7, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.6, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Resolva as equações para $0 \leq x < 2\pi$:

a) $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$

b) $\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$

d) $\text{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\text{tg}\, x = 0$

f) $\text{tg}^2\, x = 1$

B.2 Determine o conjunto solução da equação $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $9\, \text{tg}^3\, x - 3\, \text{tg}\, x = 0$.

B.4 Qual é o conjunto solução da equação $3\, \text{tg}^2\, x + 2\sqrt{3}\, \text{tg}\, x - 3 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$?

B.5 Dê o conjunto solução da equação $(\text{tg}^2\, x - 3)(\text{sen}\, x + 1) = 0$, no universo $U = [\pi, 2\pi]$.

B.6 Resolva a equação $\text{tg}^2\, x - (1 + \sqrt{3})\text{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$, no conjunto universo $U = [0, 2\pi[$.

B.7 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação $\text{sen}\, x = \cos x$. (**Sugestão:** divida ambos os membros por $\cos x$. Note que essa divisão é permitida, pois $\cos x \neq 0$.)

Exercícios complementares

C.1 Resolva a equação $5\, \text{sen}\, x - \cos x = 4\, \text{tg}\, x \cos x$, para $0 \leq x < 2\pi$.

C.2 Determine, para $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da equação:

$$\text{sen}\, x\, \text{tg}\, x + \text{sen}\, x - \text{tg}\, x \cos x - \cos x = 0.$$

C.3 Calcule a soma das raízes da equação $\text{tg}^2\, x = 5$, para $0 \leq x < 2\pi$.

C.4 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x \leq \pi$, de modo que $\text{tg}^4\, x - \text{tg}\, x = 0$.

C.5 Resolva a equação $\frac{1}{2 + \text{tg}\, x} + \frac{1 + \text{tg}\, x}{3} = 1$, no universo $U = [0, 2\pi[$.

Questões dos vestibulares

V.1 (ITA-SP) Resolva a equação para $0 \leq x < 2\pi$: $\text{tg}\, x + \frac{3}{\text{tg}\, x} = 3$.

V.2 (Cesgranrio) O número de raízes da equação $\text{tg}\, x = 4$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 2
b) 1
c) 3
d) 4
e) 0

V.3 (PUC-PR) A soma das raízes da equação $\text{sen}\, x = \sqrt{3}\, \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) π
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{7\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{2}$

Capítulo 64

Inequações trigonométricas em tangente

1. Inequações imediatas em tangente

Inequações do tipo: $\operatorname{tg} x > k$ $\quad\operatorname{tg} x < k$ $\quad\operatorname{tg} x \geqslant k$ $\quad\operatorname{tg} x \leqslant k$ $\quad\operatorname{tg} x \neq k$

em que k é uma constante real, são chamadas inequações imediatas.

Exemplos

a) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$

b) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$

Para determinarmos o conjunto solução de cada uma dessas inequações, vamos adotar um processo gráfico, análogo àqueles utilizados nas inequações em seno ou co-seno.

1.1. Método gráfico para resolução de uma inequação imediata em tangente

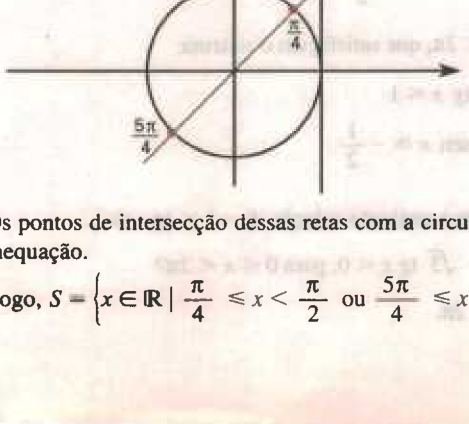
Exercícios resolvidos

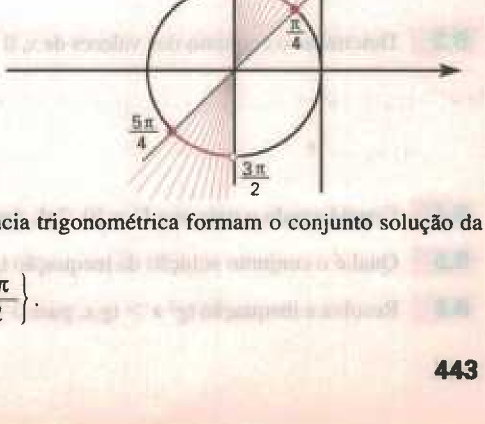
R.1 Resolver a inequação $\operatorname{tg} x \geqslant 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Determinemos inicialmente os arcos que têm tangentes iguais a 1:

Pelo ponto de ordenada 1, do eixo das tangentes, e por todos os pontos, desse eixo, com ordenadas maiores que 1, vamos traçar retas que passam pelo centro da circunferência:





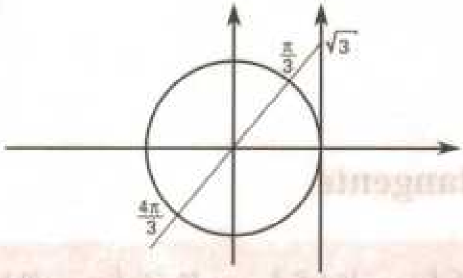
Os pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

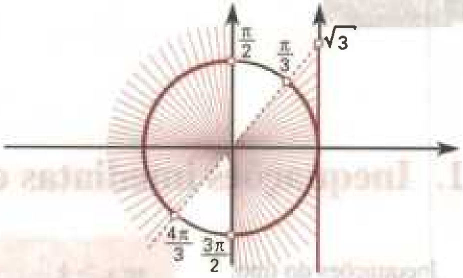
R.2 Resolver a inequação $\text{tg}\, x < \sqrt{3}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Determinemos, inicialmente, os arcos que têm tangentes iguais a $\sqrt{3}$:



Por todos os pontos do eixo das tangentes que possuem ordenadas menores que $\sqrt{3}$, vamos traçar as retas que passam pelo centro da circunferência:



Os pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c) B.2, B.5, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d até g), B.3, B.4, B.6, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$:

a) $\text{tg}\, x \geqslant \sqrt{3}$

b) $\text{tg}\, x < 1$

c) $\text{tg}\, x \geqslant -1$

d) $\text{tg}\, x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\text{tg}\, x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\, x \geqslant 0$

g) $\text{tg}\, x < 0$

B.2 Resolva o sistema de inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$:

$$\begin{cases} \text{tg}\ x > 1 \\ \text{sen}\ x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

B.3 Determine o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam o sistema:

$$\begin{cases} \text{tg}\ x \leqslant 1 \\ \text{sen}\ x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

B.4 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, determine o conjunto solução de $-1 < \text{tg}\, x \leqslant 1$.

B.5 Qual é o conjunto solução da inequação $\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\ \text{tg}\, x < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$?

B.6 Resolva a inequação $\text{tg}^2 x > \text{tg}\, x$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva a inequação $\frac{\text{tg } x - 1}{\text{tg } x + 1} \geqslant 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. $\left(\right.$**Sugestão:** faça $\text{tg } x = t$ e resolva a inequação quociente $\left.\frac{t-1}{t+1} \geqslant 0.\right)$

C.2 Determine α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, de modo que a equação do 2º grau $4x^2 - 4x - \text{tg } \alpha = 0$ admita raízes reais.

C.3 Obtenha o conjunto solução da inequação $\text{tg}^3 x - \sqrt{3}\ \text{tg}^2 x - \text{tg } x + \sqrt{3} \leqslant 0$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$. (**Sugestão:** fatore o primeiro membro da desigualdade.)

C.4 Sabendo que a função $f(x) = x^2 + (\text{tg } \alpha)\, x + \frac{1}{4}$ assume valor positivo para qualquer x real, determine α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Seja α um ângulo satisfazendo às condições $0 < \alpha < 2\pi$ e $1 < \text{tg } \alpha < \sqrt{3}$. Pode-se concluir que:

a) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$.

d) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$.

e) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$.

V.2 (Mackenzie-SP) Se $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ e, para todo x real, tem-se que $x^2 + x + \text{tg } \alpha > \frac{3}{4}$, então:

a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

d) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

e) não existe α nessas condições.

V.3 (Cescea-SP) Resolvendo o sistema $\begin{cases} \text{tg } x > 0 \\ \text{tg } x < \sqrt{3} \end{cases}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$, obtém-se:

a) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$.

b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\pi < x < \frac{5\pi}{6}$.

d) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$.

e) $0 < x < \frac{\pi}{3}$ ou $\pi < x < \frac{4\pi}{3}$.

Capítulo 65

As razões recíprocas do seno, do co-seno e da tangente

1. Co-tangente, secante e co-secante de um arco trigonométrico

Essas três "novas" relações têm relativa importância na trigonometria, pois sempre que exigidas podem ser substituídas por expressões em seno, co-seno ou tangente.

Indicamos a co-tangente de um arco α, a secante de α e a co-secante de α pelos símbolos cotg α, sec α e cossec α, respectivamente.

Definições

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0;$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ para } \cos \alpha \neq 0;$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0.$$

Observe, pela definição de cotg α, que, se além de sen $\alpha \neq 0$ tivermos também $\cos \alpha \neq 0$, então:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular:

a) cotg 30°

b) sec 180°

c) cossec 90°

Resolução

a) $\text{cotg } 30° = \dfrac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$.

b) $\sec 180° = \dfrac{1}{\cos 180°} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

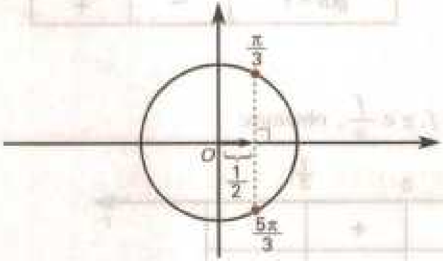
c) $\text{cossec } 90° = \dfrac{1}{\text{sen } 90°} = \dfrac{1}{1} = 1$.

R.2 Resolver a equação $\sec x = 2$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Condição de existência: $\cos x \neq 0$.

$$\sec x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \therefore \cos x = \frac{1}{2}.$$



$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}.$$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

R.3 Sabendo que $\operatorname{cotg} x = 2$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $\operatorname{cossec} x$.

Resolução

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} \cos x = 2 \operatorname{sen} x \quad \text{(I)} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + (2 \operatorname{sen} x)^2 = 1 \therefore \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\therefore 5 \operatorname{sen}^2 x = 1 \therefore \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{5} \therefore \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Como x é um arco do 1º quadrante, temos $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Logo, $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

R.4 Resolver a inequação $\sec x \geqslant 2$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

$$\sec x \geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \geqslant 2.$$

Efetuando a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos $\frac{1}{t} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{t} - 2 \geqslant 0 \therefore \frac{1 - 2t}{t} \geqslant 0.$

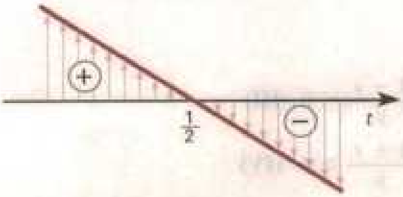
Condição de existência: $t \neq 0$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(t) = 1 - 2t$ e $g(t) = t$, temos:

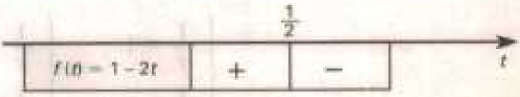
- Raiz de f

$$1 - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

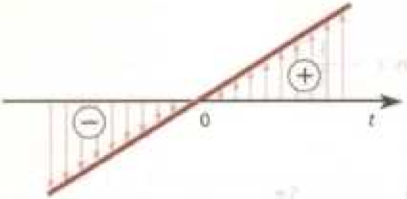
- Gráfico de f



$\Longrightarrow$



- Raiz de g: $t = 0$.
- Gráfico de g



$\Longrightarrow$

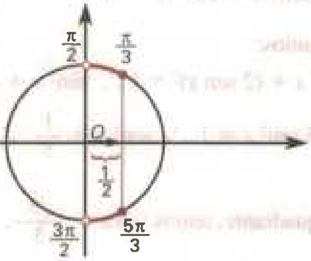
	0	
$g(t) = t$	−	+

Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, obtemos:

		0	$\frac{1}{2}$
$f(t) = 1 - 2t$	+	+	−
$g(t) = t$	−	+	+
$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1-2t}{t}$	−	+	−

Note que $f(t) \geqslant 0$ para $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$. Logo, $0 < \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

Na circunferência trigonométrica, temos:



Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$.

R.5 Determinar o conjunto imagem da função $y = \sec x$.

Resolução

O **conjunto imagem** da função é o **conjunto dos valores de** y; por isso basta determinarmos a variação de y na igualdade $y = \sec x$.

Sabemos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Logo, temos $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{y} \quad \textbf{(I)} \\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos $-1 \leqslant \frac{1}{y} \leqslant 1$.

Essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema:

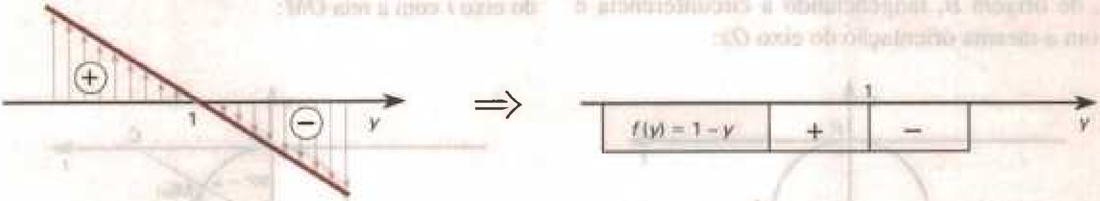
$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{y} \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} - 1 \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{y} + 1 \geqslant 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \dfrac{1-y}{y} \leqslant 0 \quad \textbf{(III)} \\ \dfrac{1+y}{y} \geqslant 0. \quad \textbf{(IV)} \end{cases}$$

Estudando a variação de sinal de $f(y) = 1 - y$, $g(y) = y$ e $h(y) = 1 + y$, temos:

- Raiz de f

$$1 - y = 0 \Rightarrow y = 1.$$

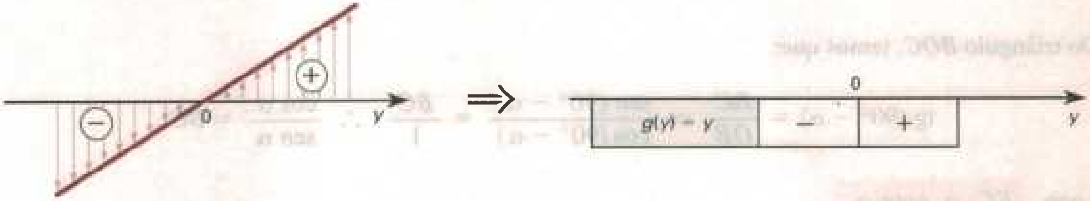
- Gráfico de f



- Raiz de g

$$y = 0.$$

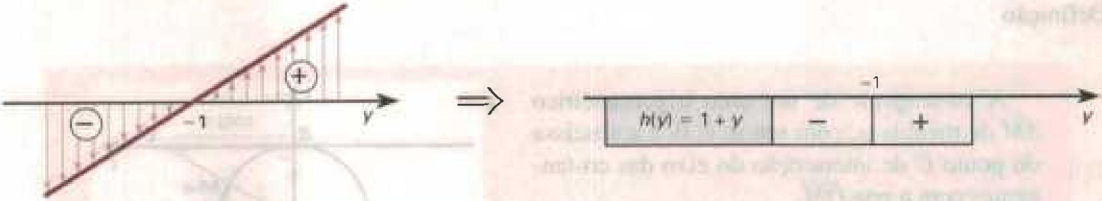
- Gráfico de g



- Raiz de h

$$1 + y = 0 \Rightarrow y = -1.$$

- Gráfico de h



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g, h, $\frac{f}{g}$ e $\frac{h}{g}$, temos:

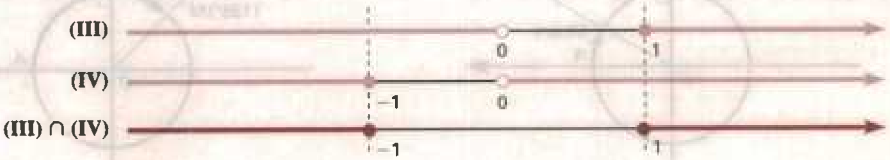
III

		0	1
$f(y) = 1 - y$	+	+	−
$g(y) = y$	−	+	+
$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{1-y}{y}$	−	+	−

IV

		−1	0
$h(y) = 1 + y$	−	+	+
$g(y) = y$	−	−	+
$\frac{h(y)}{g(y)} = \frac{1+y}{y}$	+	−	+

O conjunto solução do sistema é a interseção das soluções (III) e (IV):

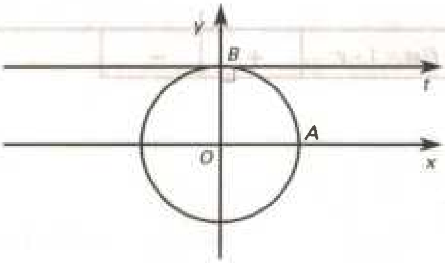


Assim, $y \leqslant -1$ ou $y \geqslant 1$.

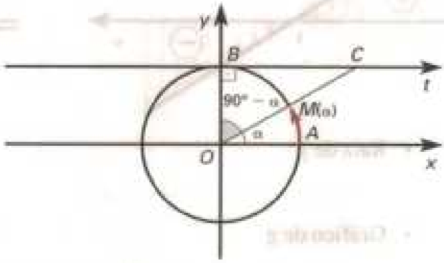
Logo, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$.

1.1. Interpretação geométrica da co-tangente de um arco

Sejam a circunferência trigonométrica de centro O, o ponto $B(0, 1)$, o ponto $A(1, 0)$ e o eixo real t, de origem B, tangenciando a circunferência e com a mesma orientação do eixo Ox:



Consideremos um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, $0 < \alpha < 90°$ e o ponto C, de intersecção do eixo t com a reta $\overleftrightarrow{OM}$:



Do triângulo BOC, temos que:

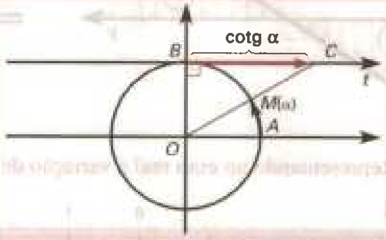
$$\text{tg}\,(90° - \alpha) = \frac{BC}{OB} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,(90° - \alpha)}{\cos\,(90° - \alpha)} = \frac{BC}{1} \therefore \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = BC.$$

Logo, $\boxed{BC = \text{cotg}\,\alpha}$.

Denominando o eixo real t de **eixo das co-tangentes**, estendemos esse conceito para todo arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$.

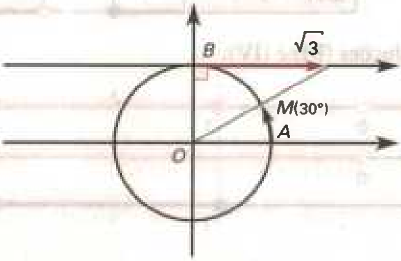
Definição

A co-tangente de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$, é a abscissa do ponto C de intersecção do eixo das co-tangentes com a reta $\overleftrightarrow{OM}$.



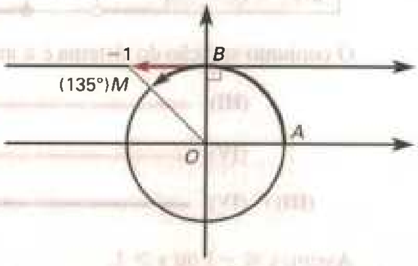
Exemplos

a)



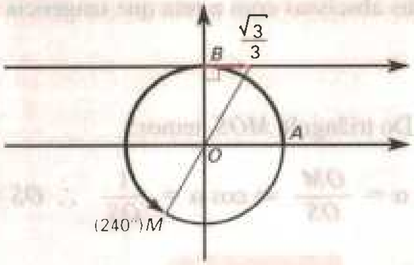
cotg 30° = $\sqrt{3}$

b)



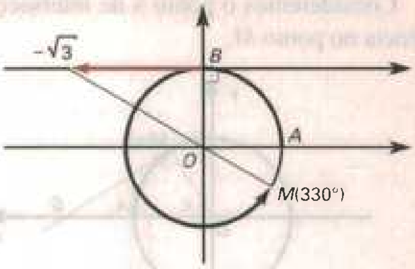
cotg 135° = −1

c)



$\text{cotg } 240° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

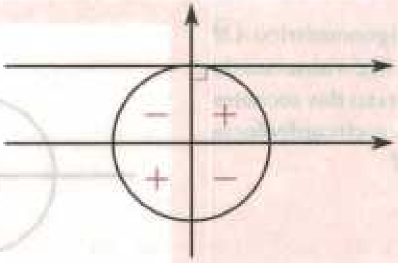
d)



$\text{cotg } 330° = -\sqrt{3}$

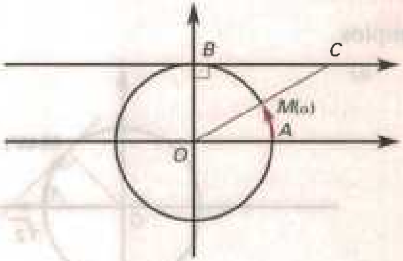
Variação de sinal da co-tangente

A co-tangente é positiva para arcos com extremidades no 1º ou no 3º quadrante, e negativa para arcos com extremidades no 2º ou no 4º quadrante da circunferência trigonométrica.



Exercício resolvido

R.6 Na circunferência trigonométrica ao lado, o arco $\widehat{AM}$ tem medida α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Mostrar que: $OC = \text{cossec } \alpha$.



Resolução

Observe que $BC = \text{cotg } \alpha$ e $OB = 1$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BOC, temos:

$$(OC)^2 = (OB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (OC)^2 = 1^2 + \text{cotg}^2 \alpha$$

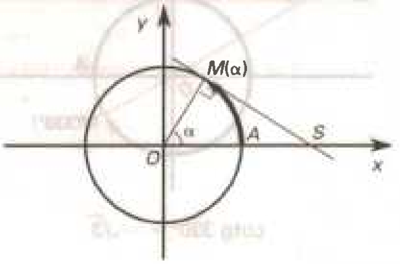
$$\therefore (OC)^2 = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \quad \therefore (OC)^2 = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cossec}^2 \alpha.$$

Como $\text{cossec } \alpha > 0$, pois $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que $OC = \text{cossec } \alpha$.

1.2. Interpretação geométrica da secante de um arco

Sejam a circunferência trigonométrica de centro O, o ponto $A(1, 0)$ e um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Consideremos o ponto S de intersecção do eixo das abscissas com a reta que tangencia a circunferência no ponto M.



Do triângulo MOS, temos:

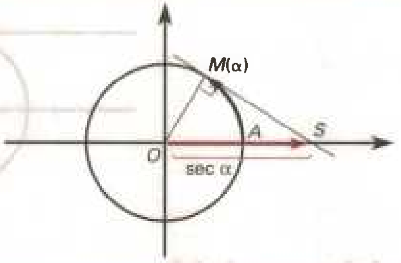
$$\cos\alpha = \frac{OM}{OS} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{OS} \therefore OS = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Logo, $\boxed{OS = \sec\alpha.}$

Denominando o eixo das abscissas de **eixo das secantes**, estendemos essse conceito para todo arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $\cos\alpha \neq 0$.

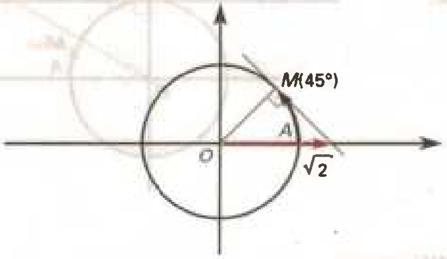
Definição

A secante de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $\cos\alpha \neq 0$, é a abscissa do ponto S de intersecção do eixo das secantes com a reta que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto M.



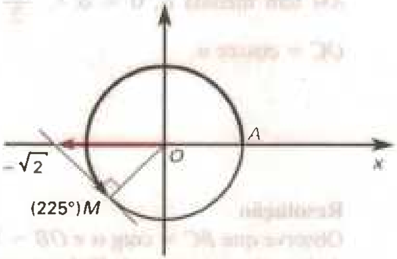
Exemplos

a)



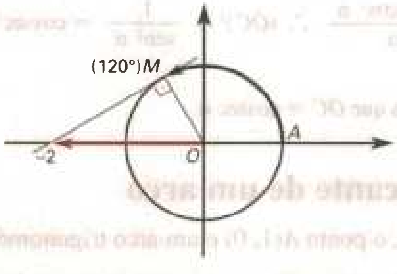
sec 45° = $\sqrt{2}$

c)



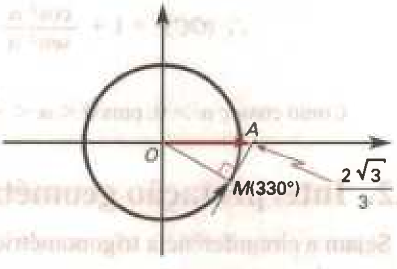
sec 225° = $-\sqrt{2}$

b)



sec 120° = −2

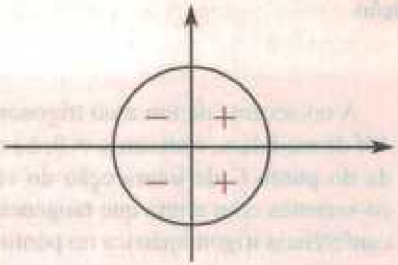
d)



sec 330° = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

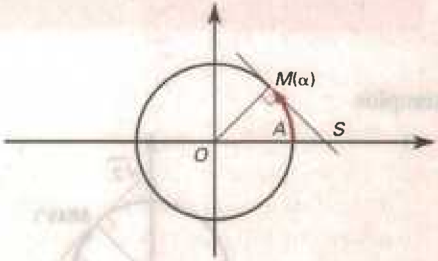
Variação de sinal da secante

A secante é positiva para arcos com extremidades no 1º ou no 4º quadrante, e negativa para arcos com extremidades no 2º ou no 4º quadrante da circunferência trigonométrica.



Exercício resolvido

R.7 Na circunferência trigonométrica ao lado, o arco $\widehat{AM}$ tem medida α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Mostrar que $MS = \text{tg}\,\alpha$.



Resolução

Observe que $OS = \sec\alpha$ e $OM = 1$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MOS, temos:

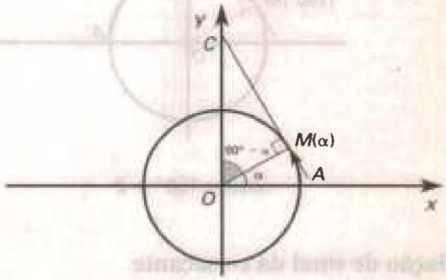
$$(OS)^2 = (OM)^2 + (MS)^2 \Rightarrow \sec^2\alpha = 1 + (MS)^2 \;\therefore\; (MS)^2 = \sec^2\alpha - 1$$

$$\therefore\; (MS)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} \;\therefore\; (MS)^2 = \text{tg}^2\,\alpha.$$

Como $\text{tg}\,\alpha > 0$, pois $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que $MS = \text{tg}\,\alpha$.

1.3. Interpretação geométrica da co-secante de um arco

Sejam a circunferência trigonométrica de centro O, o ponto $A(1, 0)$ e um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, $0 < \alpha < 90°$. Consideremos o ponto C de intersecção do eixo das ordenadas com a reta que tangencia a circunferência no ponto M.



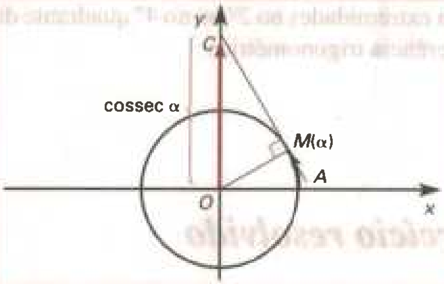
Do triângulo MOC, temos que: $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{OM}{OC} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{OC} \;\therefore\; OC = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$.

Logo, $\boxed{OC = \text{cossec}\,\alpha.}$

Denominando o eixo das ordenadas de **eixo das co-secantes**, estendemos esse conceito para todo arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$.

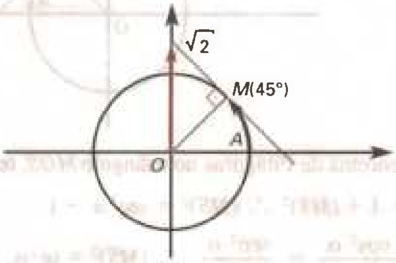
Definição

A co-secante de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $\text{sen}\,\alpha \neq 0$, é a ordenada do ponto C de intersecção do eixo das co-secantes com a reta que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto M.



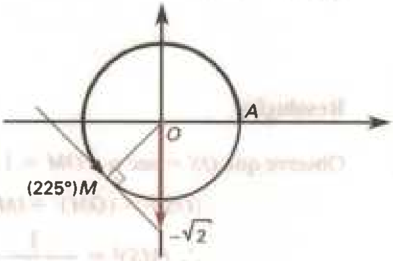
Exemplos

a)



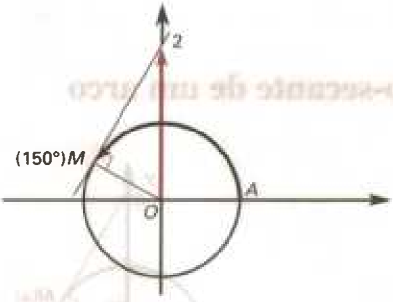
cossec 45° = $\sqrt{2}$

c)



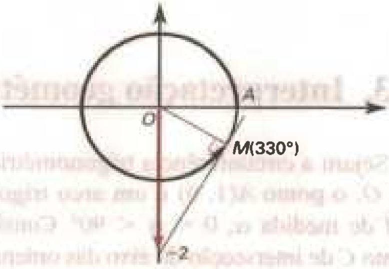
cossec 225° = $-\sqrt{2}$

b)



cossec 150° = 2

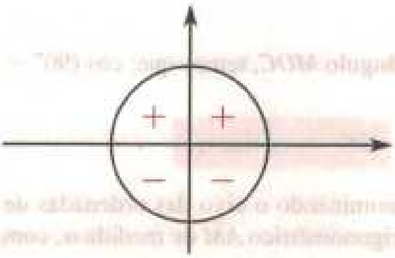
d)



cossec 330° = −2

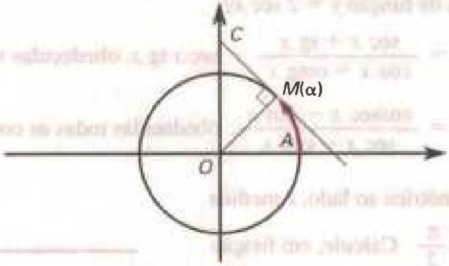
Variação de sinal da co-secante

A co-secante é positiva para arcos com extremidades no 1º e no 2º quadrante, e negativa para arcos com extremidades no 3º e no 4º quadrante.



Exercício resolvido

R.8 Na circunferência trigonométrica abaixo, o arco $\widehat{AM}$ tem medida α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Mostre que $MC = \text{cotg}\,\alpha$.



Resolução

Observe que $OC = \text{cossec}\,\alpha$ e $OM = 1$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MOC, temos:

$$(OC)^2 = (OM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow \text{cossec}^2\,\alpha = 1^2 + (MC)^2 \therefore (MC)^2 = \text{cossec}^2\,\alpha - 1$$

$$\therefore (MC)^2 = \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha} - 1 = \frac{1 - \text{sen}^2\,\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} \therefore (MC)^2 = \text{cotg}^2\,\alpha.$$

Como $\text{cotg}\,\alpha > 0$, pois $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que $MC = \text{cotg}\,\alpha$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.7, B.9, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.6, B.8, B.10, C.2, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) cotg 45°

b) sec 0°

c) cossec 270°

B.2 Calcule o valor da expressão $E = \sec 60° + \text{cossec}\,30° - \text{cotg}^2\,30°$.

B.3 Resolva a equação $\text{cossec}\,x = \sqrt{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

B.4 Determine o conjunto solução da equação $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = 2\sec x$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.5 Sendo $\sec x = \frac{5}{4}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule o valor de $\text{cotg}\,x$.

B.6 Sendo $\text{cossec}\,x = 3$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\text{tg}\,x$.

B.7 Resolva a equação $\sec^2 x - 3\sec x + 2 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.8 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, de modo que $\text{cotg}^2\,x + \text{cotg}\,x = 0$.

B.9 Simplifique a expressão $E = \frac{(\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2\,x - 1)}{1 + \text{tg}^2\,x}$, com $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

B.10 Simplifique a expressão $E = \frac{\frac{\sec x}{\text{tg}\,x} + \frac{\text{cossec}\,x}{\text{cotg}\,x}}{\sec x \ \text{cossec}\,x}$, com $\text{sen}\,x \cos x \neq 0$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva a inequação $\sec x < 2$, para $0 \leq x < 2\pi$.

C.2 Determine o conjunto solução da inequação $\text{cossec}\,x \leq \sqrt{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

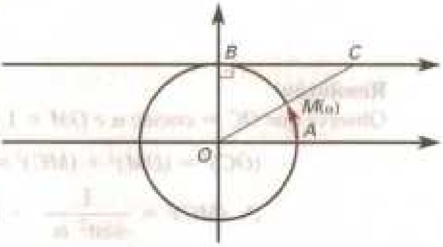
C.3 Obtenha o conjunto imagem da função $y = \text{cossec}\, x$. $\left(\textbf{Sugestão: } \begin{cases} y = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \\ -1 \leq \text{sen}\, x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq \dfrac{1}{y} \leq 1.\right)$

C.4 Qual é o conjunto imagem da função $y = 2 \sec x$?

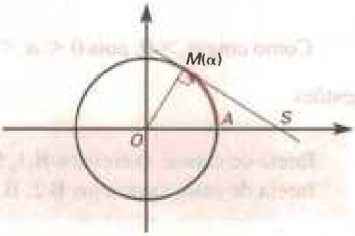
C.5 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\sec x + \text{tg}\, x}{\cos x + \text{cotg}\, x} - \sec x\, \text{tg}\, x$, obedecidas todas as condições de existência.

C.6 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{cossec}\, x - \text{sen}\, x}{\sec x - \cos x}$, obedecidas todas as condições de existência.

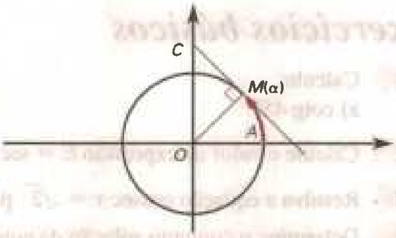
C.7 Na circunferência trigonométrica ao lado, a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$ é α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Calcule, em função de α, a medida do segmento $\overline{MC}$.



C.8 A medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, contido na circunferência trigonométrica ao lado, é α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Mostre que o perímetro do triângulo MOS é $\dfrac{1 + \text{sen}\, \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}$.



C.9 O arco $\overset{\frown}{AM}$, contido na circunferência trigonométrica ao lado, tem medida α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Calcule, em função de α, a área do triângulo MOC.



Questões dos vestibulares

V.1 (Acafe-SC) O valor numérico da expressão $\text{sen}\, 2\pi - \sec \dfrac{4\pi}{3} - \text{cossec}\, \dfrac{5\pi}{6}$ é:

a) 4
b) $\dfrac{1}{2}$
c) -2
d) 2
e) 0

V.2 (Fatec-SP) Se $f(x) = \dfrac{1}{2} \sec x + \sqrt{3} \sec \dfrac{x}{2}$, então $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ é igual a:

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$
b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
d) 2
e) 3

V.3 (PUC-RS) Sendo x um arco com extremidade no 2º quadrante e $\sec x = -\dfrac{5}{3}$, então $5\, \text{sen}^2 x - 3\, \text{tg}\, x$ é igual a:

a) $-\dfrac{32}{15}$
b) $-\dfrac{36}{5}$
c) $-\dfrac{4}{5}$
d) $\dfrac{4}{5}$
e) $\dfrac{36}{5}$

V.4 (UFRS) Se $0 \leq x < 2\pi$ e $\sec^2 x + \sec x = 0$, então o valor de x é:

a) 0
b) $\dfrac{\pi}{4}$
c) $\dfrac{\pi}{2}$
d) π
e) $\dfrac{3\pi}{2}$

Capítulo 66

Identidades

1. Identidade em uma variável

Consideremos o conjunto universo IR, dos números reais. Observando as igualdades $3x = 6$ e $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, percebemos que a primeira se torna uma proposição verdadeira **apenas para $x = 2$** e que a segunda se torna verdadeira para **qualquer valor real** atribuído à variável x. Por isso dizemos que a primeira igualdade **não** é uma identidade em IR e que a segunda **é** uma identidade em IR.

Definição

Uma igualdade em uma variável x, $f(x) = g(x)$, é uma identidade num conjunto universo U se, e somente se, a sentença $f(\alpha) = g(\alpha)$ é verdadeira para qualquer valor de α, $\alpha \in U$.

Exemplos

a) São identidades no universo $U =$ IR as seguintes igualdades:

- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- $x + x = 2x$;
- $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$.

b) Não são identidades no universo $U =$ IR as seguintes igualdades:

- $\dfrac{x}{x} = 1$, pois a sentença **não se torna** verdadeira para $x = 0$;
- $\sqrt{x^2} = x$, pois a sentença **não se torna** verdadeira para valores negativos de x, como, por exemplo, $x = -3$.

c) $\text{tg}\, x \cos x = \text{sen}\, x$, pois a sentença **não se torna** verdadeira para valores que não têm tangente, como, por exemplo $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Nota

Uma igualdade $f(x) = g(x)$ **pode não ser** identidade em um universo U e **ser** identidade em outro universo V.

Exemplo

A igualdade $\dfrac{x}{x} = 1$ não é identidade no universo $U =$ IR, porém é identidade no universo $V =$ IR*.

2. Técnicas para demonstração de identidades

Existem várias técnicas para se demonstrar uma identidade. Apresentaremos algumas.

I. Para provarmos que uma sentença $f(x) = g(x)$ é identidade em um universo U podemos seguir os passos:

- *passo 1:* provarmos que $f(x)$ e $g(x)$ estão definidos em U;
- *passo 2:* escolhemos um dos membros da igualdade $f(x) = g(x)$ e, a partir dele, obtemos o outro membro.

Exercício resolvido

R.1 Demonstre que a igualdade $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \sec x \,\text{cossec}\,x$ é identidade no universo

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\,x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}.$$

Resolução

Passo 1: Para existir a expressão $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x$ deve-se ter $\cos x \neq 0$ e $\text{sen}\,x \neq 0$. Logo, o primeiro membro da igualdade está definido em U.

Para existir a expressão $\sec x \,\text{cossec}\,x$ deve-se ter $\cos x \neq 0$ e $\text{sen}\,x \neq 0$. Logo, o segundo membro da igualdade está definido em U.

Passo 2: Partindo do primeiro membro da igualdade, temos:

$$\text{primeiro membro} = \text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\,x + \cos^2 x}{\cos x \,\text{sen}\,x} = \frac{1}{\cos x \,\text{sen}\,x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\text{sen}\,x} =$$

$$= \sec x \,\text{cossec}\,x = \text{segundo membro}.$$

Pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade é identidade em U. (c.q.d.)

II. Para provarmos que uma sentença $f(x) = g(x)$ é identidade em um universo U, podemos transformá-la na igualdade equivalente $f(x) - g(x) = 0$ e aplicamos a técnica (I).

Exercício resolvido

R.2 Prove que a sentença $\sec^2 x + \text{cossec}^2\,x = \sec^2 x \,\text{cossec}^2\,x$ é identidade no universo

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\,x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0)\}.$$

Resolução

Transformamos a igualdade em $\sec^2 x + \text{cossec}^2\,x - \sec^2 x \,\text{cossec}^2\,x = 0$ e aplicamos a técnica (I):

Passo 1: A expressão do primeiro membro está definida desde que $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$. Logo, está definida em U.

A expressão do segundo membro é a constante zero. Logo, está definida em U, pois não depende de x.

Como os dois membros da igualdade estão definidos em U, seguimos para o 2º passo.

Passo 2: Partindo do primeiro membro, temos:

$$\text{primeiro membro} = \sec^2 x + \text{cossec}^2\,x - \sec^2 x \,\text{cossec}^2\,x =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2\,x} - \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2\,x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2\,x} - \frac{1}{\cos^2 x \,\text{sen}^2\,x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\,x + \cos^2 x - 1}{\cos^2 x \,\text{sen}^2\,x} = \frac{1 - 1}{\cos^2 x \,\text{sen}^2\,x} = 0 = \text{segundo membro}.$$

Pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade é identidade em U. (c.q.d.)

III. Podemos provar que uma sentença $f(x) = g(x)$ é identidade em U, a partir de outra identidade $h(x) = t(x)$, em U.

Exercício resolvido

R.3 Demonstre que a igualdade $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$ é identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Sabemos que a igualdade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é identidade em $\mathbb{R}$ e, portanto, também o é em U, pois $U \subset \mathbb{R}$. Dividindo-se ambos os membros dessa igualdade por $\cos^2 x$, com $\cos x \neq 0$, temos:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.5, B.6, B.7, C.2, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Verifique se as sentenças abaixo são ou não identidades nos respectivos conjuntos universo:

a) $2(x + 3) = 2x + 6$ em $U = \mathbb{R}$;

b) $\frac{0}{x} = 0$ em $U = \mathbb{R}$;

c) $\frac{0}{x} = 0$ em $U = \mathbb{R}^*$;

d) $\text{tg}\, x \,\text{cotg}\, x = 1$ em $U = \mathbb{R}$;

e) $\text{tg}\, x \,\text{cotg}\, x = 1$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

B.2 Demonstre que cada uma das igualdades é identidade no respectivo universo U:

a) $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$;

b) $(\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x)\, \text{sen}\, x = \sec x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \cos x \neq 0\}$;

c) $(1 + \text{sen}\, x)(\text{cossec}\, x - 1) \sec x = \text{cotg}\, x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \cos x \neq 0\}$;

d) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$ em $U = \mathbb{R}$.

B.3 A igualdade $\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x$ é uma identidade em $U = \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

B.4 Determine o mais amplo universo U, $U \subset \mathbb{R}$, de modo que a igualdade $\cos x \sec x = 1$ seja identidade em U.

B.5 Prove que cada uma das igualdades, a seguir, é identidade no respectivo universo U:

a) $(\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2 x - 1) = 1$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$;

b) $\text{tg}\, x \cos x = \text{cossec}\, x\, \text{sen}^2 x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \cos x \neq 0\}$;

c) $(\sec^2 x - 1) \cos^2 x = (\text{cossec}^2 x - 1)\, \text{tg}^2 x - \cos^2 x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$;

d) $(\text{sen}\, x + \cos x)^2 - 2\, \text{sen}\, x \cos x - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$ em $U = \mathbb{R}$.

B.6 A igualdade $\text{sen}\, x\, \text{cossec}\, x = 1$ é uma identidade em $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

B.7 Determine o mais amplo universo U, $U \subset \mathbb{R}$, de modo que a igualdade $\cos x\, \text{tg}\, x = \text{sen}\, x$ seja identidade em U.

Exercícios complementares

C.1 Determine o valor de k de modo que a igualdade $(\cos x + \text{sen}\, x)^2 + k\, \text{sen}\, x \cos x - 1 = 0$ seja uma identidade em $\mathbb{R}$.

C.2 A igualdade $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$ é uma identidade em $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

C.3 Determine o valor de k, sabendo que a igualdade $\frac{\text{sen } x - k\cos^2 x}{\text{sen } x} - 2\,\text{sen } x = \frac{\text{sen } x - k}{\text{sen } x}$ é uma identidade em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0\}$.

C.4 A igualdade $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$ é uma identidade em $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

C.5 Determine os valores de k e M, sabendo que a igualdade $5\,\text{sen } x + k\cos x = M\,\text{sen } x + 3\cos x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Se $\text{sen } \theta \neq 1$, a expressão $\frac{\cos^2\theta}{1 - \text{sen } \theta}$ é idêntica a:

a) $\text{tg } \theta$

b) $\text{sen } \theta \cos \theta$

c) $1 + \cos \theta$

d) $1 + \text{sen } \theta$

e) nenhuma das respostas anteriores.

V.2 (FGV-SP) A expressão $\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x}$, para $\text{sen } x \neq 0$, é idêntica a:

a) $\frac{2}{\cos x}$

b) $\frac{1}{\text{sen } x}$

c) $\sec x$

d) $2\,\text{cossec } x$

e) $\frac{\cos x}{1 + \text{sen } x}$

V.3 (PUC-SP) A expressão $\frac{\text{cossec } x - \text{sen } x}{\sec x - \cos x}$, com $\cos x \neq 0$ e $\text{sen } x \neq 0$, é identicamente igual a:

a) $\text{cotg}^3 x$

b) $\sec^2 x$

c) $\text{sen}^2 x + \cos x$

d) $\text{tg}^2 x + \sec x$

e) $\text{cossec}^3 x$

Capítulo 67

Identidades notáveis

1. Aplicação de identidades na resolução de problemas

Duas identidades merecem destaque devido a suas múltiplas aplicações em resoluções de problemas. São elas:

a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para $\cos x \neq 0$ e b) $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$, para $\operatorname{sen} x \neq 0$.

Demonstrações

Sabemos que: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (I) é uma identidade em $\mathbb{R}$.

a) Supondo $\cos x \neq 0$ e dividindo ambos os membros de (I) por $\cos^2 x$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

b) Supondo $\operatorname{sen} x \neq 0$ e dividindo ambos os membros de (I) por $\operatorname{sen}^2 x$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Exercícios resolvidos

R.1 Sabendo que $\operatorname{tg} x = 3$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\sec x$.

Resolução

Sabemos que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Substituindo a $\operatorname{tg} x$ por 3, temos:

$$\sec^2 x = 1 + 3^2 \therefore \sec^2 x = 10 \therefore \sec x = \pm\sqrt{10}.$$

Como x é um arco do 3º quadrante e a secante tem o mesmo sinal do co-seno, temos:

$$\sec x = -\sqrt{10}.$$

R.2 Determine o valor real de a de modo que $\operatorname{cotg} x = \sqrt{a - 1}$ e $\operatorname{cossec} x = a$.

Resolução

Condição de existência: $a - 1 \geq 0$ e $a \leq -1$ ou $a \geq 1 \therefore a \geq 1$.

Sabemos que $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$. Logo, temos:

$$a^2 = 1 + (\sqrt{a-1})^2 \therefore a^2 = 1 + a - 1 \therefore a^2 - a = 0 \therefore a(a - 1) = 0 \therefore a = 0 \text{ ou } a = 1.$$

A condição de existência exige $a \geq 1$; logo, temos como resposta $a = 1$.

R.3 Resolva a equação $\sec^2 x + \operatorname{tg} x = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

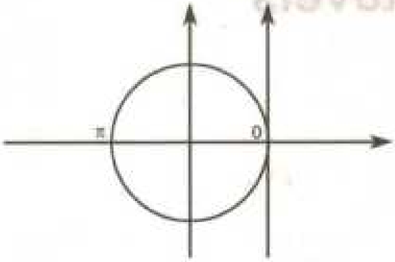
Resolução

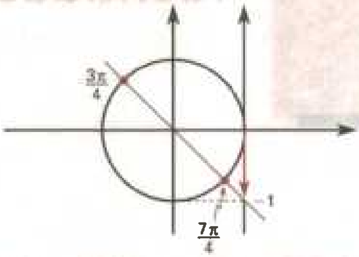
Condição de existência: $\cos x \neq 0$

Substituindo $\sec^2 x$ por $1 + \operatorname{tg}^2 x$ temos: $1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \therefore \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0$

Então temos:

- $\operatorname{tg} x = 0$
- ou $\operatorname{tg} x = -1$





$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$

$\therefore x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Temos, então, como conjunto solução: $S = \left\{0, \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

R.4 Determine os valores de x e y no sistema: $\begin{cases} \operatorname{tg} x = y \\ \sec x = \sqrt{2y} \end{cases}$ com $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Condições de existência: $\cos x \neq 0$ e $(\sqrt{2y} \leqslant -1$ ou $\sqrt{2y} \geqslant 1) \Rightarrow \cos x \neq 0$ e $y \geqslant \frac{1}{2}$.

Sabemos que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Logo, temos: $(\sqrt{2y})^2 = 1 + y^2 \Rightarrow 2y = 1 + y^2 \therefore y^2 - 2y + 1 = 0 \therefore y = 1$.

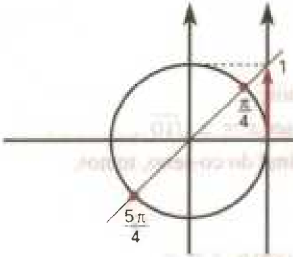
Substituindo $y = 1$ nas equações do sistema, temos: $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \quad \text{(I)} \\ \sec x = \sqrt{2}. \quad \text{(II)} \end{cases}$

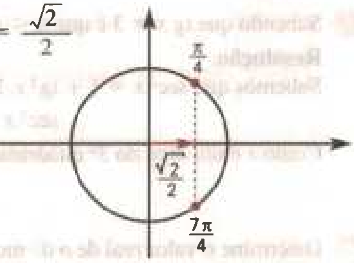
Resolvendo cada uma das equações do sistema, temos:

I. $\operatorname{tg} x = 1$

II. $\sec x = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \therefore \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$





$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

O valor de x que satisfaz as duas equações simultaneamente é $\frac{\pi}{4}$.

Temos, finalmente, $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = 1$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.6, B.7, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que cotg $x = \sqrt{15}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de cossec x.

B.2 Determine o valor da tg x, sabendo que sec $x = \sqrt{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

B.3 Determine x, $0 \leqslant x < 2\pi$, sabendo que sec $x = a + 1$ e tg $x = a$.

B.4 Simplifique a expressão $E = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \sec x}$, com $\cos x \neq 0$ e $\cos x \neq -1$.

B.5 Resolva a equação $\sec^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.)

B.6 Determine o conjunto solução da equação $\sec^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x = 2$ para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.)

B.7 Demonstre que a igualdade: $\sec^2 x \ \operatorname{cotg}^2 x \ + \operatorname{cossec}^2 x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x + \sec^2 x$ é uma identidade no conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \ \cos x \neq 0\}$.

Exercícios complementares

C.1 Determine os valores de x e y no sistema: $\begin{cases} \operatorname{tg} x = y - 1 \\ \sec x = y \end{cases}$ com $0 \leqslant x < 2\pi$.

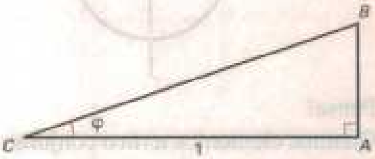
C.2 Determine os valores de x e y no sistema: $\begin{cases} \operatorname{cotg} x = y \\ \operatorname{cossec} x = y + 1 \end{cases}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.3 Se $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x$, com $\cos x \neq 0$, então:

a) $y = 1 - \sec^2 x + \sec^4 x$
b) $y = (1 - \sec^2 x)^2$
c) $y = 1 - \sec^2 x - \sec^4 x$
d) $y = 1 + \sec^2 x + \sec^4 x$
e) $y = 1$

C.4 Dado o triângulo retângulo ao lado.

a) Determine, em função de φ, as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.
b) Com os valores obtidos no item (a), aplique o teorema de Pitágoras.



Questões dos vestibulares

V.1 (Cescea-SP) O conjunto solução da equação $3\operatorname{tg}^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$, no intervalo fechado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é:

a) $\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0\right\}$
b) $\left\{\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$
c) $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$
d) $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right\}$
e) n.d.a.

(**Sugestão:** $\frac{7}{\cos x} = 7\sec x$; $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.)

V.2 (Cescea-SP) As raízes da equação do 2º grau $x^2 - (2\operatorname{tg} a)x - 1 = 0$ são:

a) tg a ± cossec a
b) tg a ± cos a
c) tg a ± sec a
d) tg a ± cotg a
e) tg a ± sen a

V.3 (UFRS) A expressão $\operatorname{tg}^2 5° - \sec^2 5°$ vale:

a) 0
b) 1
c) -1
d) 5
e) -5

Capítulo 68

Girando as infinitas voltas da circunferência trigonométrica

1. Introdução

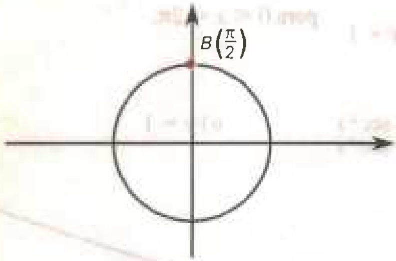
Vimos como se resolve uma equação trigonométrica quando a incógnita pertence a um intervalo limitado.

Recordemos.

Exemplo

Resolver a equação sen $x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução



O ponto que possui a ordenada (seno) igual a 1 é o ponto B. Existe um único valor de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, associado ao ponto B: o $\dfrac{\pi}{2}$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Pense!

Quantos elementos teria o conjunto solução da equação sen $x = 1$, se a incógnita x não estivesse limitada? Isto é, se x pudesse pertencer a qualquer volta da circunferência trigonométrica?

Claro que o conjunto solução teria infinitos elementos, pois ao ponto B podemos associar infinitas medidas nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica.

Estudaremos um método para obter o conjunto solução de uma equação trigonométrica nas infinitas voltas da circunferência, ou seja, no universo $U = \mathbb{R}$. Para compreendermos esse método, necessitamos do conceito de **progressão aritmética**.

Um estudo detalhado das progressões aritméticas só será feito no volume 2 desta obra. Neste capítulo apresentaremos apenas o conceito desse tipo de progressão, o que nos auxiliará no estudo das infinitas voltas da circunferência trigonométrica.

2. Progressão aritmética

Dados dois números reais a e r, consideremos os números:

$$(\ldots\ a - 3r,\ a - 2r,\ a - r,\ a + 0r,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots).$$

Dizemos que esses números formam, nessa ordem, uma progressão aritmética (**P.A.**) de razão r.

Representamos uma P.A. sempre entre parênteses. Os parênteses indicam que a ordem em que estão dispostos os elementos (seqüência) deve ser preservada.

Observe que qualquer termo da progressão aritmética é igual à soma do número a com o produto kr, onde k representa um número inteiro, ou seja, $k \in \mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Por isso dizemos que um termo geral da progressão aritmética é:

$$x = a + kr, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplos

a) A seqüência: $(\dots -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão $r = 3$. Um termo geral dessa P.A. é:

$$x = 1 + k \cdot 3, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Nota

Escolhemos como valor de a o número 1; porém poderíamos ter escolhido qualquer elemento da progressão aritmética como valor de a. Isto é, um termo geral poderia ser escrito na forma:

$$x = 4 + k \cdot 3, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

b) A seqüência: $(\dots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão $r = \pi$. Um termo geral dessa P.A. é:

$$x = 0 + k\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Determine a razão e um termo geral da progressão aritmética: $(\dots -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots)$.

Resolução

Cada termo da P.A. é igual à soma do termo anterior com 5. Logo, a razão da P.A. é $r = 5$.
Um termo geral dessa P.A. é $x = 2 + k \cdot 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

R.2 Determine a progressão aritmética da qual um termo geral é: $x = 6 + k \cdot 3$ com $k \in \mathbb{Z}$.

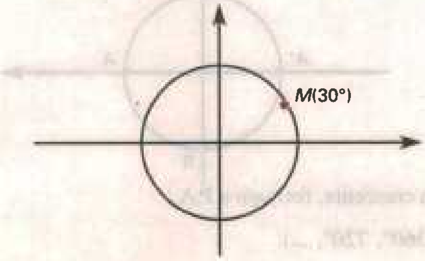
Resolução

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ k = -3 & \Rightarrow x = -3 \\ k = -2 & \Rightarrow x = 0 \\ k = -1 & \Rightarrow x = 3 \\ k = 0 & \Rightarrow x = 6 \\ k = 1 & \Rightarrow x = 9 \\ k = 2 & \Rightarrow x = 12 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Logo, temos a progressão aritmética: $(\dots -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots)$.

3. Expressão geral das medidas de um arco

Consideremos na circunferência trigonométrica o ponto M, associado à medida 30°.

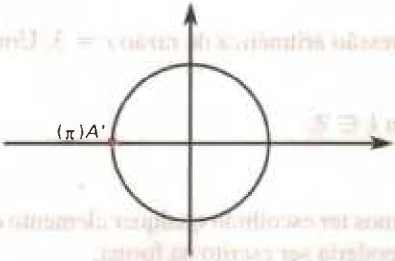


Escrevendo, em ordem crescente, as infinitas medidas associadas ao ponto M, temos:
$(\dots -690°, -330°, 30°, 390°, 750°, \dots)$.

Observe que essa seqüência é uma progressão aritmética de razão $r = 360°$. Portanto uma expressão geral das medidas associadas ao ponto M é:

$$x = 30° + k \cdot 360°, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos agora o ponto A', associado à medida π rad, na circunferência trigonométrica:



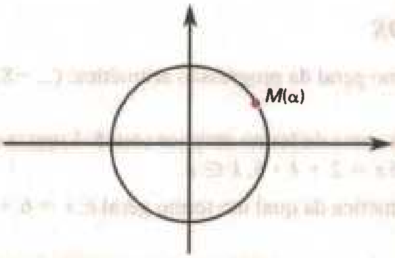
Escrevendo, em ordem crescente, as infinitas medidas associadas ao ponto A', temos:

$$(\ldots\ -3\pi,\ -\pi,\ \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi,\ \ldots).$$

Essa seqüência é uma progressão aritmética de razão $r = 2\pi$. Portanto uma expressão geral das medidas associadas ao ponto A' é:

$$x = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Podemos generalizar os resultados anteriores. Seja α uma medida associada a um ponto M da circunferência trigonométrica:



Uma expressão geral das medidas associadas ao ponto M é:

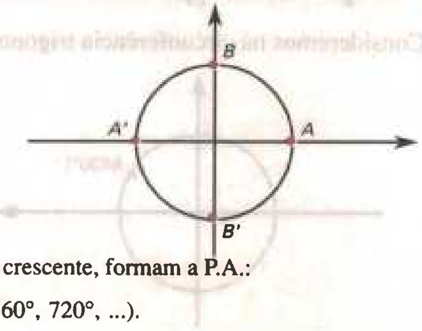
$$x = \alpha + k \cdot 360°, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ se } \alpha \text{ for uma medida em graus,}$$

ou

$$x = \alpha + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ se } \alpha \text{ for uma medida em radianos.}$$

Exercícios resolvidos

R.3 Dê uma expressão geral das medidas em graus associadas a cada um dos pontos assinalados (A, B, A' e B') na circunferência trigonométrica, ao lado.



Resolução

- As medidas em graus associadas ao ponto A, em ordem crescente, formam a P.A.:

$$(\ldots\ -720°,\ -360°,\ 0°,\ 360°,\ 720°,\ \ldots).$$

Assim, um termo geral das medidas associadas ao ponto A é: $x_A = 0° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$.

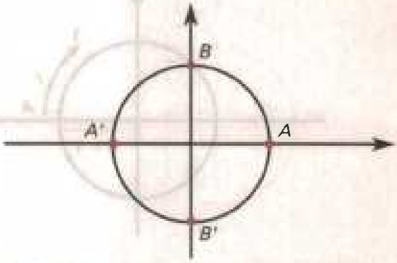
- Analogamente, as medidas associadas ao ponto B formam uma P.A. de razão $r = 360°$. Como 90° é um termo dessa P.A., temos que uma expressão geral das medidas associadas ao ponto B é:

$$x_B = 90° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}.$$

- Analogamente, temos que:

$$x_{A'} = 180° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z} \text{ e } x_{B'} = 270° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}.$$

R.4 Dê uma expressão geral das medidas em radianos associadas a cada um dos pontos assinalados (A, B, A' e B') na circunferência trigonométrica ao lado.



Resolução

- As medidas em radianos associadas ao ponto A, em ordem crescente, formam a P.A.:

$$(\ldots\ -4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots).$$

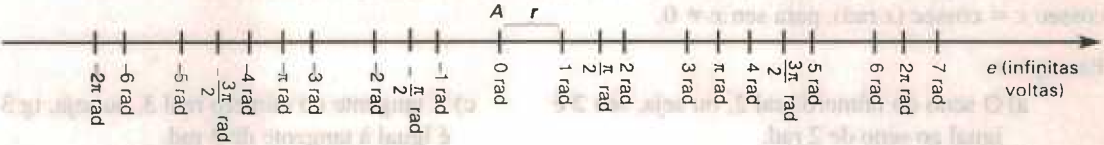
Assim, um termo geral das medidas associadas ao ponto A é: $x_A = 0 + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Analogamente, a cada um dos pontos B, A' e B' está associada uma P.A. de razão 2π.

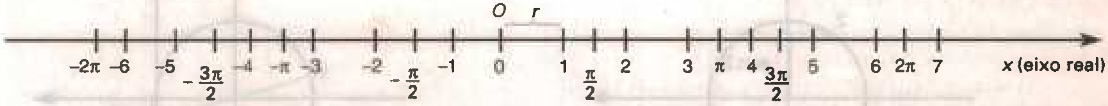
Assim, temos: $x_B = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$; $x_{A'} = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$; $x_{B'} = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. Aplicação do conjunto dos números reais (ℝ) sobre o conjunto de pontos da circunferência trigonométrica

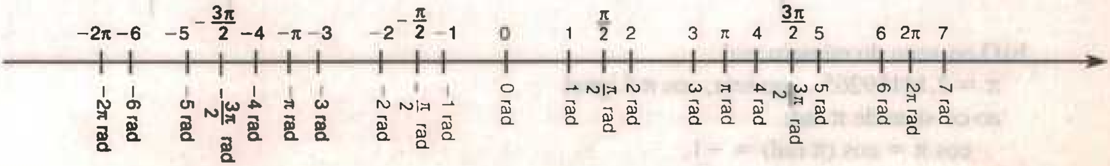
Vamos definir uma função f que associa cada número real a um ponto da circunferência trigonométrica. Para compreendermos essa função, vamos "desenrolar" as infinitas voltas da circunferência trigonométrica transformando-as num eixo Ae em que a cada ponto está associada uma medida em radianos:


A
r
−2π rad
−6 rad
−5 rad
−3π/2 rad
−4 rad
−π rad
−3 rad
−2 rad
−π/2 rad
−1 rad
0 rad
1 rad
π/2 rad
2 rad
3 rad
π rad
4 rad
3π/2 rad
5 rad
6 rad
2π rad
7 rad
e (infinitas voltas)

Tomemos um eixo real Ox subdividido em unidades iguais ao raio r da circunferência trigonométrica:


O
r
−2π
−6
−5
−3π/2
−4
−π
−3
−2
−π/2
−1
0
1
π/2
2
3
π
4
3π/2
5
6
2π
7
x (eixo real)

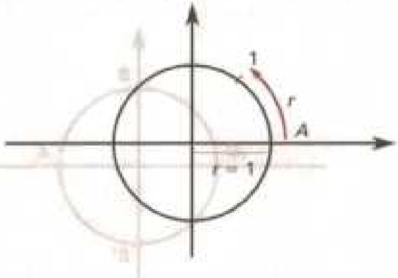
Sobrepondo esses dois eixos de modo que cada ponto M de abscissa α rad do eixo Ae coincida com o ponto M' de abscissa α do eixo Ox, temos:


−2π
−6
−5
−3π/2
−4
−π
−3
−2
−π/2
−1
0
1
π/2
2
3
π
4
3π/2
5
6
2π
7
−2π rad
−6 rad
−5 rad
−3π/2 rad
−4 rad
−π rad
−3 rad
−2 rad
−π/2 rad
−1 rad
0 rad
1 rad
π/2 rad
2 rad
3 rad
π rad
4 rad
3π/2 rad
5 rad
6 rad
2π rad
7 rad

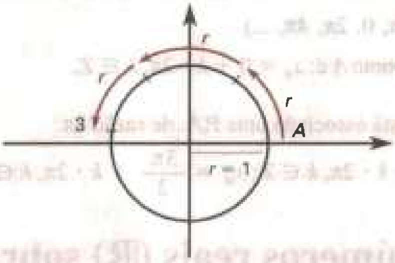
Desse modo, associamos cada número real α à medida α rad. Podemos, agora, definir a função $f: \mathbb{R} \rightarrow C$, onde C é a circunferência trigonométrica, tal que cada número real α é associado ao ponto de C que é extremidade do arco de medida α rad.

Exemplos

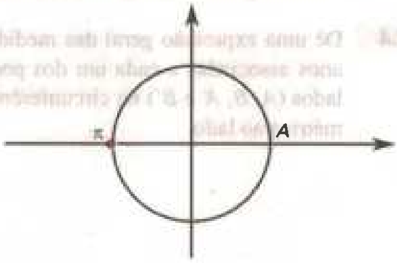
a) O número real 1 é associado à extremidade do arco de 1 rad:



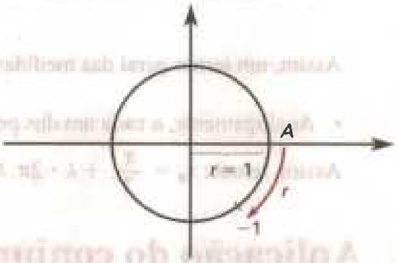
b) O número real 3 é associado à extremidade do arco de 3 rad:



c) O número real $\pi = 3{,}14159265...$ é associado à extremidade do arco de π rad:



d) O número real -1 é associado à extremidade do arco de -1 rad:

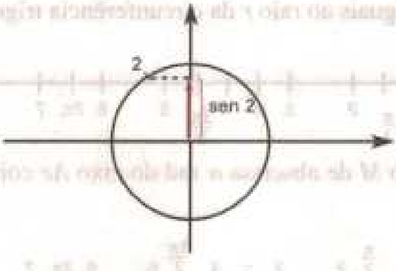


4.1. Seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante e co-secante de números reais

Vimos que a cada ponto da circunferência trigonométrica podem ser associados números reais. Assim, dado um número real x, define-se: $\text{sen}\, x = \text{sen}\,(x \text{ rad})$; $\cos x = \cos\,(x \text{ rad})$; $\text{tg}\, x = \text{tg}\,(x \text{ rad})$, para $\cos x \neq 0$; $\text{cotg}\, x = \text{cotg}\,(x \text{ rad})$, para $\text{sen}\, x \neq 0$; $\sec x = \sec\,(x \text{ rad})$, para $\cos x \neq 0$; $\text{cossec}\, x = \text{cossec}\,(x \text{ rad})$, para $\text{sen}\, x \neq 0$.

Exemplos

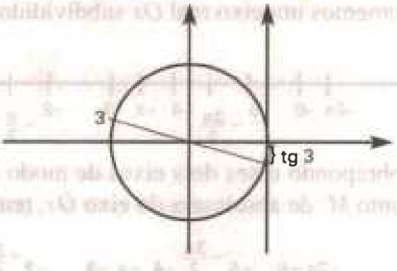
a) O seno do número real 2, ou seja, sen 2 é igual ao seno de 2 rad.



b) O co-seno do número real $\pi = 3{,}14159265...$, ou seja, $\cos \pi$ é igual ao co-seno de π rad:

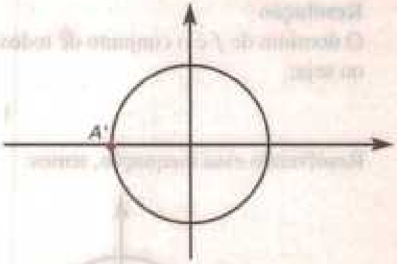
$\cos \pi = \cos\,(\pi \text{ rad}) = -1.$

c) A tangente do número real 3, ou seja, tg 3 é igual à tangente de 3 rad.



Exercícios resolvidos

R.5 Determine uma expressão geral dos números reais associados ao ponto A' da circunferência trigonométrica ao lado.



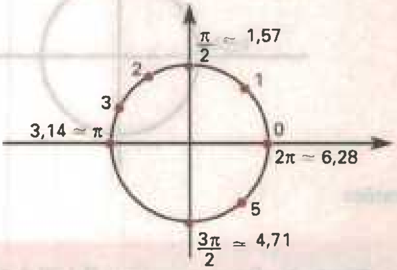
Resolução

Identificamos os números reais associados ao ponto A' com as medidas em radianos associados a A'. Logo, temos: $x_{A'} = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

R.6 Determine o sinal do produto $P = \text{sen } 1 \text{ sen } 2 \cos 3 \cos 5$.

Resolução

Os números reais 1, 2, 3 e 5 são identificados com as medidas 1 rad, 2 rad, 3 rad e 5 rad, que pertencem ao 1º, ao 2º, ao 2º e ao 4º quadrante, respectivamente.



Assim, $\text{sen } 1 > 0$; $\text{sen } 2 > 0$; $\cos 3 < 0$; $\cos 5 > 0$.
Logo, $P < 0$.

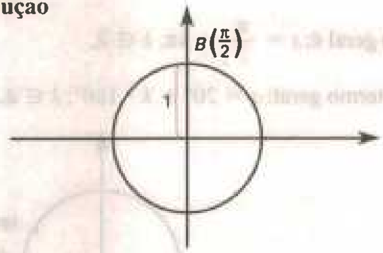
5. Resolução de uma equação trigonométrica em ℝ

Resolver uma equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ em ℝ significa determinar o conjunto de todos os números reais α (α rad) nas infinitas voltas da circunferência, tais que $f(\alpha) = g(\alpha)$ seja uma sentença verdadeira.

Exercícios resolvidos

R.7 Resolver em ℝ a equação $\text{sen } x = 1$.

Resolução



O ponto da circunferência trigonométrica que possui o seno (ordenada) igual a 1 é o ponto B.

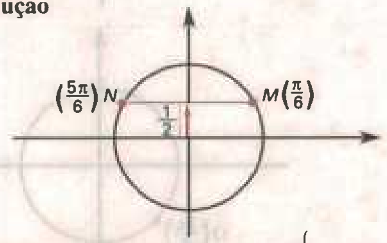
O conjunto solução da equação é formado pelos infinitos números reais (medidas em radianos) associados ao ponto B. A expressão geral desses números é:

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, temos como conjunto solução: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.8 Resolver em ℝ a equação $\text{sen } x = \frac{1}{2}$.

Resolução


$\left(\frac{5\pi}{6}\right) N$
$M\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$\frac{1}{2}$

As expressões gerais dos números reais associados aos pontos M ou N são:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Temos como conjunto solução: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

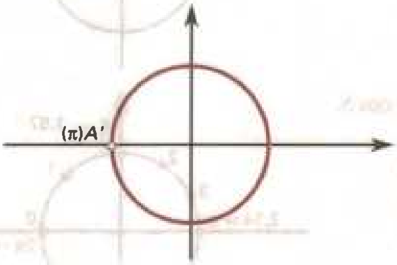
R.9 Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais que satisfazem a condição de existência da função, ou seja:

$$1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1.$$

Resolvendo essa inequação, temos:



Note que o único ponto da circunferência que possui a abscissa (co-seno) igual a -1 é o ponto A'. Assim, o domínio de f é formado por todos os números reais que não estão associados ao ponto A', ou seja:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.5, B.6, B.8, B.9, B.12 (a até d), C.5, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.7, B.10, B.11, B.12 (e até h), C.1, C.2, C.3, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Determine a razão e um termo geral de cada uma das progressões aritméticas:

a) $(\dots -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots)$;

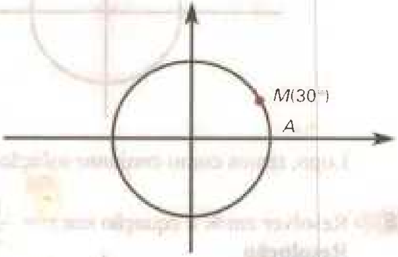
b) $\left(\dots -\dfrac{3\pi}{2}, -\pi, -\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, \dots\right)$;

c) $(\dots -680°, -320°, 40°, 400°, 760°, \dots)$.

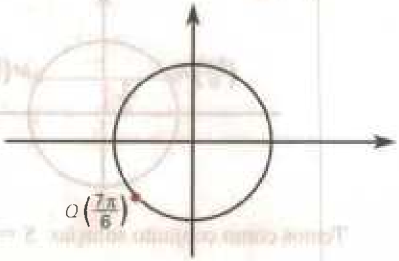
B.2 Determine a progressão aritmética da qual um termo geral é: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B.3 Determine a progressão aritmética que possui como termo geral: $x = 20° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$.

B.4 Dê uma expressão geral das medidas em graus associadas ao ponto M da circunferência trigonométrica ao lado.



B.5 Dê uma expressão geral das medidas, em radianos, associadas ao pnto Q da circunferência trigonométrica ao lado.



B.6 Em que quadrante da circunferência trigonométrica está o ponto associado a cada um dos números reais abaixo?

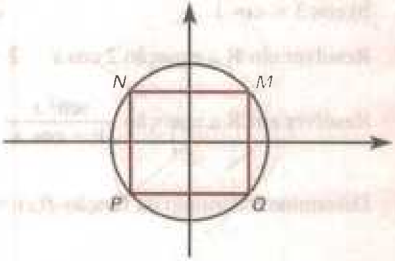
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

B.7 Em que quadrante da circunferência trigonométrica está o ponto associado a cada um dos números reais abaixo?

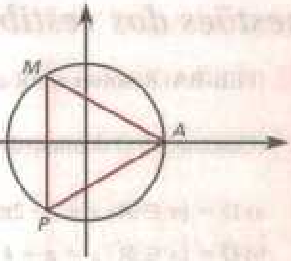
a) -1 b) -2 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5}$ f) $-\sqrt{5}$

B.8 Determine o sinal do produto $P = \text{sen } 4 \cos 3 \text{ sen } 5$.

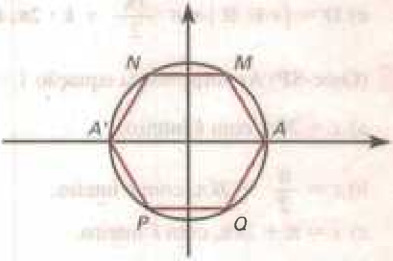
B.9 O quadrilátero *MNPQ* é um quadrado e *M* é o ponto médio do primeiro quadrante. Determine uma expressão geral dos números reais associados ao ponto *M*. Faça o mesmo com cada um dos pontos *N*, *P* e *Q*.



B.10 O triângulo *AMP* é equilátero. Determine uma expressão geral dos números reais associados a cada um dos vértices desse triângulo.



B.11 O polígono *AMNA'PQ* é um hexágono regular. Determine uma expressão geral dos números reais associados a cada vértice desse polígono.



B.12 Resolver em IR as equações:

a) $\text{sen } x = -1$
c) $\cos x = -1$
e) $\cos x = 1$
g) $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$
b) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$
f) $\sec x = -2$
h) $\text{sen}^2 x + 4 \cos x - 4 = 0$

Exercícios complementares

C.1 Considerando o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, pode-se afirmar que:

a) $0 \in A$ b) $\frac{4\pi}{3} \in A$ c) $\frac{29\pi}{3} \in A$ d) $\frac{31\pi}{3} \in A$ e) $\frac{10\pi}{3} \in A$

C.2 Considerando o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, pode-se afirmar que:

a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}, \forall x, x \in A$
c) $\text{sen } x = 1, \forall x, x \in A$
e) $\text{tg } x = 1, \forall x, x \in A$
b) $\text{sen } x = 0, \forall x, x \in A$
d) $\cos x = 1, \forall x, x \in A$

C.3 Dados os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{5\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, pode-se afirmar que:

a) $A = B$
b) $A \cap B = \varnothing$
c) $\frac{3\pi}{2} \in A$
d) $\frac{3\pi}{2} \in B$
e) $\frac{\pi}{2} \notin B$

C.4 Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $\text{sen } 3 > \text{sen } 2$
b) $\cos 3 < \cos 1$
c) $\text{tg } 2 < 0$
d) $\text{sen } 2 \text{ sen } 4 > 0$
e) $\text{sen}^2 5 + \cos^2 5 = 1$
f) $\text{tg } 5 > 0$

C.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $2 \cos x - 2 = \text{sen}^2 x$.

C.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\dfrac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \dfrac{1}{2}$.

C.7 Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{1 - \text{sen } x}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (FEB-BA) Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $2 \text{ tg}^2 x + \sec x + 1 = 0$.

V.2 (Cescem-SP) O domínio da função $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen } x}$ é:

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
e) $D = \mathbb{R}$

V.3 (Osec-SP) As soluções da equação $1 - \text{sen } x + \cos^2 x = 0$ são:

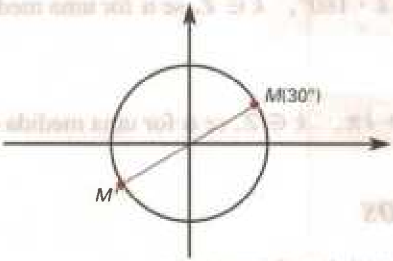
a) $x = 2k\pi$, com k inteiro.
b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com k inteiro.
c) $x = \pi + 2k\pi$, com k inteiro.
d) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com k inteiro.
e) n.d.a.

Capítulo 69

Ampliação do conceito de expressão geral das medidas de arcos

1. Pontos simétricos em relação à origem do sistema

Consideremos os pontos *M* e *M'* da circunferência trigonométrica abaixo, simétricos em relação à origem do sistema.



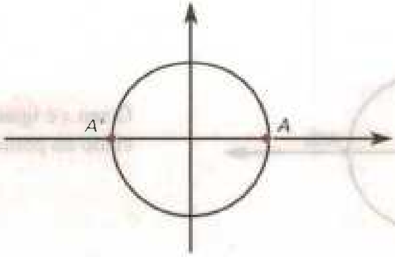
Escrevendo, em ordem crescente, as medidas associadas a esses pontos, temos:

$$(\ldots\ \underbrace{-330°}_{M}\ ,\ \underbrace{-150°}_{M'}\ ,\ \underbrace{30°}_{M}\ ,\ \underbrace{210°}_{M'}\ ,\ \underbrace{390°}_{M}\ ,\ \underbrace{570°}_{M'}\ \ldots).$$

Essa seqüência é uma progressão aritmética de razão $r = 180°$. Portanto uma expressão geral das medidas associadas aos pontos *M* ou *M'* é:

$$\boxed{x = 30° + k \cdot 180°,}\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como outro exemplo, consideremos os pontos *A* e *A'* da circunferência trigonométrica abaixo.



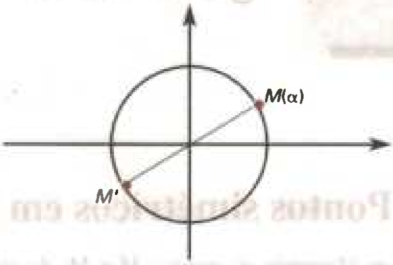
Escrevendo, em ordem crescente, os números reais (medidas em radianos) associados a esses pontos, temos:

$$(\ldots\ \underbrace{-3\pi}_{A'}\ ,\ \underbrace{-2\pi}_{A}\ ,\ \underbrace{-\pi}_{A'}\ ,\ \underbrace{0}_{A}\ ,\ \underbrace{\pi}_{A'}\ ,\ \underbrace{2\pi}_{A}\ ,\ \underbrace{3\pi}_{A'}\ ,\ldots).$$

Essa seqüência é uma progressão aritmética de razão $r = \pi$. Portanto uma expressão geral dos números reais associados aos pontos A ou A' é:

$$x = 0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Podemos generalizar os resultados anteriores. Se α é uma medida associada a um dos pontos M ou M' da circunferência trigonométrica, simétricos em relação à origem do sistema, então uma expressão geral das infinitas medidas associadas a esses pontos é:



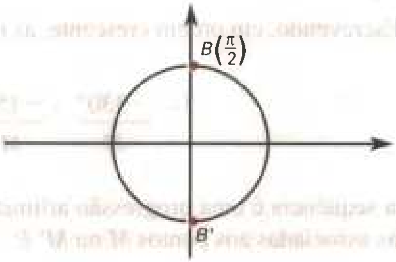
$$x = \alpha + k \cdot 180°, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ se } \alpha \text{ for uma medida em graus,}$$

ou

$$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ se } \alpha \text{ for uma medida em radianos.}$$

Exercícios resolvidos

R.1 Determine uma expressão geral dos números reais associados aos pontos B ou B' da circunferência trigonométrica ao lado.



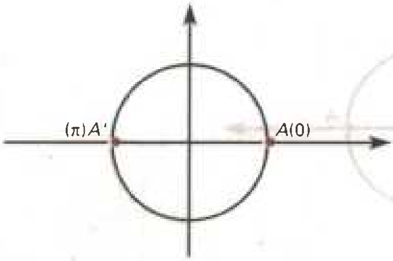
Resolução

Os pontos B e B' são simétricos em relação à origem do sistema. Logo, os números reais associados a eles, em ordem crescente, formam uma P.A. de razão $r = \pi$. Temos, então:

$$x_{BB'} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

R.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação sen $x = 0$.

Resolução



O sen x é igual a zero se x for um número real associado ao ponto A ou A'.

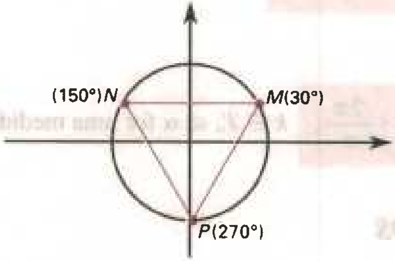
Como A e A' são simétricos em relação à origem do sistema, os números reais associados a eles, em ordem crescente, formam uma P.A. de razão $r = \pi$. Temos, então:

$$x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Pontos que dividem a circunferência trigonométrica em arcos de mesma medida

Consideremos os pontos M, N e P, dividindo a circunferência trigonométrica em três arcos de medidas iguais a 120°:



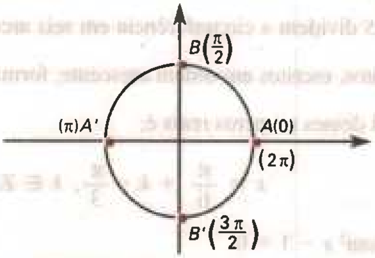
Escrevendo, em ordem crescente, as medidas associadas a esses pontos, temos:

$$(\dots\ -210°,\ -90°,\ 30°,\ 150°,\ 270°,\ 390°,\ 510°,\ \dots).$$

Essa seqüência é uma progressão aritmética de razão $r = 120°$. Portanto uma expressão geral das medidas associadas a esses pontos é:

$$x = 30° + k \cdot 120°, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos os pontos A, B, A', B', sobre a circunferência trigonométrica:


$B\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$(\pi)A'$
$A(0)$
(2π)
$B'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

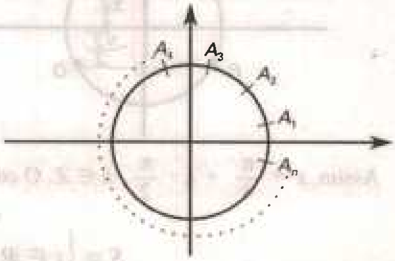
Escrevendo, em ordem crescente, os números reais associados a esses pontos, temos:

$$\left(\dots\ -\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \dots\right).$$

Essa seqüência é uma progressão aritmética de razão $r = \frac{\pi}{2}$. Portanto uma expressão geral dos números reais associados a esses pontos é:

$$x = 0 + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Podemos generalizar os resultados anteriores da seguinte maneira: sejam n pontos dividindo a circunferência trigonométrica em n arcos de medidas iguais. Os valores associados a esses pontos, escritos em ordem crescente, formam uma progressão aritmética de razão $r = \frac{360°}{n}$ ou $r = \frac{2\pi}{n}$.



Se conhecermos uma medida α associada a um desses pontos, então uma expressão geral das medidas associadas a todos os pontos é:

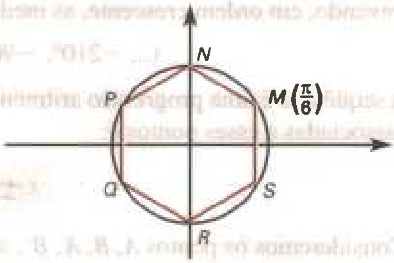
$$x = \alpha + k \cdot \frac{360°}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ se } \alpha \text{ for uma medida em graus,}$$

ou

$$x = \alpha + k \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ se } \alpha \text{ for uma medida em radianos.}$$

Exercícios resolvidos

R.3 O polígono *MNPQRS* é um polígono regular inscrito na circunferência trigonométrica. Determine uma expressão geral dos números reais associados aos vértices desse polígono.



Resolução

Os pontos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* e *S* dividem a circunferência em seis arcos de medidas iguais; logo, os números reais associados a esses pontos, escritos em ordem crescente, formam uma P.A. de razão $r = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Assim, uma expressão geral desses números reais é:

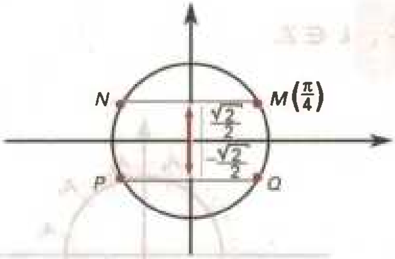
$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

R.4 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$.

Resolução

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \therefore \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Os pontos *M*, *N*, *P* e *Q* dividem a circunferência em quatro arcos de medidas iguais; logo, os números reais associados a esses pontos, em ordem crescente, formam uma P.A. de razão $r = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

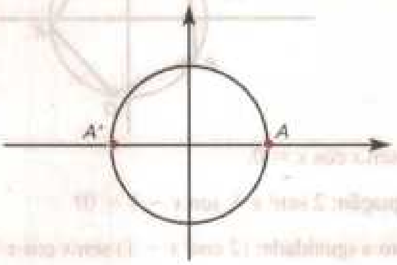
Assim, $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

R.5 Resolva a equação sen $3x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Vamos, inicialmente, resolver a equação em $\mathbb{R}$, ou seja, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica. Efetuando a mudança de variável $3x = \alpha$, temos sen $\alpha = 0$.



O seno de α é igual a zero se α for número real associado a A ou A'. Logo, temos:

$$\alpha = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Retornando à variável original, calculamos:

$$3x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \therefore x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Procuramos os valores de x de modo que $0 \leq x < 2\pi$. Para obtê-los, basta atribuirmos a k valores inteiros convenientes:

$$k = 0 \Rightarrow x = 0,\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3},\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3},\ k = 3 \Rightarrow x = \pi,\ k = 4 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3},\ k = 5 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}.$$

Qualquer outro valor inteiro atribuído a k não nos interessa, pois obteríamos valores de x fora do intervalo $[0, 2\pi[$. Observe:

$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$, valor que não convém, pois $-\frac{\pi}{3} \notin [0, 2\pi[$;

$k = 6 \Rightarrow x = 2\pi$, valor que não convém, pois $2\pi \notin [0, 2\pi[$.

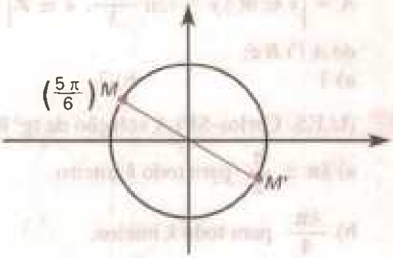
Portanto o conjunto solução é: $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.5, B.6, B.7, C.1, C.3, C.5, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, B.8, B.9, B.10, B.11, C.2, C.4, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Determine uma expressão geral dos números reais que determina os pontos M e M' da figura ao lado.



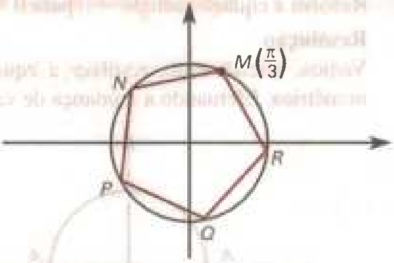
B.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação tg $x = 1$.

B.3 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação cos $x = 0$.

B.4 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que tg $x = -\sqrt{3}$.

B.5 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $2\cos^2 x - \cos x = 0$.

B.6 O polígono *MNPQR* é um pentágono regular inscrito na circunferência trigonométrica. Encontre uma expressão geral, dos números reais, que determina esses cinco vértices.



B.7 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva a equação $\text{sen}\, x \cos x = 0$.

B.8 No universo $U = \mathbb{R}$, qual é o conjunto solução da equação: $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$?

B.9 Dê o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade: $(2\cos^2 x - 1)\,\text{sen}\, x \cos x = 0$.

B.10 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{tg}^2 x - 1 = 0$.

B.11 Determine no universo $U =]-\infty, +\infty[$ o conjunto solução da equação: $(\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2 x - 1) = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Escreva sob a forma tabular o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{sen}\, \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C.2 Qual é a forma tabular do conjunto $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$?

C.3 Determine o domínio da função $f(x) = \text{tg}\, x$.

C.4 Qual é o domínio da função $f(x) = \text{cotg}\, x$?

C.5 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\, 3x = 1$.

C.6 Resolva a equação $\text{sen}\, 3x = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

C.7 Determine no universo $U = \mathbb{R}$ o conjunto solução da equação $\text{tg}\, 2x = 1$.

C.8 Obtenha no universo $U = [0, 2\pi[$ o conjunto solução da equação $\text{tg}\, 2x = 1$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Sejam os conjuntos

$A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \text{sen}\, \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $B = \left\{z \in \mathbb{R} \mid z = \cos \frac{k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Então o número de elementos de $A \cap B$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) infinito.

V.2 (U.F.S. Carlos-SP) A solução de $\text{tg}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta - 3\cos^2 \theta = 0$ é:

a) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ para todo k inteiro.
b) $\frac{k\pi}{4}$ para todo k inteiro.
c) $(2k + 1)\,\pi$ para todo k inteiro.
d) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ para todo k inteiro.
e) Não admite solução.

V.3 (U.F. Ouro Preto-MG) As soluções gerais da equação $|\text{sen}\, x| = |\cos x|$ são:

a) $x = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$, k inteiro.
b) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, k inteiro.
c) $x = 2k\pi$, k inteiro.
d) $x = k\pi$, k inteiro.
e) $x = (3k + 1)\frac{\pi}{2}$, k inteiro.

Capítulo 70

Inequações trigonométricas com universo IR

1. Resolução de uma inequação trigonométrica em IR

Para resolver uma inequação trigonométrica nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, ou seja, em IR, devemos:

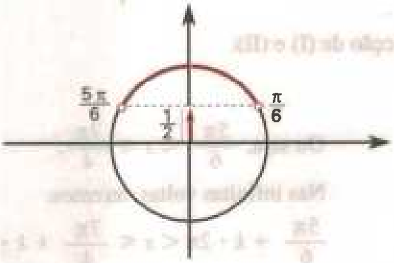
I. determinar numa volta qualquer, por exemplo, na primeira volta positiva, o(s) intervalo(s) α —— β que satisfaz(em) a desigualdade;

II. somar a cada extremidade do(s) intervalo(s) α —— β a expressão $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolva em IR a inequação $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$.

Resolução



Na primeira volta positiva a solução é:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}.$$

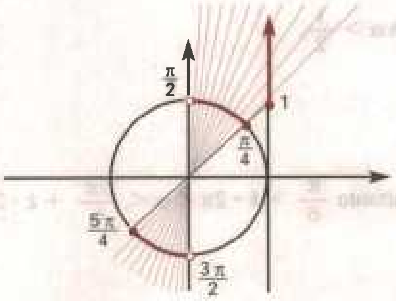
Nas infinitas voltas a solução é:

$$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, temos: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.2 Resolva em IR a inequação $\operatorname{tg} x \geqslant 1$.

Resolução



Na primeira volta positiva a solução é:

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}.$$

Nas infinitas voltas a solução é:

$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Note, porém, que, como os dois intervalos na circunferência são simétricos em relação à origem do sistema, podemos dar uma única expressão para os dois intervalos, isto é:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

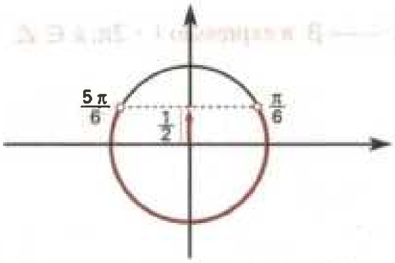
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.3 Resolva em IR o sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \\ \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

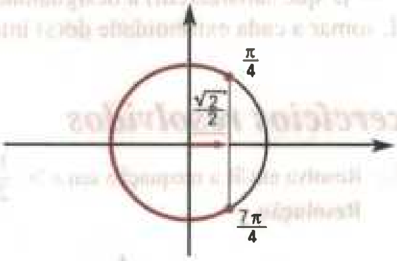
Resolução

Resolvendo cada uma das inequações do sistema apenas na primeira volta positiva, temos:

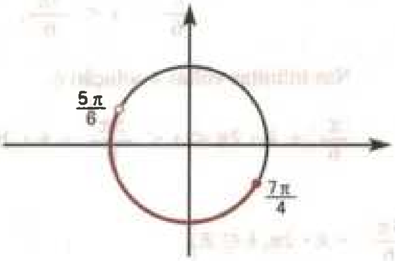
I. $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$



II. $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$



A solução do sistema, na primeira volta, é a intersecção de (I) e (II):



Ou seja, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \frac{7\pi}{4}$.

Nas infinitas voltas, teremos:

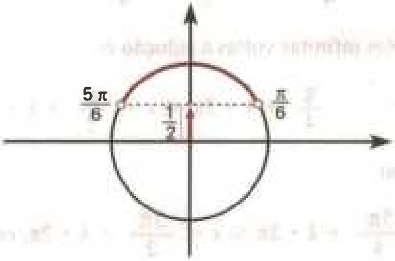
$$\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, o conjunto solução é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.4 Resolva em IR a inequação $\operatorname{sen} 5x > \frac{1}{2}$.

Resolução

Efetuando a mudança de variável $5x = \alpha$ temos $\operatorname{sen} \alpha > \frac{1}{2}$.



Portanto $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

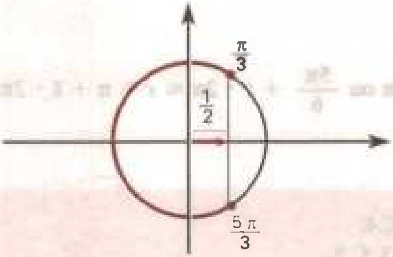
Retornando à variável original, temos:

$$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < 5x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{30} + \frac{k \cdot 2\pi}{5} < x < \frac{5\pi}{30} + \frac{k \cdot 2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{30} + \frac{k \cdot 2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.5 Resolver a inequação $\cos 3x \leq \frac{1}{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução
Efetuando a mudança de variável $3x = \alpha$, temos $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$.



Logo, $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Retornando à variável original:

$$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq 3x \leq \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Atribuindo valores inteiros a k de modo que $0 \leq x < 2\pi$, temos:

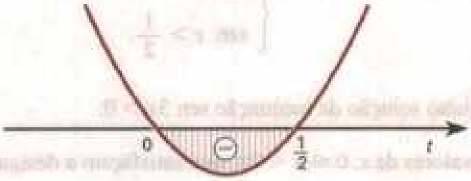
$$k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{5\pi}{9};\ k = 1 \Rightarrow \frac{7\pi}{9} \leq x \leq \frac{11\pi}{9};\ k = 2 \Rightarrow \frac{13\pi}{9} \leq x \leq \frac{17\pi}{9}.$$

Qualquer outro valor inteiro atribuído a k **não nos interessa**, pois resulta em valores de x fora do intervalo $[0, 2\pi[$.
Logo, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{5\pi}{9} \text{ ou } \frac{7\pi}{9} \leq x \leq \frac{11\pi}{9} \text{ ou } \frac{13\pi}{9} \leq x \leq \frac{17\pi}{9}\right\}.$$

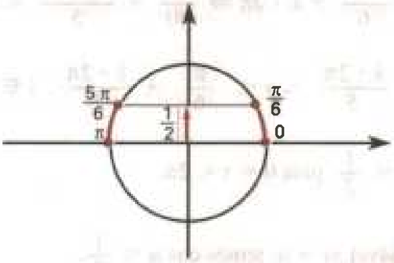
R.6 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2\ \text{sen}^2 x - \text{sen}\, x \leq 0$.

Resolução
Efetuando a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, temos: $2t^2 - t \leq 0$.
A função $f(t) = 2t^2 - t$ tem o gráfico:



Note que $f(t) \leq 0$ para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Retornando à variável original, temos $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$.



Assim, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.6, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.7, B.8, C.2, C.3, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em IR as inequações:

a) $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

B.2 Determine, em IR , o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$ b) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x < 1$

B.3 Resolva em IR o sistema de inequações $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

B.4 Obtenha, em IR, o conjunto solução do sistema de inequações:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 1 \\ \operatorname{sen} x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

B.5 Determine, em IR, o conjunto solução da inequação $\operatorname{sen} 3x > 0$.

B.6 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam a desigualdade $\operatorname{sen} 3x > 0$.

B.7 Qual é o conjunto solução, em IR, da inequação $\cos 4x < 0$?

B.8 Resolva a inequação $\cos 4x < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Exercícios complementares

C.1 Dê o conjunto solução da inequação $2\cos^2 x - \cos x \geqslant 0$, no universo $U = \mathbb{R}$.

C.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\text{tg}^2 x - \text{tg}\, x \leqslant 0$.

C.3 Determine o conjunto dos números x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a desigualdade $\text{tg}^2 x \geqslant \sec x - 1$.

C.4 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\sec x > \cos x$.

C.5 Obtenha o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação: $\dfrac{1}{1 - \text{sen}\, x} \leqslant 4\,\text{sen}\, x$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFMG) O conjunto solução da inequação $2\cos^2 x - \cos x < 0$ é:

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

V.2 (FEI-SP) Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\text{sen}\, 4x > \dfrac{1}{2}$.

V.3 (UnB-DF) Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\text{sen}^2 x > 1 + \cos x$.

Capítulo 71

Fórmulas de adição de arcos para o seno e o co-seno

1. Seno e co-seno dos arcos de medidas $a + b$ e $a - b$

Considere a igualdade: sen $(a + b)$ = sen a + sen b.
Essa sentença é verdadeira para quaisquer valores atribuídos às variáveis a e b?

Vejamos. Fazendo $a = \pi$ e $b = \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$$\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\pi + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = \text{sen}\,\pi + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -1 = 0 + 1 \quad \therefore -1 = 1, \text{ o que é falso.}$$

Note, portanto, que a igualdade **não** é identidade em $\mathbb{R}^2$, ou seja, **não** é verdadeira para quaisquer valores reais de a e b.

Verifica-se de modo análogo que as sentenças:

$$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a - \text{sen}\,b,\ \cos\,(a + b) = \cos a + \cos b,\ \cos\,(a - b) = \cos a - \cos b$$

não são identidades em $\mathbb{R}^2$.

Apresentamos neste capítulo quatro identidades que nos auxiliarão nos cálculos de $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, sen $(a + b)$ e sen $(a - b)$.

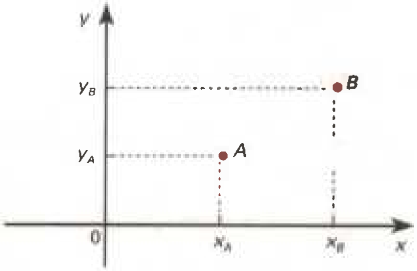
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$,
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$,
$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a$,
$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a$.

Essas identidades são chamadas de **fórmulas de adição de arcos**. Para demonstrá-las, necessitamos de uma fórmula auxiliar que deduziremos a seguir.

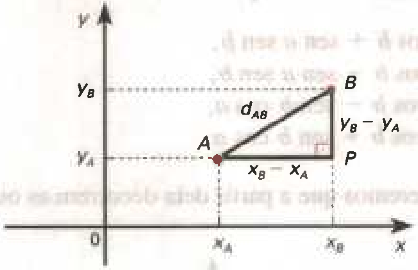
1.1. Distância entre dois pontos do plano cartesiano

1º caso

Sejam dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ tais que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo a nenhum dos eixos coordenados.



Para calcularmos a distância entre os pontos *A* e *B*, que indicamos por d_{AB}, basta aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo *ABP* (figura abaixo):



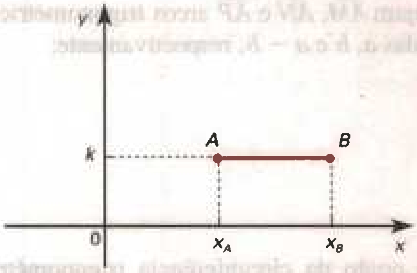
$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\therefore \quad d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,.$$

2º caso

Sejam os pontos $A(x_A, k)$ e $B(x_B, k)$.

Note que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas.



Logo, a distância entre os pontos *A* e *B* é o comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo das abscissas, isto é: $d_{AB} = x_B - x_A$, com $x_B \geqslant x_A$.

Observe que, se aplicarmos a fórmula obtida no 1º caso para calcular a distância entre *A* e *B*, teremos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (k - k)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|.$$

Mas, como $x_B \geqslant x_A$, temos $|x_B - x_A| = x_B - x_A$. Logo, concluímos que: $d_{AB} = x_B - x_A$.

Assim, a fórmula do 1º caso também pode ser aplicada para calcular a distância entre dois pontos de uma reta paralela ao eixo das abscissas.

De maneira análoga, prova-se que a fórmula do 1º caso pode ser aplicada para calcular a distância entre dois pontos de uma reta paralela ao eixo das ordenadas.

Podemos então generalizar:

Dados dois pontos **quaisquer** do plano cartesiano, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância entre eles é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,.$$

Exercício resolvido

R.1 Calcular a distância entre os pontos *A*(6, 9) e *B*(3, 13).

Resolução

$$d_{AB} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (13 - 9)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \quad \therefore d_{AB} = 5.$$

1.2. Demonstrações das fórmulas de adição de arcos

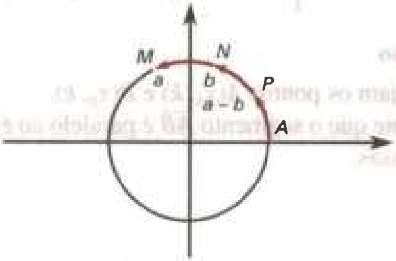
Dados dois arcos trigonométricos de medidas a e b, demonstraremos que:

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\ & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,\\
\text{II.}\ & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,\\
\text{III.}\ & \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a,\\
\text{IV.}\ & \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a.
\end{aligned}
$$

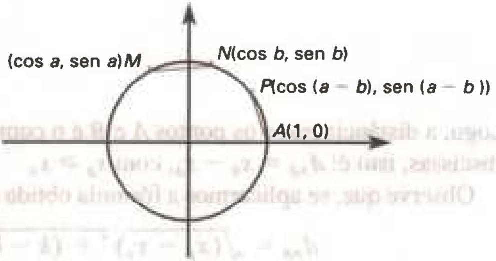
Demonstraremos inicialmente a identidade (I). Então veremos que a partir dela decorrem as outras.

Demonstração I

Sejam $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{AN}$ e $\overset{\frown}{AP}$ arcos trigonométricos de medidas a, b e $a - b$, respectivamente:



Cada ponto da circunferência trigonométrica é representado pelo par (cos α, sen α), onde α é a medida de um arco com extremidade nesse ponto. Assim, temos as coordenadas de A, P, N e M:



Os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{MN}$ têm medidas iguais, pois são cordas que determinam na circunferência arcos de medidas iguais. Temos, então:

$$d_{AP} = d_{MN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{[\cos(a-b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a-b) - 0]^2} = \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2}$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$[\cos(a-b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a-b) - 0]^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a-b) =$$

①

①

$$= \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a - 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b$$

①

$$\therefore\ \cancel{2} - 2\cos(a-b) = \cancel{2} - 2\cos a \cos b - 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\therefore\ -2\cos(a-b) = -2\cos a \cos b - 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\therefore\ \boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.} \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Para facilitar as demonstrações de (II), (III) e (IV), vamos provar cinco identidades auxiliares. São elas:

a_1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x, \ \forall x, x \in \mathbb{R};$

a_2) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \ \forall x, x \in \mathbb{R};$

a_3) $\cos(\pi - x) = -\cos x, \ \forall x, x \in \mathbb{R};$

a_4) $\cos(-x) = \cos x, \ \forall x, x \in \mathbb{R};$

a_5) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \ \forall x, x \in \mathbb{R}.$

De fato:

a_1) Por (I), temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x = 0\cos x + 1\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

(c.q.d.)

a_2) Por (a_1), temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right] = \cos x.$$

(c.q.d.)

a_3) Por (I), temos:

$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen} x = -1\cos x + 0\operatorname{sen} x = -\cos x.$$

(c.q.d.)

a_4) Por (I), temos:

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0\cos x + \operatorname{sen} 0\operatorname{sen} x = 1\cos x + 0\operatorname{sen} x = \cos x.$$

(c.q.d.)

a_5) Por (a_1) e (a_3), temos:

$$\operatorname{sen}(-x) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-x)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} + x\right] = -\cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] =$$

$$= -\cos\left[\pi - \frac{\pi}{2} - x\right] = -\cos\left[\frac{\pi}{2} - x\right] = -\operatorname{sen} x.$$

(c.q.d.)

Podemos, finalmente, demonstrar as fórmulas (II), (III) e (IV).

Demonstração II

$$\cos(a + b) = \cos[a - (-b)] \underset{(I)}{=} \cos a\cos(-b) + \operatorname{sen} a\operatorname{sen}(-b) \underset{(a_4)\text{ e }(a_5)}{=} \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

$$\therefore \quad \cos(a + b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b.$$

(c.q.d.)

Demonstração III

$$\operatorname{sen}(a - b) \underset{(a_1)}{=} \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] \underset{(II)}{=}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen} b \underset{(a_1)\text{ e }(a_2)}{=}$$

$$= \operatorname{sen} a\cos b - \cos a\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a.$$

(c.q.d.)

Demonstração IV

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,[a - (-b)] \underset{\text{(III)}}{=} \text{sen}\ a \cos(-b) - \text{sen}\,(-b) \cos a \underset{(a_4)\text{ e }(a_5)}{=}$$

$$= \text{sen}\ a \cos b + \text{sen}\ b \cos a.$$

$$\therefore\ \boxed{\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\ a \cos b + \text{sen}\ b \cos a.}$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.2 Calcular cos 75°.

Resolução

Escrevendo 75° como a soma dos arcos notáveis 45° e 30°, temos:

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \text{sen}\ 45° \,\text{sen}\ 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Logo, $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

R.3 Calcular sen 15°.

Resolução

Escrevendo 15° como a diferença entre os arcos notáveis 45° e 30°, temos:

$$\text{sen}\ 15° = \text{sen}\,(45° - 30°) = \text{sen}\ 45° \cos 30° - \text{sen}\ 30° \cos 45° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Logo, $\text{sen}\ 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

R.4 Demonstre que $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

Resolução

- $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ e $\cos x$ estão definidos em $\mathbb{R}$;
- primeiro membro $= \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} \cos x + \text{sen}\ x \cos \dfrac{\pi}{2} = 1 \cos x + \text{sen}\ x \cdot 0 =$

  $= \cos x =$ segundo membro.

(c.q.d.)

R.5 Resolver em IR a equação $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

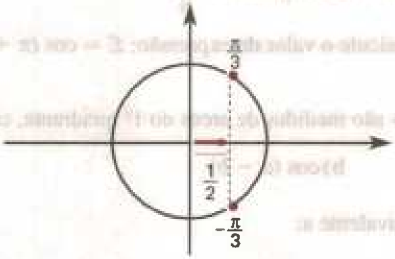
Resolução

$$\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x + \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left(: \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\therefore \cos x + \cos x = 1 \quad \therefore 2\cos x = 1 \quad \therefore \cos x = \frac{1}{2}.$$



$$\therefore x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2, B.5, B.8, B.9, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.3, B.4, B.6, B.7, B.10, C.2, C.3, C.5, C.6.

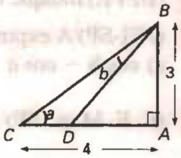
Exercícios básicos

B.1 Calcule:
a) cos 15° b) sen 75° c) cos 105° d) sen 165°

B.2 Sabendo que $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$ e que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right)$.

B.3 Sabendo que $\cos x = \frac{1}{3}$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

B.4 Sabendo que $\operatorname{sen} b = \frac{\sqrt{5}}{5}$, calcule, de acordo com a figura ao lado:



a) sen $(a + b)$;
b) a medida do segmento $\overline{BD}$.

B.5 Demonstre a seguinte identidade em IR: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$.

B.6 Demonstre a seguinte identidade em $\mathbb{R}$: $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

B.7 Simplifique a expressão, para $\cos x \neq 0$: $E = \dfrac{1 + \operatorname{sen}(\pi - x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{\cos^2(\pi - x)}$.

B.8 Sabendo que $a + b = \dfrac{\pi}{6}$, calcule o valor da expressão: $E = (\operatorname{sen} a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} b + \cos a)^2$.

B.9 Resolva a seguinte equação em $\mathbb{R}$: $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

B.10 Determine, no universo $U = \mathbb{R}$, o conjunto solução da equação: $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule o valor da expressão $E = \operatorname{sen} 3x \cos x - \operatorname{sen} x \cos 3x$ para $x = \dfrac{\pi}{8}$.

C.2 Sabendo que $\cos x = \dfrac{3}{5}$ e que $270° < x < 360°$, calcule o valor da expressão: $E = \cos(\pi + x) + \operatorname{sen} x$.

C.3 Sabendo que $\cos a = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{sen} b = \dfrac{5}{13}$ e que a e b são medidas de arcos do 1º quadrante, calcule:

a) $\operatorname{sen}(a + b)$

b) $\cos(a - b)$

C.4 A equação $\cos x \cos \dfrac{\pi}{3} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} = 1$ é equivalente a:

a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

b) $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

d) $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1$

C.5 A equação $\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x = 1$ é equivalente a:

a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

b) $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

d) $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1$

(**Sugestão:** exercício anterior.)

C.6 A equação $\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 2$ é equivalente a:

a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

b) $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

d) $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1$

(**Sugestão:** divida ambos os membros da igualdade por 2, recaindo assim no exercício anterior.)

Questões dos vestibulares

V.1 (UFPE) Indique o valor da constante A na identidade: $\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta = A\cos(\theta - 60°)$.

V.2 (FEI-SP) A expressão $\operatorname{sen}(a + b)\operatorname{sen}(a - b)$ é equivalente a:

a) $\cos b - \cos a$

b) $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$

c) $\cos^2 b - \cos^2 a$

d) $\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

e) $\cos^2 a - \cos^2 b$

V.3 (E. E. Mauá-SP) Mostrar que a expressão $F = \dfrac{\operatorname{sen}(x + z) - \operatorname{sen}(x - z)}{\cos(y - z) - \cos(y + z)}$ é independente de z ($z \neq k\pi$), e calcular o seu valor numérico para $x = \dfrac{2\pi}{3}$ e $y = \dfrac{3\pi}{4}$.

Capítulo 72

Fórmulas de adição de arcos para a tangente

1. Tangente dos arcos de medidas *a* + *b* e *a* − *b*

Sejam a, b, $a + b$ e $a - b$, medidas de arcos diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Temos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Demonstração

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Dividindo o numerador e o denominador da última expressão por cos a cos b, temos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cancel{\cos b}}{\cos a \cancel{\cos b}} + \dfrac{\operatorname{sen} b \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a} \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a} \cancel{\cos b}} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

A demonstração da segunda identidade é análoga. (c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular tg 75°.

Resolução

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\dfrac{3 + \sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\dfrac{3 - \sqrt{3}}{\cancel{3}}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Racionalizando, temos tg 75° = $2 + \sqrt{3}$.

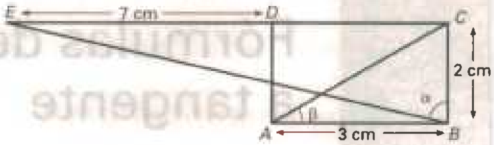
R.2 Sendo tg $a = 3$, calcular tg (45° + a).

Resolução

$$\operatorname{tg}(45° + a) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} a} = \frac{1 + 3}{1 - 1 \cdot 3} = -2.$$

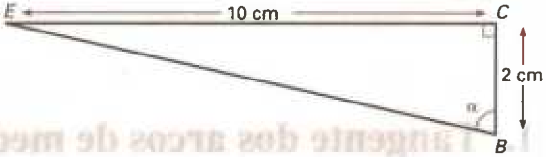
Logo, tg (45° + a) = −2

R.3 O retângulo *ABCD* é tal que *AB* = 3 cm e *BC* = 2 cm. Sendo *DE* = 7 cm, calcule $\alpha - \beta$, onde α e β são as medidas dos ângulos $E\hat{B}C$ e $C\hat{A}B$, respectivamente.



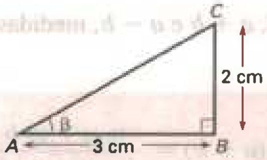
Resolução

- No triângulo retângulo *EBC*, temos:



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{10}{2} = 5.$$

- No triângulo retângulo *CAB*, temos:



$$\text{tg}\ \beta = \frac{2}{3}.$$

A partir dos valores $\text{tg}\ \alpha = 5$ e $\text{tg}\ \beta = \frac{2}{3}$, podemos calcular $\text{tg}\ (\alpha - \beta)$:

$$\text{tg}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ \beta}{1 + \text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ \beta} = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{3}}\ \therefore\ \text{tg}\ (\alpha - \beta) = 1.$$

Como α e β são medidas de ângulos agudos, temos $\alpha - \beta = 45°$.

Sugestões

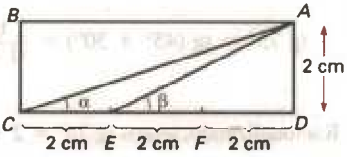
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.6, B.7, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Calcule tg 15°.

B.2 Sendo $\text{tg}\ a = 2\sqrt{3}$, calcule $\text{tg}\ (60° - a)$.

B.3 O quadrilátero *ABCD* da figura ao lado é um retângulo. Calcule a soma $\alpha + \beta$.



B.4 Sabendo que $\text{tg}\ \alpha$ e $\text{tg}\ \beta$ são raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, determine o valor de $\text{tg}\ (\alpha + \beta)$ em função de *a*, *b* e *c* (onde $a \neq c$).

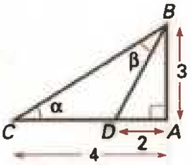
B.5 Sabendo que $\text{tg}\ (x + y) = -\frac{6}{7}$ e que $\text{tg}\ x = 2\ \text{tg}\ y$, calcule o valor de $\text{tg}\ x$.

B.6 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } (x - y)}{1 + \text{tg } x \text{ tg } (x - y)}$, satisfeitas as condições de existência.

B.7 Demonstre que tg (90° + α) = −cotg α, satisfeitas as condições de existência. **(Cuidado!)**

Exercícios complementares

C.1 Calcule o valor de tg β na figura:



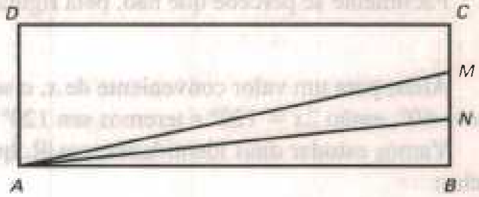
C.2 Calcule o valor de tg x, sabendo que $\begin{cases} \text{tg } (x - y) = 2 \\ 2x - y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

C.3 Sabendo que $a + b = \dfrac{\pi}{4}$, calcule o valor da expressão: $y = (1 + \text{tg } a)(1 + \text{tg } b)$.

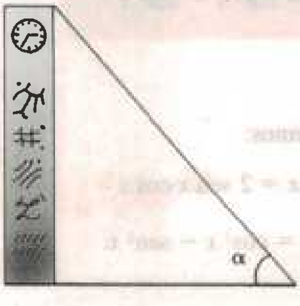
C.4 Se α, β e γ são medidas dos ângulos internos de um triângulo não-retângulo, mostre que: tg (α + β) = −tg γ.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) No retângulo $ABCD$, tem-se: $AB = 5$, $BC = 3$ e $CM = MN = NB$. Determine o valor da tangente do ângulo $M\hat{A}N$.



V.2 (Fuvest-SP)



$x°$	sen $x°$	cos $x°$
10	0,174	0,985
11	0,191	0,982
12	0,208	0,978
13	0,225	0,974
14	0,242	0,970
15	0,259	0,966
16	0,276	0,961
17	0,292	0,956
18	0,309	0,951
19	0,326	0,946
20	0,342	0,940

$x°$	sen $x°$	cos $x°$
21	0,358	0,934
22	0,375	0,927
23	0,391	0,921
24	0,407	0,914
25	0,423	0,906
26	0,438	0,899
27	0,454	0,891
28	0,470	0,883
29	0,485	0,875
30	0,500	0,866

A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α, como mostra a figura.

a) Usando a tabela dada, determine a altura da torre, supondo α = 20°. Efetue os cálculos.

b) Se o ângulo α valesse 40°, como se poderia calcular a altura usando os dados da tabela? Indique os cálculos.

V.3 (ITA-SP) Suponha x e y números reais, tais que $\begin{cases} \text{tg } (x - y) = \sqrt{3} \\ \text{tg } x \text{ tg } y = 1. \end{cases}$

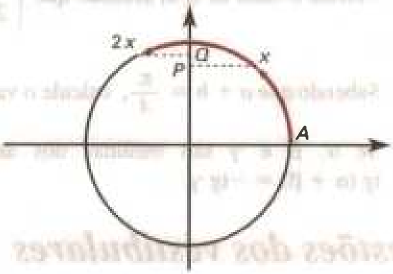
Calcule o módulo do número $S = \text{tg } x + \text{tg } y$.

Capítulo 73

Fórmulas de arco duplo para o seno e o co-seno

1. Seno e co-seno do arco duplo

Observe os arcos de medidas x e $2x$ na circunferência trigonométrica ao lado:



A ordenada do ponto P é o sen x, e a ordenada do ponto Q é o sen $2x$.

Você acha que, para qualquer valor de x, o sen $2x$ é o dobro do sen x? Ou seja, sen $2x$ = 2 sen x?

Facilmente se percebe que não, pela figura.

Aliás, para um valor conveniente de x, o sen $2x$ pode ser até igual a sen x. Por exemplo, se fizermos $x = 60°$, então $2x = 120°$ e teremos sen 120° = sen 60°, ou seja, sen $2x$ = sen x para $x = 60°$.

Vamos estudar duas identidades, em $\mathbb{R}$, que nos auxiliarão nos cálculos do sen $2x$ e do cos $2x$. São elas:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.}$$

Demonstrações

Fazendo $2x = x + x$ e usando as fórmulas de adição de arcos, temos:

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

e

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Sabendo que sen $x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule sen $2x$.

Resolução

Sabemos que sen $2x$ = 2 sen x cos x.

Pela relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \therefore \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \therefore \cos x = \pm\frac{4}{5}.$$

Como x é um arco do 2º quadrante, temos $\cos x = -\dfrac{4}{5}$.

Assim, $\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$.

Logo, $\operatorname{sen} 2x = -\dfrac{24}{25}$.

R.2 Sabendo que $\cos x = \dfrac{1}{3}$, calcule $\cos 2x$.

Resolução

Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.
Substituindo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, temos: $\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.

Logo, $\cos 2x = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 1$.

$$\therefore \ \cos 2x = -\frac{7}{9}$$

R.3 Sendo $\cos x = \dfrac{1}{4}$, calcule $\cos 4x$.

Resolução

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos(2 \cdot 2x) = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x = \\ &= \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 1 = \\ &= 2\,[\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)]^2 - 1 = 2\,[2\cos^2 x - 1]^2 - 1.\end{aligned}$$

Substituindo $\cos x$ por $\dfrac{1}{4}$, temos: $\cos 4x = 2\left[2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - 1\right]^2 - 1$.

Logo, $\cos 4x = \dfrac{17}{32}$.

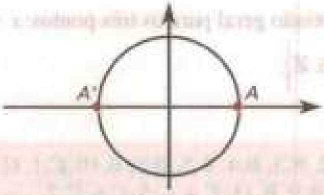
R.4 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$.

Resolução

$2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \quad (:2)$
$\therefore\ \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x \quad \therefore\ \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \quad \therefore\ \operatorname{sen} x\,(\cos x - 1) = 0$

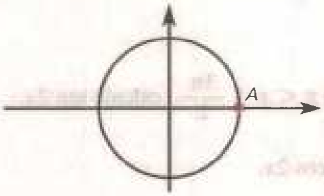
Então, temos:

- $\operatorname{sen} x = 0$



$\therefore\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **(I)**

- ou $\cos x = 1$



$\therefore\ x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **(II)**

Observe que o conjunto (II) dos valores da forma $x = k2\pi$ está contido no conjunto (I) dos valores da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como o conjunto solução deve ser a reunião de (I) e (II), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

R.5 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\cos 2x = \cos x$.

Resolução

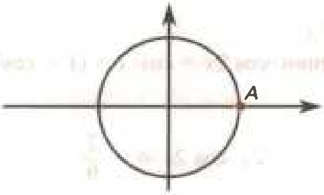
$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos x \ \therefore\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x \ \therefore\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Fazendo $\cos x = t$:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \ \therefore\ \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-1) = 9 \ \therefore\ t = \frac{1 \pm 3}{4} \ \therefore\ t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}$$

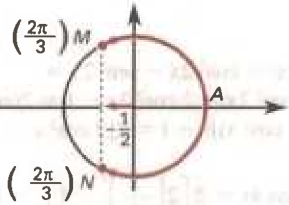
Então, temos:

- $\cos x = 1$



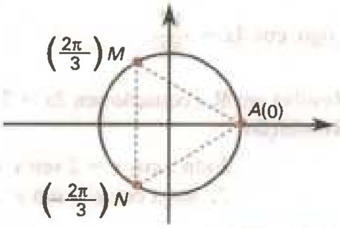
$\therefore\ x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$


$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ M
A
$-\frac{1}{2}$
$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ N

$\therefore\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Note que, para simplificarmos a resposta, podemos observar que os três pontos A, M e N dividem a circunferência em três arcos de medidas iguais a $\dfrac{2\pi}{3}$ rad.


$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ M
A(0)
$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ N

Podemos então dar uma única expressão geral para os três pontos: $x = 0 + \dfrac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, B.8, B.10, C.1, C.2, C.3, C.8.
Tarefa de casa: exercícios B.6, B.7, B.9, B.11, C.4, C.5, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que $\text{sen}\, x = -\dfrac{5}{13}$ e que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule $\text{sen}\, 2x$.

B.2 Sabendo que $\cos x = \dfrac{1}{5}$, calcule $\cos 2x$.

B.3 Sabendo que $\text{sen}\, x = 2\cos x$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule:

a) $\text{sen}\, 2x$ b) $\cos 2x$

B.4 Sabendo que $\cos x = a$, calcule em função de a:
a) $\cos 2x$
b) $\cos 4x$

B.5 Sabendo que $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\text{sen } 4x$.

B.6 Demonstre que $\frac{\cos 2x}{\cos x - \text{sen } x} - \cos x = \text{sen } x$ é identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq \cos x\}$.

B.7 Demonstre que $\cos x \text{ sen } 2x - 2 \text{ sen } x = -2 \text{ sen}^3 x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

B.8 Resolva a equação $\text{sen } 2x = 2 \cos x$, em $\mathbb{R}$.

B.9 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\text{sen } 2x - 3 \cos x = 0$.

B.10 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva a equação $\cos 2x - \text{sen } 2x + 1 = 0$.

B.11 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade: $\cos 2x = \text{sen } x$.

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $\text{sen } x \cos x = \frac{1}{4}$, determine o valor de $\text{sen } 2x$.

C.2 Sabendo que $\text{sen } x + \cos x = \frac{1}{3}$, determine o valor de $\text{sen } 2x$. (**Sugestão:** quadre ambos os membros da igualdade.)

C.3 Sabendo que $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{3}{5}$, determine o valor de $\cos 2x$.

C.4 Mostre que:
a) $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \forall x, x \in \mathbb{R}$;
b) $\cos 2x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x, \forall x, x \in \mathbb{R}$.

C.5 Calcule o valor da expressão $E = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

C.6 Calcule o valor da expressão $E = \text{sen } \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$. (**Sugestão:** multiplique ambos os membros da igualdade por 2.)

C.7 Demonstre a identidade $\frac{\cos 2x}{\text{sen } x + \cos x} = \cos x - \text{sen } x$, para $\text{sen } x \neq -\cos x$.

C.8 Mostre que $\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$ para todo x, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (FEI-SP) Simplificando $\frac{2 \text{ sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \text{sen } 2x}$, com $\text{sen } 2x \neq -1$ obtemos:
a) 1
b) 0
c) 2
d) $\cos 2x$
e) $1 - 2 \text{ sen } x$

V.2 (Fuvest-SP) O valor de $(\text{sen } 22°30' + \cos 22°30')^2$ é:
a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
d) 1
e) 2

V.3 (Cesgranrio) Se $\text{sen } 2x = \text{sen } x$ e $0 \leq x < \pi$, então:
a) $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{6}$
b) $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{3}$
c) $x = \frac{\pi}{6}$
d) $x = \frac{\pi}{3}$
e) $x = 0$

Capítulo 74

Fórmula de arco duplo para a tangente

1. Tangente do arco duplo

Dados os arcos x e $2x$ tais que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (isto é, x e $2x$ são arcos para os quais existe tangente), temos:

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}.$$

Demonstração

Fazendo $2x = x + x$ e usando a fórmula da tangente da soma, temos:

$$\text{tg } 2x = \text{tg } (x + x) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x \text{ tg } x} = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}.$$

(c. q. d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo $\text{tg } x = 5$, calcule $\text{tg } 2x$.

Resolução

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2} = -\frac{10}{24} \quad \therefore \text{ tg } 2x = -\frac{5}{12}.$$

R.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{tg } 2x = \text{tg } x$.

Resolução

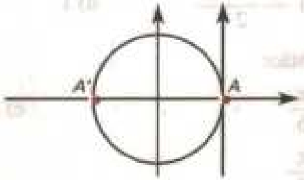
$$\text{Condições de existência: } \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{e} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{e} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Então, temos: $\frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \text{tg } x \therefore 2 \text{ tg } x = \text{tg } x - \text{tg}^3 x \therefore \text{tg}^3 x + \text{tg } x = 0 \therefore \text{tg } x (\text{tg}^2 x + 1) = 0.$

Assim, temos que:

- $\text{tg } x = 0$



$\therefore x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- ou $\text{tg}^2 x + 1 = 0 \Rightarrow \text{tg}^2 x = -1 \therefore \nexists x$.

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

R.3 Sendo tg $x = m$ e tg $2x = -m$, com $m > 0$,

a) determine o valor de m;

b) determine os valores reais de x.

Resolução

a) $\text{tg } 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} \Rightarrow -m = \dfrac{2m}{1 - m^2}$.

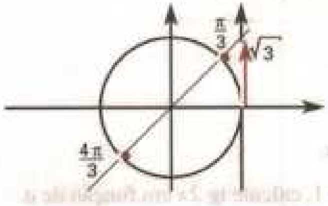
Podemos dividir ambos os membros dessa igualdade por m, pois o enunciado nos garante que m não é zero. Logo, temos: $-1 = \dfrac{2}{1 - m^2} \Rightarrow -1 + m^2 = 2 \therefore m^2 = 3 \therefore m = \pm\sqrt{3}$.

Como $m > 0$, então $m = \sqrt{3}$.

b) Para determinarmos os valores de x, substituímos $m = \sqrt{3}$ na igualdade tg $x = m$.

Logo, temos:

tg $x = \sqrt{3}$



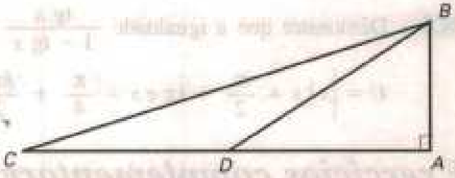
$\therefore x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Temos, portanto, que os possíveis valores de x são: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

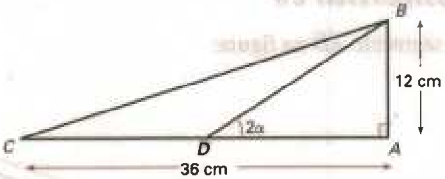
R.4 Na figura ao lado, tem-se que: $CD = DB$, $AC = 36$ cm, $AB = 12$ cm e a medida do ângulo $B\hat{D}A$ é igual a 2α.

a) Determine a tg α.

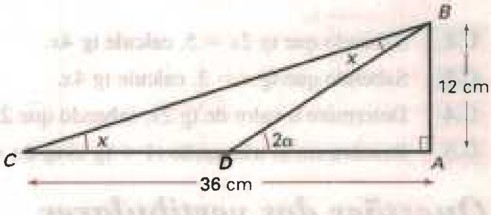
b) Determine a medida do segmento AD.



Resolução



a) O triângulo CDB é isósceles, pois $CD = DB$; logo, os ângulos $B\hat{C}D$ e $D\hat{B}C$ têm medidas iguais. Seja x essa medida. Lembrando que num triângulo a medida de um ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não-adjacentes, temos:



$2\alpha = x + x$, pois $B\hat{D}A$ é externo ao triângulo CDB.

Assim, $2\alpha = 2x \Rightarrow \alpha = x$.

Então $\text{tg } \alpha = \dfrac{\cancel{12}}{\cancel{36}} = \dfrac{1}{3}$.

b) No triângulo DAB: $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{12}{AD} \Rightarrow \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \dfrac{12}{AD}$

$$\therefore \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{12}{AD} \therefore \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{12}{AD} \therefore \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{12}{AD} \therefore \frac{3}{4} = \frac{12}{AD}.$$

Finalmente, concluímos que $AD = 16$ cm.

R.5 Sabendo que tg $4x = 5$, calcule tg $8x$.

Resolução

$$\text{tg } 8x = \text{tg } (2 \cdot 4x) = \frac{2 \text{ tg } 4x}{1 - \text{tg}^2\, 4x}.$$

Logo, $\text{tg } 8x = \dfrac{2 \cdot 5}{1 - 5^2} = \dfrac{10}{-24} \therefore \text{tg } 8x = -\dfrac{5}{12}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.4, B.5, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3, C.1, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Sendo tg $x = 2$, calcule tg $2x$.

B.2 Sendo tg $x = -3$, calcule tg $2x$.

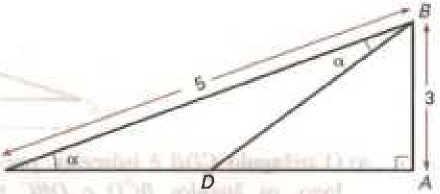
B.3 Sendo tg $x = a$, $a \neq 1$ e $a \neq -1$, calcule tg $2x$ em função de a.

B.4 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação tg $2x = 2$ tg x.

B.5 Demonstre que a igualdade $\dfrac{\text{tg } x}{1 - \text{tg } x} + \dfrac{\text{tg } x}{1 + \text{tg } x} = \text{tg } 2x$ é uma identidade no conjunto universo $U = \left\{x \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 Determine a medida do segmento $\overline{AD}$ na figura:



C.2 Sabendo que tg $2x = 5$, calcule tg $4x$.

C.3 Sabendo que tg $x = 3$, calcule tg $4x$.

C.4 Determine o valor de tg $2x$, sabendo que $2 \text{ tg } x = 1 - \text{tg}^2 x$.

C.5 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $(1 + \text{tg } x) \text{ tg } 2x = -1$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Se tg $x = m$ e tg $2x = 3m$, $m > 0$, o ângulo agudo x mede:
a) 15° b) 60° c) 45° d) 30° e) 22°30′

V.2 (PUC-RJ) Se tg $3x = 4$, então tg $6x$ é igual a:
a) 8 b) $-\dfrac{8}{15}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $-\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{5}{8}$

V.3 (UFPA) A menor solução positiva da equação $\text{tg}^2 x\, \text{tg}^2 2x = 1$ está no intervalo:
a) $\left]0, \dfrac{\pi}{8}\right]$ b) $\left]\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{7}\right]$ c) $\left]\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{5}\right]$ d) $\left]\dfrac{\pi}{5}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ e) $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

Capítulo 75

Fórmulas do arco triplo

1. Seno e co-seno do arco triplo

Vamos obter duas identidades que nos dão o sen 3x e cos 3x, em função do sen x e do cos x, respectivamente. São elas:

$$\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x \quad \text{e} \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Demonstrações

Fazendo $3x = x + 2x$ e usando as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo, temos:

$$\begin{aligned}
\text{sen } 3x &= \text{sen }(x + 2x) = \text{sen } x \cos 2x + \text{sen } 2x \cos x = \\
&= \text{sen } x (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cos x \cos x = \\
&= \text{sen } x (1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cos^2 x = \\
&= \text{sen } x (1 - 2 \text{ sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x (1 - \text{sen}^2 x) = \\
&= \text{sen } x - 2 \text{ sen}^3 x + 2 \text{ sen } x - 2 \text{ sen}^3 x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos (x + 2x) = \cos x \cos 2x - \text{sen } x \text{ sen } 2x = \\
&= \cos x (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - \text{sen } x \, 2 \text{ sen } x \cos x = \\
&= \cos x [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] - 2 \text{ sen}^2 x \cos x = \\
&= \cos x [2 \cos^2 x - 1] - 2 (1 - \cos^2 x) \cos x = \\
&= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.
\end{aligned}$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Sabendo que sen $x = \frac{1}{3}$, calcule sen 3x.

Resolução

$$\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x \;\therefore\; \text{sen } 3x = 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Logo, sen $3x = \frac{23}{27}$.

R.2 Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\cos 3x$.

Resolução

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Pela relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \quad \therefore \cos^2 x = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \quad \therefore \cos x = \pm\frac{1}{3}.$$

Como x é um arco do 2º quadrante, temos $\cos x = -\frac{1}{3}$.

Logo, $\cos 3x = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) \therefore \cos 3x = \frac{23}{27}$.

Sugestão

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, C.2, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que $\cos x = \frac{1}{5}$, calcule $\cos 3x$.

B.2 Sabendo que $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\text{sen}\, 3x$. (**Sugestão:** calcule, antes, o $\text{sen}\, x$.)

B.3 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\cos 3x = 5\cos x$.

B.4 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\text{sen}\, 3x = 3\,\text{sen}\, x - \frac{1}{2}$.

B.5 Resolva em $\mathbb{R}$ o sistema $\begin{cases} \cos 3x = \cos^2 x \\ \cos x > 0. \end{cases}$

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que $\text{sen}\, x = a$, calcule, em função de a, o valor da expressão $E = \frac{\text{sen}\, 6x}{\cos 3x}$. (**Sugestão:** $\text{sen}\, 6x = \text{sen}\,(2 \cdot 3x)$.)

C.2 Dado que $\cos x = a$, calcule, em função de a, o valor da expressão $E = \cos 6x$.

C.3 Determine o valor do $\text{sen}\, x$, sabendo que $\text{sen}\, 3x = -4 + 3\,\text{sen}\, x$.

C.4 Determine o valor do $\cos x$, sabendo que $\cos 3x = \cos x$.

C.5 Calcule o valor da $\text{tg}\, 3x$, sabendo que $\text{tg}\, x = 2$. (**Sugestão:** $\text{tg}\, 3x = \text{tg}\,(2x + x)$.)

C.6 Sabendo que $\text{tg}\, 3x = 5$ e que $\text{tg}\, 2x = 4$, calcule $\text{tg}\, x$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mapofei-SP) Resolver a equação $\text{sen}\, 3x = 4 + 3\,\text{sen}\, x$ para $0 \leq x < 2\pi$.

V.2 (Cescem-SP) A igualdade $\cos 3x = 3\cos x$ é verdadeira para:

a) qualquer valor real de x.

b) qualquer x, tal que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) qualquer x, tal que $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) qualquer x, tal que $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

e) qualquer x, tal que $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 76

Fórmulas do arco metade

1. Seno, co-seno e tangente do arco metade

O estudo do arco metade $\frac{\alpha}{2}$ é muito simples, pois basta observar que o arco de medida α é o dobro do arco de medida $\frac{\alpha}{2}$, ou seja: $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$.

Dessa maneira, quando quisermos relacionar o seno, o co-seno ou a tangente do arco α com o arco $\frac{\alpha}{2}$, basta usar as fórmulas de arco duplo:

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad \text{e} \qquad \text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}.$$

Fazendo, em cada uma dessas fórmulas, $2x = \alpha$ e, conseqüentemente, $x = \frac{\alpha}{2}$, obtemos:

$$\text{sen } \alpha = 2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \qquad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{2 \text{ tg } \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Observe que não há nenhuma novidade, já que essas fórmulas são as de arco duplo.

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule sen α.

Resolução

Sabemos que $\text{sen } \alpha = 2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Pela relação fundamental, $\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$, temos:

$$\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \therefore \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{16}{25} \therefore \text{sen } \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{4}{5}.$$

Como α é um arco do 1º quadrante, temos que $\frac{\alpha}{2}$ também é um arco do 1º quadrante. Então, $\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$.

Logo, $\text{sen } \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

R.2 Sabendo que $\cos \alpha = -\frac{7}{9}$ e que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Resolução

Sabemos que $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Então, temos: $-\frac{7}{9} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

$$\therefore -\frac{7}{9} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \therefore -\frac{7}{9} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\therefore 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{9} \quad \therefore \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{9} \quad \therefore \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{1}{3}.$$

Por hipótese temos que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Dividindo por 2 essa desigualdade, temos $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Logo, $\frac{\alpha}{2}$ é um arco do 1º quadrante.

Então $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

R.3 Calcule sen 22°30′.

Resolução

Temos que $22°30' = \frac{45°}{2}$ e também que $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Logo, $\cos 45° = \cos^2 22°30' - \operatorname{sen}^2 22°30'$.

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2 22°30' - \operatorname{sen}^2 22°30' \quad \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 22°30'$$

$$\therefore \operatorname{sen}^2 22°30' = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \therefore \operatorname{sen} 22°30' = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Como 22°30′ é um arco do 1º quadrante, concluímos que: $\operatorname{sen} 22°30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

R.4 Calcule $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Resolução

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \therefore 2 = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\therefore \cancel{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \cancel{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad \therefore \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 = 0.$$

Fazendo $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, temos:

$$t^2 + t - 1 = 0.$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1(-1) = 5 \quad \therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \therefore \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como α é um arco do 1º quadrante, temos também que $\frac{\alpha}{2}$ é um arco do 1º quadrante. Logo, concluímos que: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, C.3, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, C.1, C.2, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Se sen $\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{13}$ e $0 < \alpha < \frac{\alpha}{2}$, calcule sen α.

B.2 Sabendo que $\cos \alpha = \frac{23}{25}$ e que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule $\cos \frac{\alpha}{2}$.

B.3 Calcule tg 22°30′. $\left(\right.$**Sugestão:** na identidade $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, faça $\alpha = 45°$.$\left.\right)$

B.4 Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$. $\left(\right.$**Sugestão:** calcule cos α e depois use a identidade $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$.$\left.\right)$

B.5 A partir da identidade $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$, demonstre que:

a) $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

b) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, com $\cos \alpha \neq -1$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule cos 22°30′. $\left(\right.$**Sugestão:** na identidade $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ faça $\alpha = 45°$.$\left.\right)$

C.2 Calcule sen 22°30′.

C.3 Sabendo que $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{3}$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$. $\left(\right.$**Sugestão:** $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}$.$\left.\right)$

C.4 Sabendo que $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{3}$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule sen α.

C.5 Sabendo que $\cos \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{5}$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule cos α.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescea-SP) A expressão $E = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \dfrac{\alpha}{2}}$, com sen $\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = \text{sen } 2$

b) $E = 2$

c) $E = 2 \text{ sen } \dfrac{\alpha}{2}$

d) $E = \text{sen } \dfrac{\alpha}{2}$

e) $E = 2 \cos \dfrac{\alpha}{2}$

V.2 (Fuvest-SP) Se $\cos \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{4}$, então $\cos x$ vale:

a) $-\dfrac{3}{8}$

b) $\dfrac{3}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

d) $\dfrac{1}{8}$

e) $\dfrac{\sqrt{34}}{4}$

V.3 (Fesp-SP) O valor numérico da expressão $4 \text{ sen } \dfrac{\alpha}{4} \cos \dfrac{\alpha}{4} \cos \dfrac{\alpha}{2}$ para $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{1}{8}$

d) $\dfrac{1}{16}$

e) $\dfrac{1}{32}$

V.4 (Fuvest-SP) A tangente do ângulo $2x$ é dada em função da tangente de x pela seguinte fórmula:

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}.$$

Calcule um valor aproximado da tangente do ângulo 22°30′.

a) 0,22

b) 0,41

c) 0,50

d) 0,72

e) 1,00

Capítulo 77

Equações trigonométricas com arcos da forma $ax + b$

1. Técnica de resolução

Equações do tipo sen $(ax + b) = k$, ou cos $(ax + b) = k$ ou tg $(ax + b) = k$, onde k é constante real e $a \in \mathbb{R}^*$, são resolvidas através da seguinte mudança de variável: $ax + b = \alpha$.

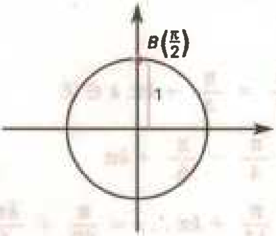
Exercícios resolvidos

R.1 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação sen $\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $2x + \dfrac{\pi}{3} = \alpha$, temos:

sen $\alpha = 1$



$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo α por $2x + \dfrac{\pi}{3}$, temos:

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \therefore 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \therefore 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \therefore x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

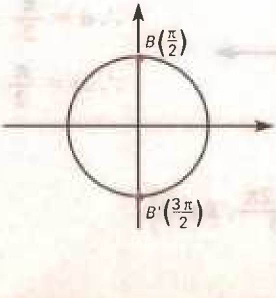
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.2 Resolva a equação cos $\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right) = 0$, em $\mathbb{R}$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $x - \dfrac{\pi}{5} = \alpha$, temos:

cos $\alpha = 0$



$B\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$B'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo α por $x - \frac{\pi}{5}$, temos:

$$x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi \therefore x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi \therefore x = \frac{7\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

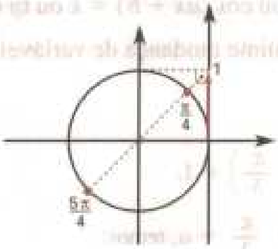
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.3 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $5x + \frac{\pi}{6} = \alpha$, temos:

$\operatorname{tg} \alpha = 1$



$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Substituindo α por $5x + \frac{\pi}{6}$, temos:

$$5x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore 5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\therefore 5x = \frac{\pi}{12} + k\pi \therefore x = \frac{\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.4 Dada a equação $\operatorname{sen} 3x = 1$, pede-se:

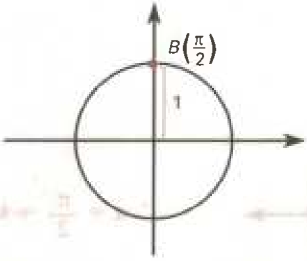
a) resolvê-la em $\mathbb{R}$;

b) resolvê-la para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

a) Fazendo $3x = \alpha$, temos:

$\operatorname{sen} \alpha = 1$



$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore 3x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \therefore x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Para determinar os valores de x com $0 \leq x < 2\pi$, basta, na expressão obtida no item (a), $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, atribuirmos valores convenientes para k.

$$\vdots \qquad \vdots$$

$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$, valor que não convém, pois $-\frac{\pi}{2} < 0$;

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$;

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$;

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$;

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}$, valor que não convém, pois $\frac{13\pi}{6} > 2\pi$.

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Observação

Para resolver equações do tipo sen $(ax + b) = c$, cos $(ax + b) = c$ ou tg $(ax + b) = c$, $c \in \mathbb{R}$, em um intervalo limitado (por exemplo, $0 \leq x < 2\pi$), podemos:

I. resolver a equação em $\mathbb{R}$, obtendo expressões gerais do tipo: $x = \alpha + k \cdot \frac{2\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$;

II. atribuir a k valores inteiros convenientes (como fizemos no exercício R.4).

R.5 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação sen x cos $\frac{\pi}{7}$ − sen $\frac{\pi}{7}$ cos $x = 1$.

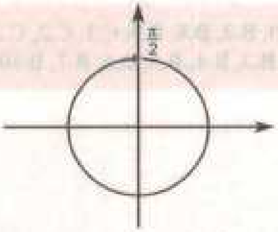
Resolução

Lembrando que sen a cos b − sen b cos a = sen $(a - b)$, podemos escrever a equação sob a forma:

$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = 1.$$

Efetuando a mudança de variável $x - \frac{\pi}{7} = \alpha$, temos:

sen $\alpha = 1$



$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Retornando à variável original, temos:

$$x - \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \therefore x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7} + k \cdot 2\pi \therefore x = \frac{9\pi}{14} + k \cdot 2\pi.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{9\pi}{14} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

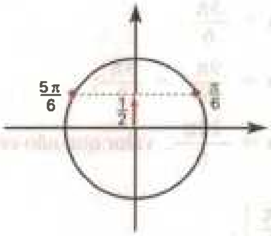
R.6 Resolva a equação $\text{sen}\, x \cos x = \frac{1}{4}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Multiplicando ambos os membros da equação por 2, temos: $2\,\text{sen}\, x \cos x = \frac{1}{2}$.

Lembrando que $2\,\text{sen}\, x \cos x = \text{sen}\, 2x$, podemos escrever a equação sob a forma $\text{sen}\, 2x = \frac{1}{2}$.
Fazendo a mudança de variável $2x = \alpha$, temos:

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{2}$$



Portanto, temos: $\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Retornando à variável original, obtemos:

$$2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 0$, temos $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$.

Para $k = 1$, temos $x = \frac{13\pi}{12}$ ou $x = \frac{17\pi}{12}$.

Nenhum outro valor inteiro de k nos interessa, pois o valor de x não pertenceria ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2, B.8, B.9, C.1, C.2, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.3, B.4, B.5, B.6, B.7, B.10, B.11, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

b) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$

c) $\text{tg}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

d) $\text{sen}\, 5x = \frac{1}{2}$

e) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

f) $\text{tg}\, 8x = \sqrt{3}$

B.2 Resolva a equação $\text{sen}\, 4x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

B.3 Determine o conjunto solução da equação $\cos 3x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.4 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, de modo que $\text{tg}\, 4x = 1$.

B.5 Sendo $0 \leqslant x \leqslant \pi$, dê o conjunto solução da equação $\text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$.

B.6 Qual é o conjunto solução da equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$?

B.7 Dê o conjunto solução da equação $\text{tg } 3x = 1$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

B.8 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação $\text{sen } 3x = \cos 3x$. (**Sugestão:** divida ambos os membros por $\cos 3x$.)

B.9 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $2 \text{ sen } x \cos x = 1$.

B.10 Resolver a equação $\text{sen } x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

B.11 No universo $U = \mathbb{R}$, resolver a equação $1 - \text{tg}^2 x = 2 \text{ tg } x$. (**Sugestão:** divida ambos os membros por $1 - \text{tg}^2 x$. Tal divisão é permitida porque certamente $1 - \text{tg}^2 x \neq 0$, pois, para $1 - \text{tg}^2 x = 0$, isto é, $\text{tg } x = \pm 1$, a igualdade $1 - \text{tg}^2 x = 2 \text{ tg } x$ é falsa.)

Exercícios complementares

C.1 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \text{sen } x \text{ sen } \frac{\pi}{3} = 1$.

C.2 Obtenha, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sen } x = 1$. $\Big($**Sugestão:** substitua $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por $\cos \frac{\pi}{3}$ e $\text{sen } \frac{\pi}{3}$, respectivamente.$\Big)$

C.3 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva a equação: $\cos x + \sqrt{3} \text{ sen } x = 2$. (**Sugestão:** divida ambos os membros da igualdade por 2, recaindo no exercício anterior.)

C.4 Resolva a equação $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.5 Determine o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, de modo que: $\text{sen}^3 x \cos x + \text{sen } x \cos^3 x = \frac{1}{2}$.

C.6 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $2 \text{ sen } \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} = -1$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) Resolva a equação $(\text{sen } x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}$.

V.2 (PUC-PR) Os valores x que satisfazem a equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$ são:

a) $x = \frac{7\pi}{30} + k \cdot \frac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \frac{7\pi}{15} + k \cdot \frac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \frac{7\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

d) $x = \frac{7\pi}{5} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

e) $x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{6}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

V.3 (Faap-SP) Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sen } x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Capítulo 78

Inequações trigonométricas com arcos da forma $ax + b$

1. Técnica de resolução

Inequações que comparam o sen $(ax + b)$, o cos $(ax + b)$ ou a tg $(ax + b)$ com uma constante c, $c \in \mathbb{R}$, são resolvidas através da seguinte mudança de variável:

$$ax + b = \alpha.$$

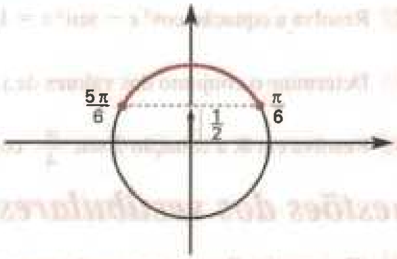
Exercícios resolvidos

R.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\text{sen } 8x \geq \frac{1}{2}$.

Resolução

Fazendo $8x = \alpha$:

$$\text{sen } \alpha \geq \frac{1}{2}$$



$$\therefore \ \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo α por $8x$:

$$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq 8x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \therefore \ \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

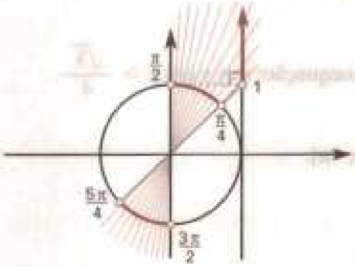
R.2 Resolva a inequação $\text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$ para $0 \leq x \leq \pi$.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos resolvê-la em $\mathbb{R}$.

Fazendo $2x + \frac{\pi}{4} = \alpha$:

$\text{tg}\,\alpha > 1$



$$\therefore \frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo α por $2x + \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\therefore k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi \therefore \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, vamos atribuir valores inteiros para k de modo que tenhamos $0 \leq x \leq \pi$:

$\vdots$

$k = -1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{8}$, valor que não convém;

$k = 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{8}$;

$k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{8}$;

$k = 2 \Rightarrow \pi < x < \frac{9\pi}{8}$, valor que não convém;

$\vdots$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{8} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{8}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2, B.3, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.4, B.5, B.6, C.2, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\text{sen}\,4x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\text{tg}\,5x > 1$ e) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -1$

b) $\cos 3x \leq \frac{1}{2}$ d) $\cos 3x \geq \frac{1}{2}$ f) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) < -\frac{1}{2}$

B.2 Determine o conjunto solução da inequação $\cos 4x < \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, que satisfaçam a desigualdade $\operatorname{sen} 3x \geqslant \frac{1}{2}$.

B.4 Resolva a inequação $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \geqslant \sqrt{3}$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

B.5 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a inequação: $\operatorname{sen} x \cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

B.6 Resolva a inequação $\operatorname{sen} \frac{x}{3} > 0$ no intervalo $[0, 9\pi]$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x > \frac{1}{2}$.

C.2 Determine, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução da inequação: $\operatorname{sen} x \cos x \geqslant \frac{1}{4}$.

C.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, que satisfaçam a desigualdade $2 \operatorname{sen} x \cos x \cos 2x < 0$.

C.4 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x < -\frac{1}{2}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) Para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução de $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 > 1$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

e) $\varnothing$.

V.2 (UFES) O conjunto solução da inequação $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} > 1$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{4}\right\}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}\right\}$.

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$.

V.3 (Cesgranrio) Resolvendo em $\mathbb{R}$ a inequação $\cos 3x \leqslant \frac{1}{2}$, obtém-se como conjunto solução:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{k \cdot 2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Capítulo 79

Fatoração de expressões trigonométricas em seno e co-seno — fórmulas de prostaférese

1. Fórmulas de transformação em produto

Você já estudou, em álgebra, alguns casos de fatoração, como, por exemplo, a diferença de dois quadrados, isto é: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Vamos estudar agora quatro casos de fatoração de expressões trigonométricas:

$$\text{I. } \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\text{II. } \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

$$\text{III. } \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\text{IV. } \cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

Essas fórmulas são conhecidas como fórmulas de prostaférese (*prosthaphoeresis*, que, em grego, significa adição e subtração.)

Demonstração

Sabemos que:

A) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$;

B) $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$;

C) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$;

D) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Somando, membro a membro, (A) e (B): I. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y$.

Subtraindo, membro a membro, (A) e (B): II. $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x$.

Somando, membro a membro, (C) e (D): III. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$.

Subtraindo, membro a membro, (C) e (D): IV. $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Façamos agora em cada uma das igualdades (I), (II), (III) e (IV) as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = q. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $x = \dfrac{p+q}{2}$ e $y = \dfrac{p-q}{2}$.

Então efetuamos as mudanças de variáveis em (I), (II), (III) e (IV):

$$\text{I. } \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\text{II. } \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

$$\text{III. } \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\text{IV. } \cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Fatore a expressão sen $5x$ + sen $3x$.

Resolução

Pela fórmula (I) de transformação em produto:

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2} = 2 \operatorname{sen} 4x \cos x.$$

R.2 Fatore a expressão cos $3x$ + cos $7x$.

Resolução

Pela fórmula (III) de transformação em produto:

$$\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos \frac{3x+5x}{2} \cos \frac{3x-5x}{2} = 2 \cos 4x \cos(-x).$$

Sabemos que $\cos(-x) = \cos x$. Então, substituindo, temos: $\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos 4x \cos x$.

R.3 Fatore a expressão cos 10° − cos 40°.

Resolução

Pela fórmula (IV) de transformação em produto:

$$\cos 10° - \cos 40° = -2 \operatorname{sen} \frac{10° + 40°}{2} \operatorname{sen} \frac{10° - 40°}{2} = -2 \operatorname{sen} 25° \operatorname{sen}(-15°).$$

Sabemos que $\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen} 15°$. Logo, temos: $\cos 10° - \cos 40° = 2 \operatorname{sen} 25° \operatorname{sen} 15°$.

R.4 Fatore a expressão 1 − sen 80°.

Resolução

Fazendo $1 = \operatorname{sen} 90°$ e aplicando a fórmula (II) de transformação em produto:

$$\operatorname{sen} 90° - \operatorname{sen} 80° = 2 \operatorname{sen} \frac{90° - 80°}{2} \cos \frac{90° + 80°}{2} = 2 \operatorname{sen} 5° \cos 85°.$$

R.5 Fatore a expressão sen $3x$ + sen x + 2 sen $2x$.

Resolução

$$(\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x) + 2 \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} + 2 \operatorname{sen} 2x =$$

$$= 2 \operatorname{sen} 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} 2x (\cos x + 1).$$

Fazendo $1 = \cos 0$, temos: $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} 2x (\cos x + \cos 0) =$

$$= 2 \operatorname{sen} 2x \left(2 \cos \frac{x+0}{2} \cos \frac{x-0}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} 2x \, 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 4 \operatorname{sen} 2x \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.6, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.7, B.8, B.9, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Fatore as expressões:

a) $\text{sen } 4x + \text{sen } 2x$
c) $\cos 8x + \cos 2x$
e) $\text{sen } 10° + \text{sen } 20°$
g) $\cos 10° - 1$
b) $\text{sen } 6x - \text{sen } 4x$
d) $\cos 5x - \cos x$
f) $-1 + \text{sen } 20°$
h) $1 - \cos x$

B.2 Fatore a expressão $\text{sen } 10° + \cos 20°$. (**Sugestão:** transforme a expressão numa soma de senos (ou co-senos) usando a propriedade: "Se dois arcos são complementares, então o seno de um deles é igual ao co-seno do outro".)

B.3 Transforme em produto a expressão $\cos 5x + \cos x - 2 \cos 3x$.

B.4 Escreva a expressão a seguir na forma fatorada: $\text{sen } 6x + 2 \text{ sen } 4x + \text{sen } 2x$.

B.5 Obtenha uma expressão fatorada equivalente a: $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$.

B.6 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 2x}$.

B.7 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{sen } 4x + \text{sen } 2x}{\cos 4x - \cos 2x}$.

B.8 Escreva a expressão em uma forma simplificada: $E = \dfrac{\text{sen } a + \text{sen } 3a + \text{sen } 5a + \text{sen } 7a}{4 \cos a \text{ sen } 4a}$

B.9 Demonstre que a igualdade $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

$\left(\textbf{Sugestão: } \cos x = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right).\right)$

Exercícios complementares

C.1 Determine o máximo valor que pode assumir a expressão: $E = \text{sen } x + \cos x$.

C.2 Simplifique a expressão $E = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ para $\cos 2x \neq -1$.

C.3 Demonstre a identidade em $\mathbb{R}$: $\text{sen}^2 3x - \text{sen}^2 x = \text{sen } 2x \text{ sen } 4x$.

C.4 A expressão $\cos^2 3x - \cos^2 x$ é equivalente a:

a) $\text{sen } 2x$
c) $\cos 2x \text{ sen } 2x$
e) $-\text{sen } 2x \text{ sen } 4x$
b) $-\cos 2x \text{ sen } 2x$
d) $-\cos 2x \cos 4x$

C.5 Sendo $a - b = \dfrac{\pi}{3}$, calcule o valor de $y = \dfrac{\text{sen } a + \text{sen } b}{\cos a - \cos b}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (F. R. Nuno Lisboa-RJ) Sendo $a - b = \dfrac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão: $y = \dfrac{\text{sen } a - \text{sen } b}{\cos a + \cos b}$.

V.2 (U. F. Pelotas-RS) A expressão $\dfrac{\text{sen } x + \text{sen } y}{\text{sen } x - \text{sen } y}$ é equivalente a:

a) $\text{tg } \dfrac{x+y}{2} \text{ tg } \dfrac{x-y}{2}$
d) $\dfrac{\text{tg } \dfrac{x+y}{2}}{\text{tg } \dfrac{x-y}{2}}$
b) $\text{tg } (2x + 2y) \text{ tg } (2x - 2y)$
e) 0
c) 1

V.3 (FEI-SP) Transforme em produto a expressão $\text{sen } 20° + \cos 40°$.

Capítulo 80

Equações trigonométricas na forma fatorada

1. Resolução de equações através das fórmulas de transformação em produto

Dada uma equação $f(x) = g(x)$, podemos resolvê-la usando a seguinte técnica:

I. transformamos a equação $f(x) = g(x)$ na equação equivalente $f(x) - g(x) = 0$;

II. fatoramos, se possível, o primeiro membro da igualdade anterior, conseguindo assim uma equação equivalente do tipo $h(x) \cdot t(x) = 0$;

III. aplicamos então a propriedade do produto nulo, ou seja: $h(x) \cdot t(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$ ou $t(x) = 0$.

Exercícios resolvidos

R.1 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação sen $5x$ = sen $3x$.

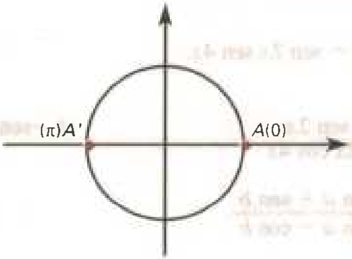
Resolução

sen $5x$ − sen $3x = 0$.

Fatorando o primeiro membro da igualdade, temos: $2 \operatorname{sen} x \cos 4x = 0$.

Então:

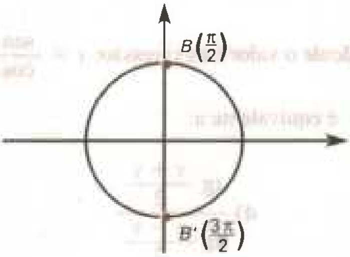
- sen $x = 0$



$\therefore\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

- ou $\cos 4x = 0$ (fazemos $4x = \alpha$)

$\cos \alpha = 0$


$B\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$B'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo α por $4x$: $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \therefore\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.2 Resolva em IR a equação sen $3x$ − sen $x = 2 \cos 2x$.

Resolução

sen $3x$ − sen $x - 2\cos 2x = 0$.

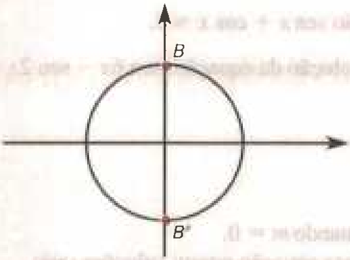
Fatorando o primeiro membro:

$$2 \operatorname{sen} x \cos 2x - 2\cos 2x = 0 \therefore 2\cos 2x(\operatorname{sen} x - 1) = 0$$
$$\therefore \cos 2x = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x = 1.$$

Resolvendo cada uma dessas equações:

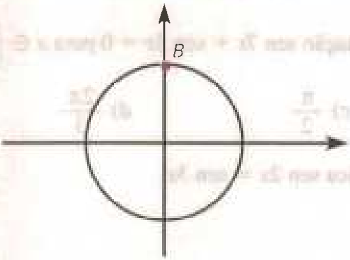
- $\cos 2x = 0$ (fazemos $2x = \alpha$)

$\cos \alpha = 0$



$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\therefore 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \therefore x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

- ou sen $x = 1$



$$\therefore x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, C.1, C.3.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7, C.2, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Resolva em IR a equação $\cos 5x = \cos x$.

B.2 Determine, em IR, o conjunto solução da equação sen $3x$ = sen x.

B.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in$ IR, que satisfaçam a igualdade $\cos x + \cos 5x = 2\cos 3x$.

B.4 Considerando o universo U = IR, resolva a equação:

$$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x = 2\cos 3x.$$

B.5 Dê o conjunto solução da equação sen $5x$ = sen x, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.6 Sabendo que $0 \leq x < 2\pi$, determine o conjunto solução da equação $\cos 3x = \cos x$.

B.7 Resolva em IR a equação sen $3x = \cos x$. $\left(\textbf{Sugestão: } \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

Exercícios complementares

C.1 Sendo a, b e c as medidas dos ângulos internos de um triângulo tal que $\cos a + \cos b = \operatorname{sen} c$, prove que o triângulo é retângulo.

C.2 Sendo a, b e c as medidas dos ângulos internos de um triângulo tal que $\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 4b = -2 \operatorname{sen} 2c$, prove que o triângulo é retângulo ou isósceles.

C.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$. $\left(\textbf{Sugestão: } \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\right)$

C.4 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\operatorname{sen} x + \cos x = 3$.

C.5 Obtenha, no universo $U = [0, 2\pi[$, o conjunto solução da equação: $\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Sendo $\operatorname{sen} x - \cos x = m$:

a) ache todas as soluções reais dessa equação quando $m = 0$.

b) determine todos os valores m para os quais essa equação possui soluções reais.

V.2 (PUC-MG) A soma das raízes distintas da equação $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é:

a) π

b) 2π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

e) $\frac{3\pi}{2}$

V.3 (Mapofei-SP) Resolva a equação trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 3x$.

Capítulo 81

Fatoração de expressões trigonométricas em tangente

1. Fórmulas de transformação em produto

Vamos estudar, agora, as fatorações da soma e da diferença de duas tangentes.

Dados dois arcos de medidas p e q, diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{(V)} \quad \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q} \quad \text{e} \quad \text{(VI)} \quad \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}.$$

Demonstração

$$\text{(V)} \quad \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q}$$

$$\therefore \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}.$$

(c.q.d.)

A demonstração da identidade (VI) é análoga.

Exercícios resolvidos

R.1 Fatore a expressão $\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} x$.

Resolução

Pela identidade (V), temos: $\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} 5x}{\cos 4x \cos x}$.

R.2 Fatore a expressão $1 - \operatorname{tg} x$.

Resolução

Fazendo $1 = \operatorname{tg} 45°$ e aplicando a identidade (VI), temos:

$$\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen}(45° - x)}{\cos 45° \cos x} = \frac{\operatorname{sen}(45° - x)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x} = \frac{\sqrt{2}\ \operatorname{sen}(45° - x)}{\cos x}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, C.1.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.4, C.2, C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Fatore as expressões:

a) $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x$
b) $\operatorname{tg} 6x - \operatorname{tg} 2x$
c) $\operatorname{tg} 40° - \operatorname{tg} 10°$
d) $1 + \operatorname{tg} x$
e) $1 - \operatorname{tg} 2x$

B.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$.

B.3 Determine, no universo $U = \mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$.

B.4 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$.

Exercícios complementares

C.1 A expressão $E = \operatorname{tg}^2 54° - \operatorname{tg}^2 18°$ é equivalente a:

a) $E = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 18° \cos 18°}$
b) $E = 3 \operatorname{sen} 18°$
c) $E = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 72° \operatorname{sen} 36°}$
d) $E = \dfrac{1}{\cos 54°}$
e) $E = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 18°}$

C.2 Transformar em produto a expressão $E = \operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b$, obedecidas as condições de existência.

C.3 Fatorar a expressão $E = \operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b$, obedecidas as condições de existência.

C.4 Sendo a, b e c as medidas dos ângulos internos de um triângulo tal que $a < 90°$, $b < 90°$ e $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \sec a \sec b$, prove que $c = 90°$.

Questões dos vestibulares

V.1 (U. Católica de Salvador-BA) Determinar o número de soluções da equação $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

V.2 (Fesp-PE) A expressão $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$, obedecidas as condições de existência, é equivalente a:

a) $\operatorname{tg} (45° - x)$
b) $\operatorname{tg} (45° + x)$
c) $\operatorname{cotg} (45° - x)$
d) $\operatorname{cotg} (45° + x)$
e) $\sec (45° - x)$

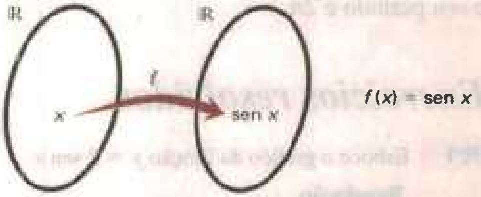
V.3 Se a, b e c são medidas dos ângulos internos de um triângulo tal que $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \sec a \sec b$, então pode-se afirmar que:

a) $c = 90°$
b) $c < 90°$
c) $c > 90°$
d) $a = 15°$
e) $b = 20°$

Capítulo 82

A função seno

1. Conceituação

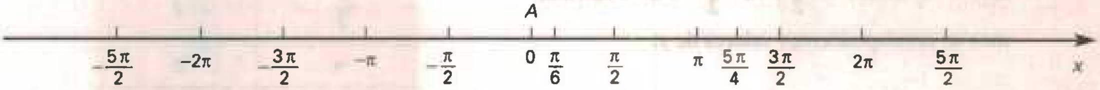


IR
IR
f
x
sen x
f (x) = sen x

Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ao lado que associa cada número real x ao sen x.
O domínio e a imagem de f são, respectivamente, os conjuntos:

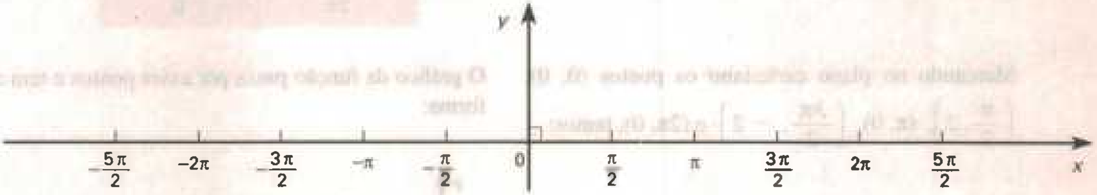
$$D = \mathbb{R};\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

Para construir o gráfico de f, vamos "desenrolar" as infinitas voltas da circunferência trigonométrica, obtendo assim o eixo real (eixo das abscissas):



A
$-\frac{5\pi}{2}$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
x

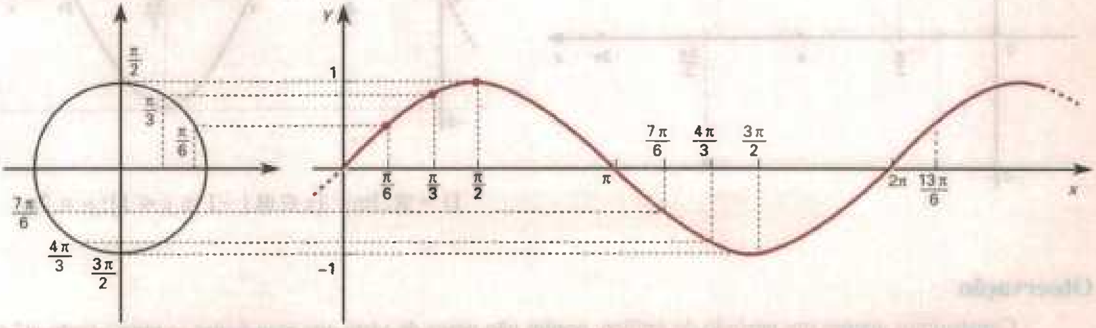
Pelo ponto A, de abscissa zero, tracemos o eixo das ordenadas, perpencidular ao eixo das abscissas:



y
$-\frac{5\pi}{2}$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
x

Agora, marquemos no plano cartesiano os pontos (x, y), onde $y = \text{sen } x$.

2. Gráfico da função $y = \text{sen } x$



$$D = \mathbb{R};\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

Observação

Se uma função f, de domínio D, satisfaz a condição $f(p + x) = f(x)$, para qualquer $x \in D$, e se p é o menor valor positivo que satisfaz tal condição, então dizemos que a função f é periódica e que seu período é p.

Note que a função seno satisfaz as condições:

$$\begin{gathered} \text{sen}\,(2\pi + x) = \text{sen}\,x, \\ \text{sen}\,(4\pi + x) = \text{sen}\,x, \\ \text{sen}\,(6\pi + x) = \text{sen}\,x, \\ \vdots \\ \text{sen}\,(k \cdot 2\pi + x) = \text{sen}\,x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

O menor número positivo p tal que $\text{sen}\,(p + x) = \text{sen}\,x$ é $p = 2\pi$. Portanto a função seno é periódica e seu período é 2π.

Exercícios resolvidos

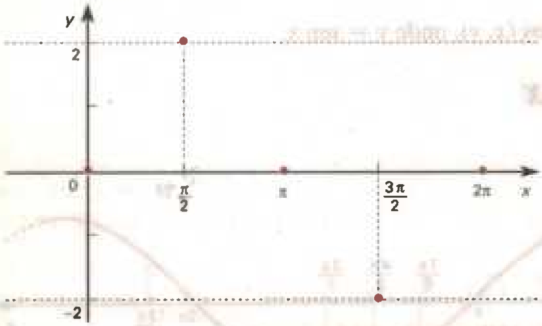
R.1 Esboce o gráfico da função $y = 2\,\text{sen}\,x$.

Resolução

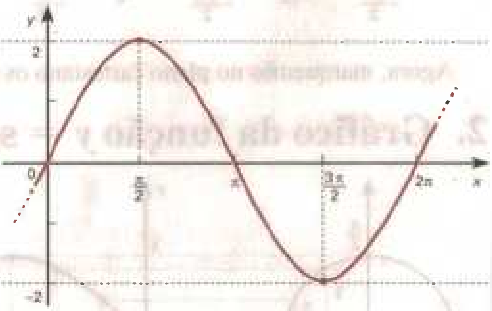
Para um esboço do gráfico, basta atribuirmos ao arco x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e calcularmos os correspondentes valores de y:

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0

Marcando no plano cartesiano os pontos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:



O gráfico da função passa por esses pontos e tem a forma:



$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; $p = 2\pi$.

Observação

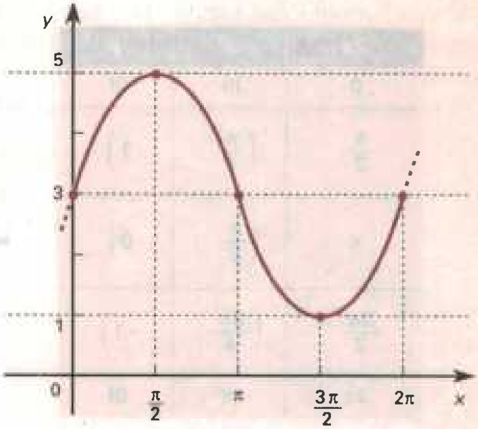
Construímos apenas um período do gráfico, porém não perca de vista que essa figura se repete tanto até o $+\infty$ como até o $-\infty$ na direção do eixo das abscissas.

R.2 Esboce o gráfico da função $y = 3 + 2 \operatorname{sen} x$.

Resolução

x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	5
π	3
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3

⇒



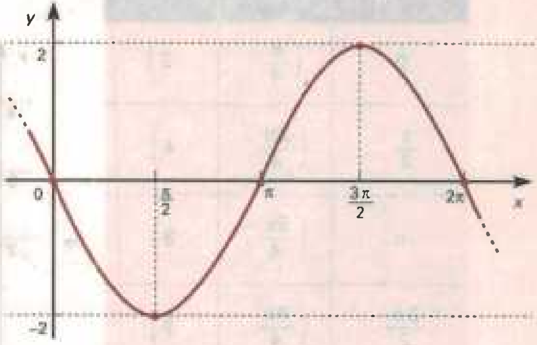
$D = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$; $p = 2\pi$.

R.3 Esboce o gráfico da função $y = -2 \operatorname{sen} x$.

Resolução

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	0

⇒



$D = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$; $p = 2\pi$.

R.4 Esboce o gráfico da função $y = \operatorname{sen} 2x$.

Resolução

Quando o arco da função seno for da forma $ax + b$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$ ou $a = 1$ e $b \neq 0$, devemos construir uma tabela com três colunas: a primeira para o arco $ax + b$, a segunda para valores de x e a terceira para valores de y.

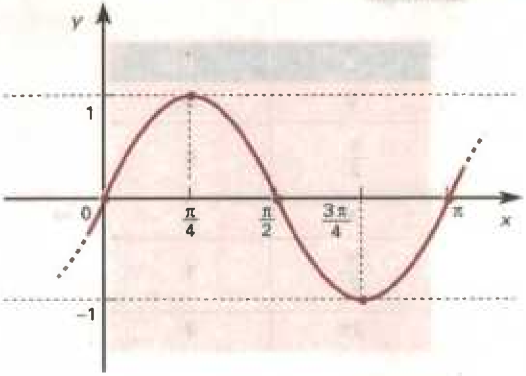
No exercício em questão, a tabela deve ter a forma:

$2x$	x	y

Para obtermos um período da função, atribuímos ao arco $2x$ os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, e a seguir determinamos os valores correspondentes de x e y:

$2x$	x	y
0	$(0$	$0)$
$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}\right.$	$\left.1\right)$
π	$\left(\frac{\pi}{2}\right.$	$\left.0\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right.$	$\left.-1\right)$
2π	$(\pi$	$0)$

$\Rightarrow$



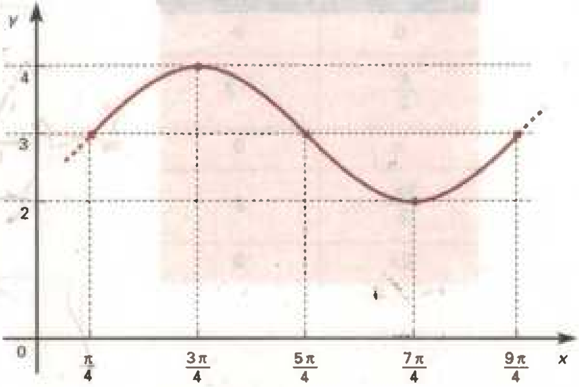
$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; $p = \pi$.

R.5 Esboce o gráfico da função $y = 3 + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\left(\frac{\pi}{4}\right.$	$\left.3\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right.$	$\left.4\right)$
π	$\left(\frac{5\pi}{4}\right.$	$\left.3\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{4}\right.$	$\left.2\right)$
2π	$\left(\frac{9\pi}{4}\right.$	$\left.3\right)$

$\Rightarrow$

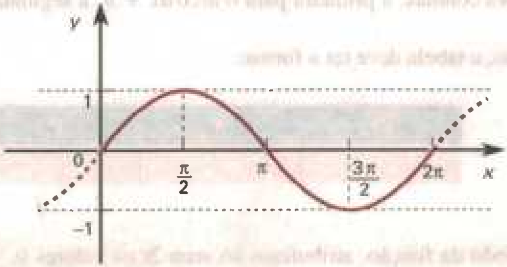


$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 4\}$; $p = 2\pi$.

R.6 Esboce o gráfico da função $y = |\text{sen}\, x|$.

Resolução

Inicialmente, vamos construir o gráfico auxiliar de $Y = \text{sen}\, x$:

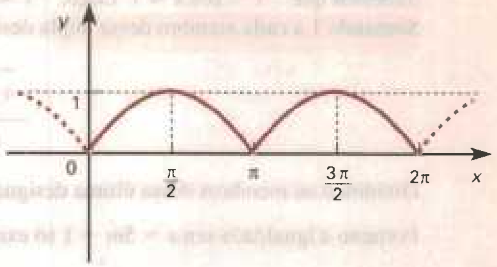


Agora, vamos construir o gráfico de $y = |\text{sen } x|$, ou seja, $y = |Y|$.

I. Se $Y \geqslant 0$, então $|Y| = Y$. Graficamente isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem a ordenada Y não-negativa permanecem inalterados.

II. Se $Y < 0$ então $|Y| = -Y$. Graficamente isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem a ordenada Y negativa devem ser transformados nos simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Assim, temos que o gráfico de $y = |\text{sen } x|$ é:

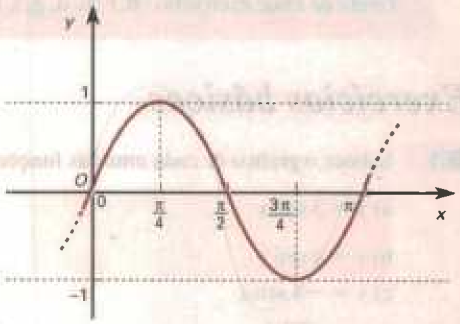


$$D = \mathbb{R};\ \text{Im} = [0, 1];\ p = \pi.$$

R.7 Esboce o gráfico da função $y = 1 + |\text{sen } 2x|$.

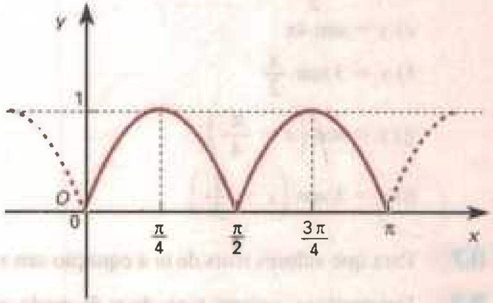
Resolução

Fase 1. Gráfico auxiliar $y_1 = \text{sen } 2x$. Do exercício R.4 temos que esse gráfico é:

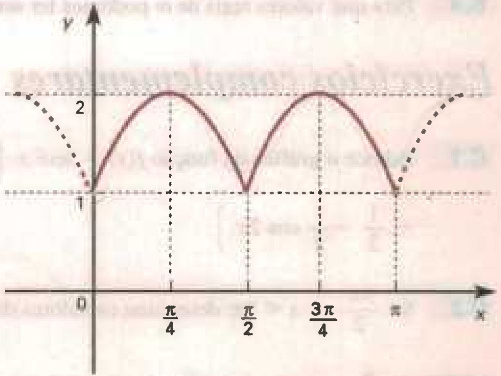


Fase 2. Construímos o gráfico da função $y_2 = |\text{sen } 2x|$. Para isso, basta, no gráfico anterior:

- conservar os pontos de ordenadas não-negativas;
- transformar os pontos de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo Ox:



Fase 3. Finalmente, para obtermos o gráfico de $y = 1 + |\text{sen } 2x|$, basta transladarmos o gráfico anterior uma unidade verticalmente para cima:



$$D = \mathbb{R};\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\};\ p = \frac{\pi}{2}.$$

R.8 Obtenha os valores reais de m de modo que exista a igualdade sen $x = 5m - 1$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Logo, $-1 \leqslant 5m - 1 \leqslant 1$.

Somando 1 a cada membro dessa dupla desigualdade, temos:

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leqslant & 5m - 1 & \leqslant & 1 \\ +1 & & +\ 1 & & +\ 1 \\ \hline 0 & \leqslant & 5m & \leqslant & 2. \end{array}$$

Dividindo os membros dessa última desigualdade por 5, obtemos: $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}$.

Portanto a igualdade sen $x = 5m - 1$ só existe para $m \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, c, e, f, h, j, k), B.2, B.4, C.1, C.3, C.6 (a, d).
Tarefa de casa: exercícios: B.1 (b, d, g, i, l, m, n, o, p), B.3, C.2, C.4, C.5, C.6 (b, c, e).

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = 3 \text{ sen } x$

b) $y = 4 \text{ sen } x$

c) $y = -4 \text{ sen } x$

d) $y = \dfrac{\text{sen } x}{2}$

e) $y = \text{sen } 4x$

f) $y = 3 \text{ sen } \dfrac{x}{2}$

g) $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

h) $y = 3 \text{ sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

i) $y = -2 \text{ sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

j) $y = 4 + 2 \text{ sen } x$

k) $y = 3 - 2 \text{ sen } x$

l) $y = -3 + \text{sen } x$

m) $y = 2 + 5 \text{ sen } 2x$

n) $y = -3 + 2 \text{ sen } \dfrac{x}{2}$

o) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

p) $y = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

B.2 Para que valores reais de m a equação sen $x = 3m - 1$ admite solução?

B.3 Determine os valores reais de m de modo que exista a igualdade $2 \text{ sen } x = 3m + 1$.

B.4 Para que valores reais de m podemos ter $\text{sen}^2 x = 2m - 1$?

Exercícios complementares

C.1 Esboce o gráfico da função $f(x) = \text{sen}^2 x$. $\left(\right.$**Sugestão:** lembre que $\cos 2x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x$. Logo, $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.$\left.\right)$

C.2 Se $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$; determine os valores de m de modo que sen $x = 3m - 1$.

[redacted] Se $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, determine os valores de m de modo que $4 \text{ sen } x - m = 0$.

C.4 Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

C.5 Represente graficamente a função $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$.

C.6 Esboce os gráficos das funções:

a) $y = 2 + |\operatorname{sen} x|$

b) $y = 2 + |2 \operatorname{sen} x|$

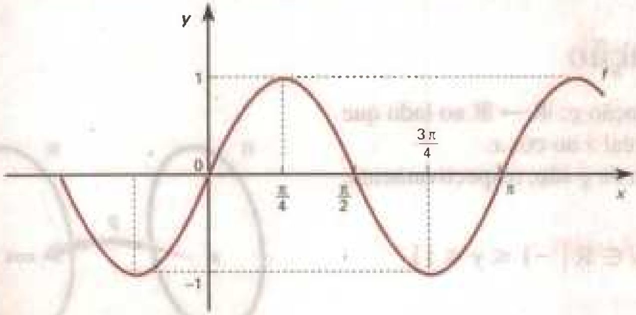
c) $y = 3\,|\operatorname{sen} x|$ (**Sugestão:** $3\,|\operatorname{sen} x| = |3 \operatorname{sen} x|$.)

d) $y = -1 + |\operatorname{sen} 4x|$

e) $y = -|\operatorname{sen} x|$

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC/Campinas-SP) A função f, representada abaixo, é dada por:



a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

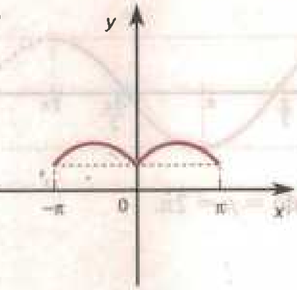
c) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$

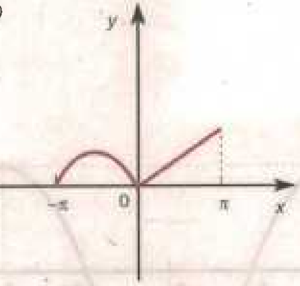
e) $f(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

V.2 (PUC-PR) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = 1 + |\operatorname{sen} x|$, para $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

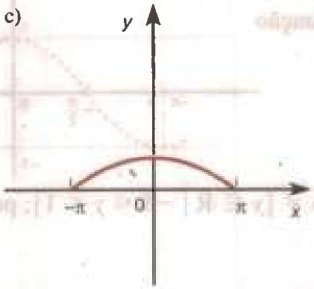
a)



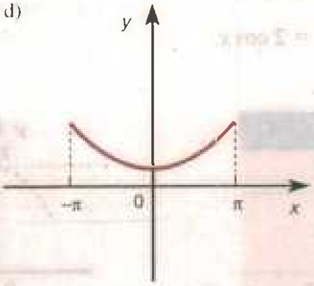
b)



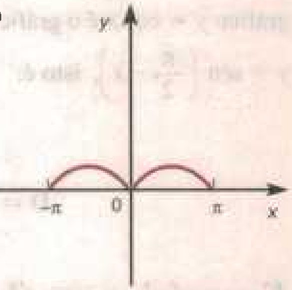
c)



d)



e)



V.3 (FEB-SP) Para que a sentença $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{x - 1}{5}$ tenha sentido, os valores de x devem estar no intervalo:

a) $-5 \leqslant x \leqslant 5$

b) $-4 \leqslant x \leqslant 6$

c) $-1 \leqslant x \leqslant 1$

d) $-\dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5}$

e) n.d.a.

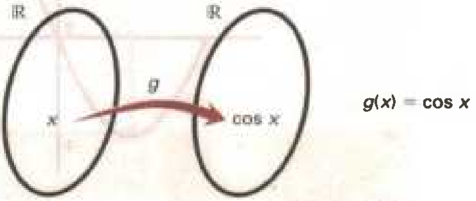
Capítulo 83

A função co-seno

1. Conceituação

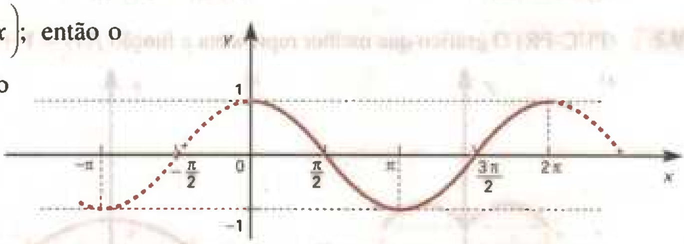
Consideremos a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ao lado que associa cada número real x ao $\cos x$.
O domínio e a imagem de g são, respectivamente, os conjuntos:

$$D = \mathbb{R};\ Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$



2. Gráfico da função $y = \cos x$

Sabemos que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; então o gráfico $y = \cos x$ é o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, isto é:



$$D = \mathbb{R};\ Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\};\ \text{período} = p = 2\pi.$$

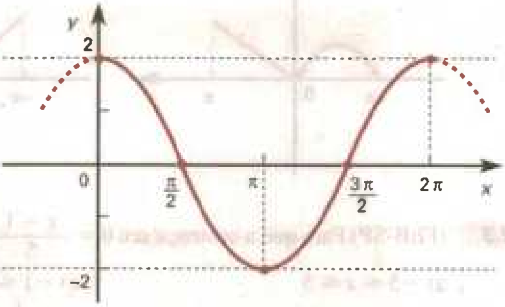
Exercícios resolvidos

R.1 Esboce o gráfico da função $y = 2 \cos x$.

Resolução

x	y
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	−2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2

⇒



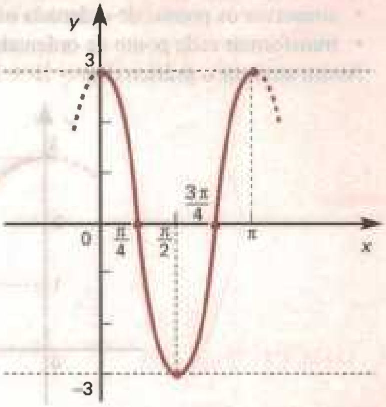
$$D = \mathbb{R};\ Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\};\ p = 2\pi.$$

R.2 Esboce o gráfico da função $y = 3\cos 2x$.

Resolução

$2x$	x	y
0	$(0$	$3)$
$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}\right.$	$\left.0\right)$
π	$\left(\frac{\pi}{2}\right.$	$\left.-3\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right.$	$\left.0\right)$
2π	$(\pi$	$3)$

⇒



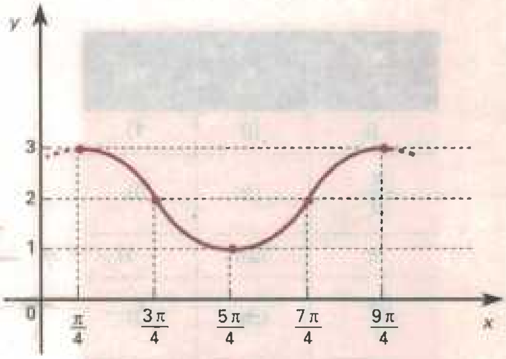
D = ℝ; Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$; $p = \pi$.

R.3 Esboce o gráfico da função $y = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\left(\frac{\pi}{4}\right.$	$\left.3\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right.$	$\left.2\right)$
π	$\left(\frac{5\pi}{4}\right.$	$\left.1\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{4}\right.$	$\left.2\right)$
2π	$\left(\frac{9\pi}{4}\right.$	$\left.3\right)$

⇒



D = ℝ; Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$; $p = 2\pi$.

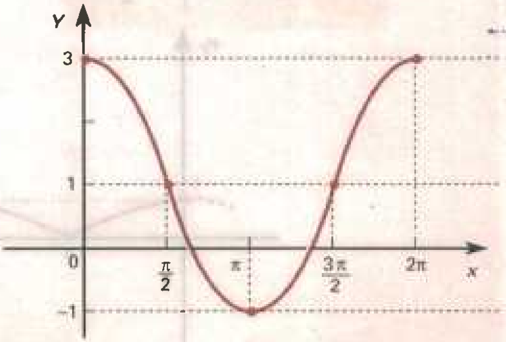
R.4 Esboce o gráfico da função $y = |1 + 2\cos x|$.

Resolução

Fase 1. Inicialmente, vamos construir o gráfico auxiliar $Y = 1 + 2\cos x$.

x	Y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	1
π	−1
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3

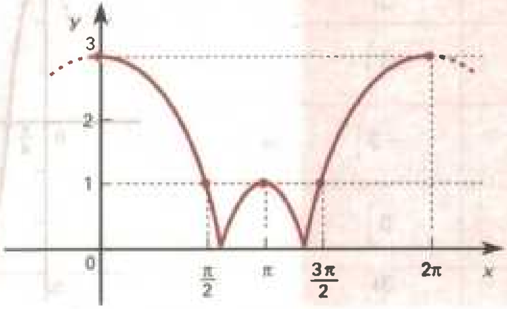
⇒



Fase 2. Agora vamos construir o gráfico de $y = |1 + 2\cos x|$. Para isso, basta, no gráfico anterior:

- conservar os pontos de ordenada não-negativa;
- transformar cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

Assim teremos o gráfico de $y = |1 + 2\cos x|$:



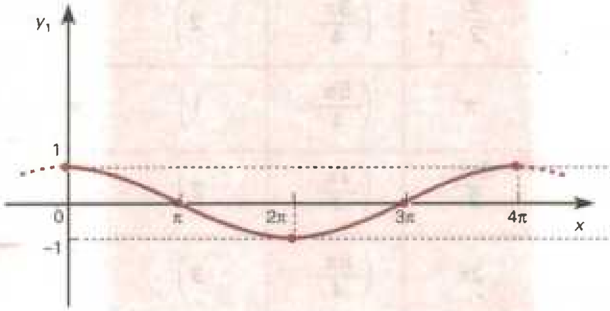
$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$; $p = 2\pi$.

R.5 Esboce o gráfico da função $y = 1 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.

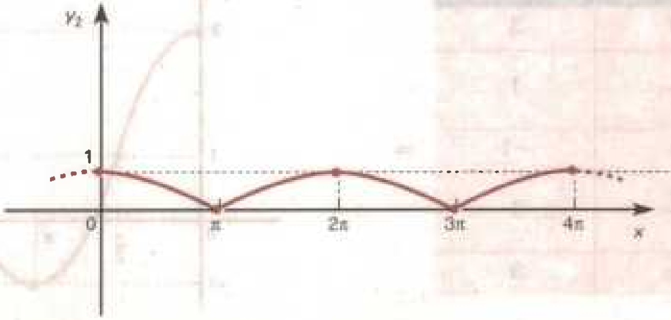
Resolução

Fase 1. Gráfico auxiliar $y_1 = \cos \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2}$	x	y_1
0	(0	1)
$\frac{\pi}{2}$	(π	0)
π	(2π	-1)
$\frac{3\pi}{2}$	(3π	0)
2π	(4π	1)

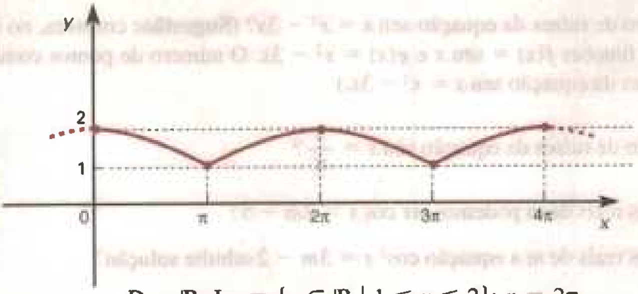


Fase 2. Gráfico de $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$



Fase 3. Gráfico $y = 1 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$

Basta transladar o gráfico anterior verticalmente para cima uma unidade.



$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$; $p = 2\pi$.

Sugestões

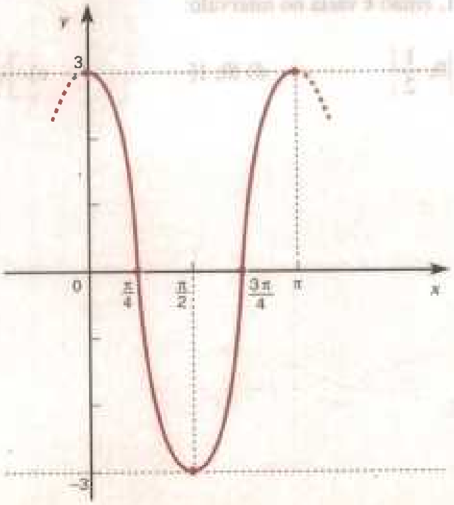
Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, c, d, e, f, g, h, m), B.2, B.4, B.6, B.7, C.3 (a, b, c).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (b, i, j, k, l, n, o, p, q), B.3, B.5, C.1, C.2, C.3 (d, e, f).

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = 3 \cos x$
b) $y = 4 \cos x$
c) $y = -4 \cos x$
d) $y = \frac{\cos x}{2}$
e) $y = \cos 4x$
f) $y = 3 \cos \frac{x}{2}$
g) $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
h) $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
i) $y = -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
j) $y = 4 + 2 \cos x$
k) $y = 3 - 2 \cos x$
l) $y = -3 + \cos x$
m) $y = 2 + 5 \cos 2x$
n) $y = -3 + 2 \cos \frac{x}{2}$
o) $y = 2 + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
p) $y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
q) $y = 3 + 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

B.2 O gráfico da função $y = b \cos mx$ é:



Determine os valores de b e m.

B.3 Resolva graficamente a inequação sen $x > \cos x$ para $0 \leqslant x < 2\pi$. (**Sugestão:** construa os gráficos das funções seno e co-seno no mesmo plano cartesiano e procure no eixo das abscissas os valores para os quais sen $x > \cos x$.)

B.4 Qual é o número de raízes da equação sen $x = x^2 - 3x$? (**Sugestão:** construa, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = x^2 - 3x$. O número de pontos comuns aos dois gráficos é o número de raízes da equação sen $x = x^2 - 3x$.)

B.5 Qual é o número de raízes da equação sen $x = \dfrac{x}{\pi}$?

B.6 Para que valores reais de m podemos ter $\cos x = 2m - 5$?

B.7 Para que valores reais de m a equação $\cos^2 x = 3m - 2$ admite solução?

Exercícios complementares

C.1 Esboce o gráfico da função $y = \cos^2 x$. (**Sugestão:** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$.)

C.2 Sabendo que $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, determine os valores reais de m de modo que $\cos x = \dfrac{3m - 1}{2}$.

C.3 Represente graficamente cada uma das funções:

a) $y = |3 + 4\cos x|$

b) $y = -|\cos x|$

c) $y = -1 + |\cos x|$

d) $y = -3\,|2\cos x|$ (**Sugestão:** $-3\,|2\cos x| = -|6\cos x|$.)

e) $y = 2 - |\cos x|$

f) $y = 3 + |\cos 2x|$

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRO) O conjunto imagem da função $y = 1 + \cos x$ é:

a) $[-2, 0]$ b) $[1, 2]$ c) $[-1, 1]$ d) $[0, 2]$ e) $[-1, 0]$

V.2 (Mackenzie-SP) A equação $\cos x = 3a - 1$ admite solução somente se:

a) $1 \leqslant a \leqslant 2$ b) $0 \leqslant a \leqslant 1$ c) $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{2}{3}$ d) a é inteiro. e) $a > \dfrac{2}{3}$

V.3 (Cescem-SP) Se $x \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ e $\cos x = 2k - 1$, então k varia no intervalo:

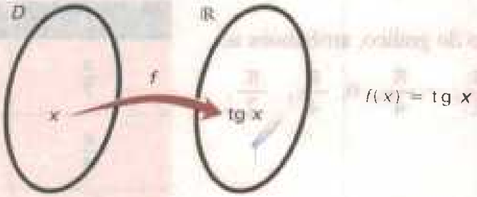
a) $]-1, 0[$ b) $[-1, 0[$ c) $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ d) $]0, 1[$ e) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

Capítulo 84

Outras funções trigonométricas

1. Função tangente

Consideremos o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Chama-se **função tangente** a função $f\colon D \to \mathbb{R}$ que associa cada x, $x \in D$, à tg x.



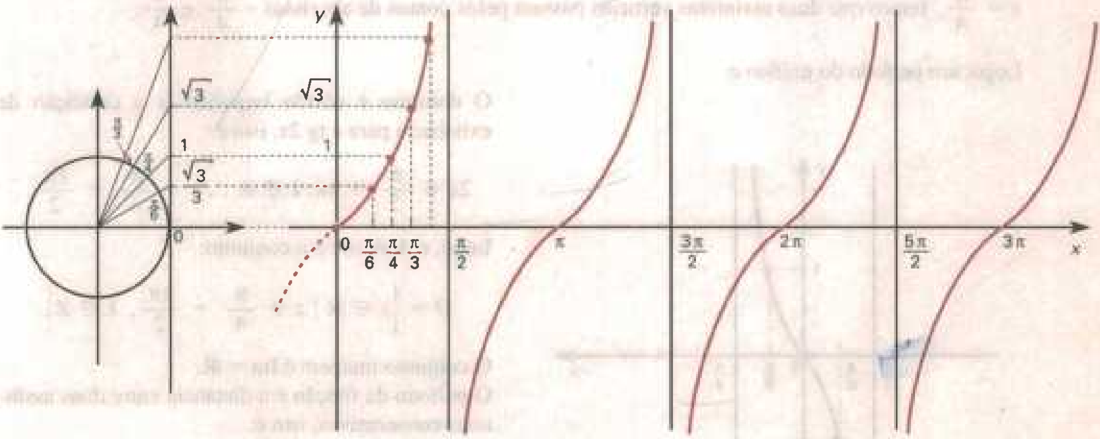
O domínio e a imagem de f são, respectivamente, os conjuntos:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

e

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

1.1. Gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$



$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\};\ \mathrm{Im} = \mathbb{R};\ p = \pi.$$

As retas verticais que passam pelos pontos de abscissas ... $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas verticais do gráfico, ou seja, essas retas não têm ponto comum com o gráfico e a distância entre o gráfico e uma reta vertical $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, tende a zero numa vizinhança de $\frac{(2k+1)\pi}{2}$.

Nota

Vizinhança de um número a é qualquer intervalo aberto que contém o conjunto $\{a\}$. Por exemplo, o intervalo $]4, 6[$ é uma vizinhança do número 5.

Exercícios resolvidos

R.1 Esboce o gráfico da função $y = \text{tg } 2x$.

Resolução

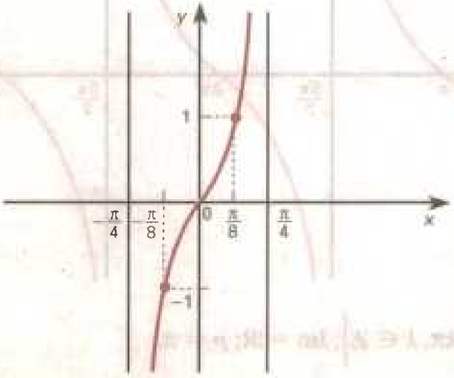
Para esboçar um período do gráfico, atribuímos ao arco $2x$ os valores $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, temos a tabela:

$2x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$

O gráfico passa pelos pontos $\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ e, como não existe a tg $2x$ para $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$, temos que duas assíntotas verticais passam pelos pontos de abscissas $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.

Logo, um período do gráfico é:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para a tg $2x$, isto é:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \therefore x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Logo, o domínio é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

O conjunto imagem é Im = $\mathbb{R}$.

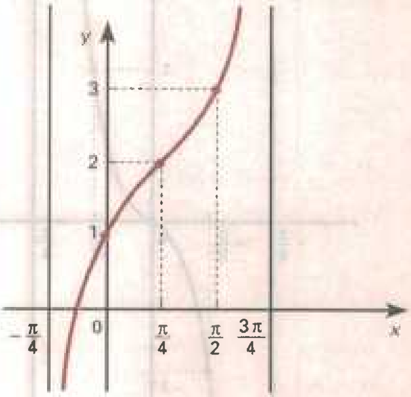
O período da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é:

$$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \therefore p = \frac{\pi}{2}.$$

R.2 Esboce o gráfico da função $y = 2 + \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

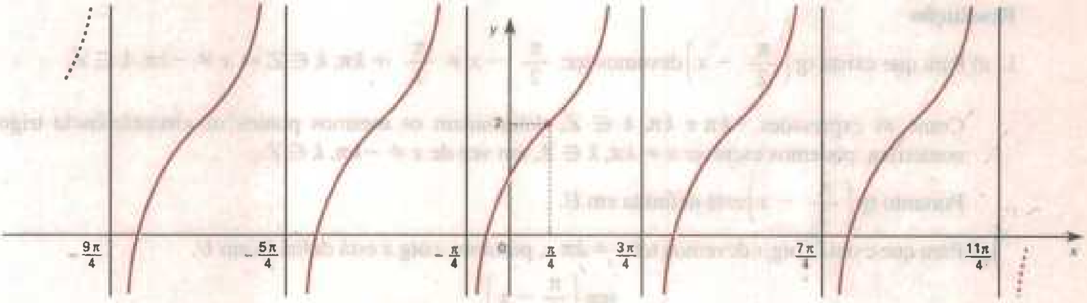
Resolução

$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	0	1
0	$\frac{\pi}{4}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\nexists$



Nota

Não perca de vista que representamos apenas um período do gráfico. Essa figura se repete indefinidamente:



Domínio:

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \therefore x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

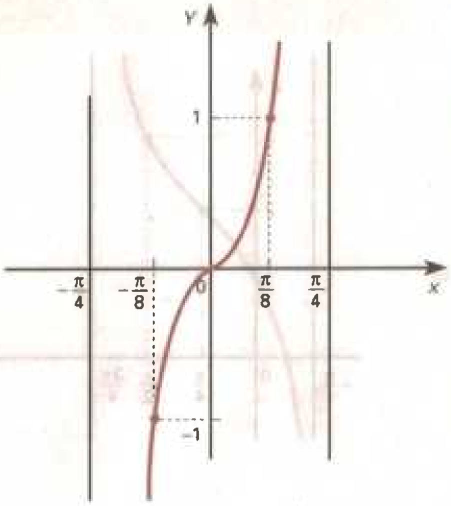
Imagem: $\text{Im} = \mathbb{R}$.

Período: $p = \dfrac{3\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \therefore p = \pi$.

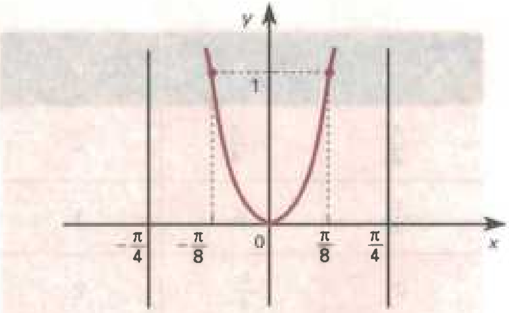
R.3 Esboce o gráfico da função $y = |\text{tg } 2x|$.

Resolução

Fase 1. Gráfico auxiliar $Y = \text{tg } 2x$



Fase 2. Gráfico de $y = |\text{tg } 2x|$



Domínio: $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Imagem: Im = $\mathbb{R}$. Período: $p = \frac{\pi}{2}$.

R.4 Prove que $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotg } x$ é identidade no universo: $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Resolução

I. a) Para que exista $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ devemos ter: $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq -k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Como as expressões $-k\pi$ e $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, determinam os mesmos pontos na circunferência trigonométrica, podemos escrever $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, em vez de $x \neq -k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ está definida em U.

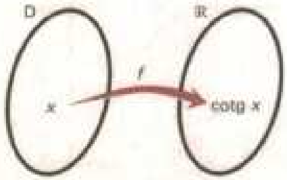
b) Para que exista cotg x devemos ter $x \neq k\pi$ e, portanto, cotg x está definida em U.

II. Primeiro membro $= \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x =$ segundo membro.

(c.q.d.)

2. Função co-tangente

Consideremos $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Chama-se **função co-tangente** a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada x, $x \in D$, à cotg x.



$f(x) = \text{cotg } x$

O domínio e a imagem de f são respectivamente os conjuntos:

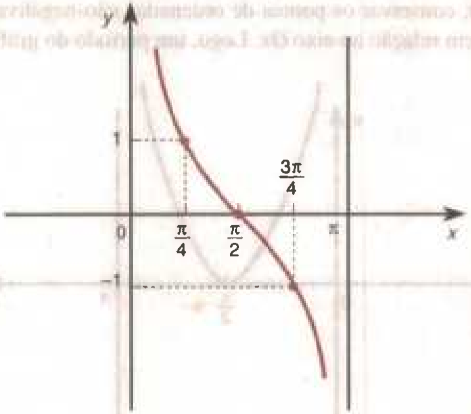
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2.1. Gráfico da função $y = \text{cotg}\, x$

Sabemos que $\text{cotg}\, x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (exercício resolvido anterior). Logo, o gráfico de $y = \text{cotg}\, x$ é o gráfico de $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Observe a tabela ao lado.

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
0	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\nexists$

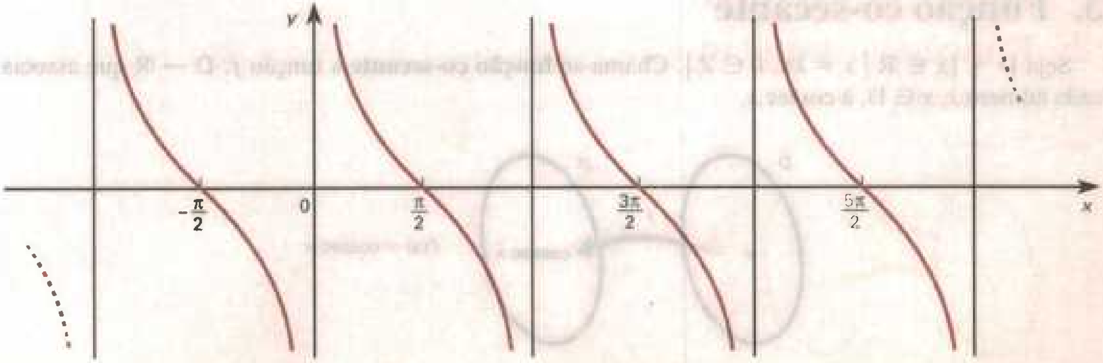
Assim, um período do gráfico é:



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\};\ \text{Im}(f) = \mathbb{R};\ p = \pi.$$

Nota

Construímos apenas um período do gráfico da função co-tangente. Essa figura se repete indefinidamente.

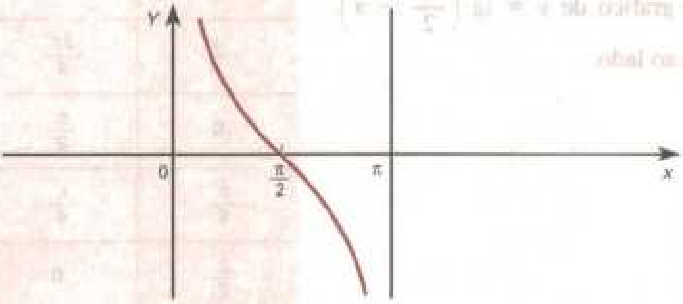


Exercício resolvido

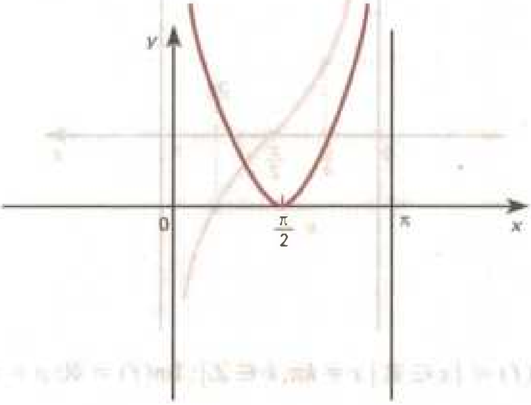
R.5 Construa o gráfico da função $f(x) = |\text{cotg}\, x|$.

Resolução

Fase 1. Gráfico auxiliar $Y = \text{cotg}\, x$



Fase 2. Gráfico da função $f(x) = |Y|$, ou seja, $f(x) = |\text{cotg}\, x|$.
Basta, no gráfico anterior, conservar os pontos de ordenadas não-negativas e transformar os de ordenadas negativas nos simétricos em relação ao eixo Ox. Logo, um período do gráfico da função $f(x) = |\text{cotg}\, x|$ é:



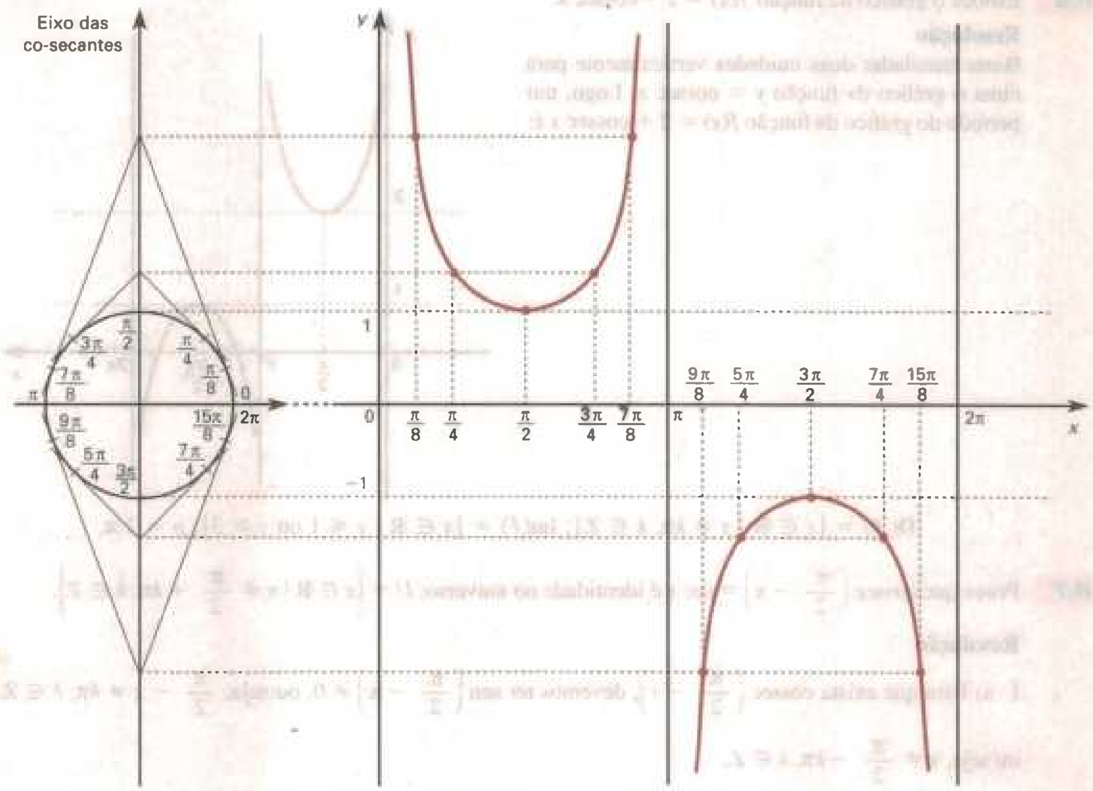
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\};\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+;\ p = \pi.$$

3. Função co-secante

Seja $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Chama-se **função co-secante** a função $f\colon D \to \mathbb{R}$ que associa cada número x, $x \in D$, à cossec x.

D
ℝ
x
f
cossec x
f(x) = cossec x

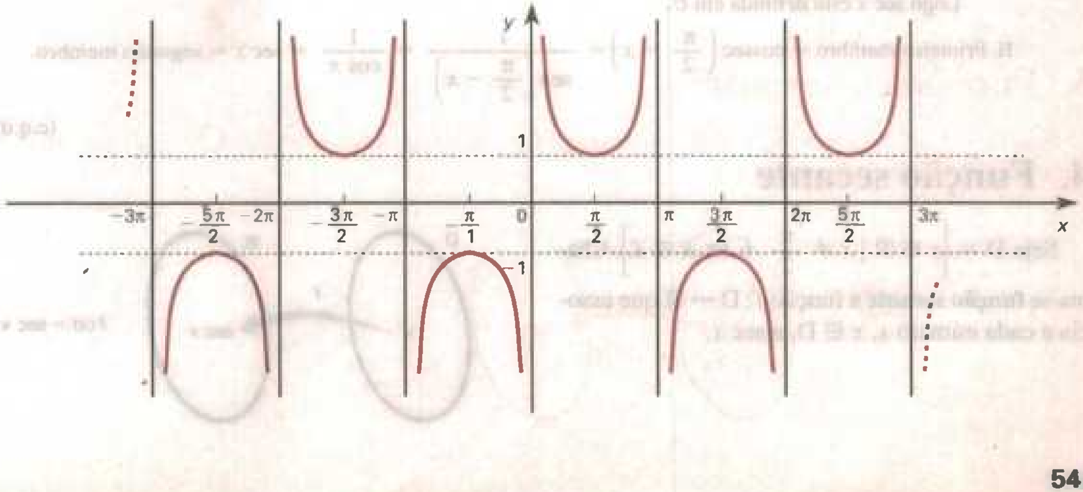
3.1. Gráfico da função $y = \text{cossec}\ x$


Eixo das co-secantes
y
1
−1
0
π/8
π/4
π/2
3π/4
7π/8
π
9π/8
5π/4
3π/2
7π/4
15π/8
2π
x

- O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- O conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$.
- O período de f é $p = 2\pi$.

Nota

Construímos apenas um período do gráfico da função co-secante. Essa figura se repete indefinidamente.

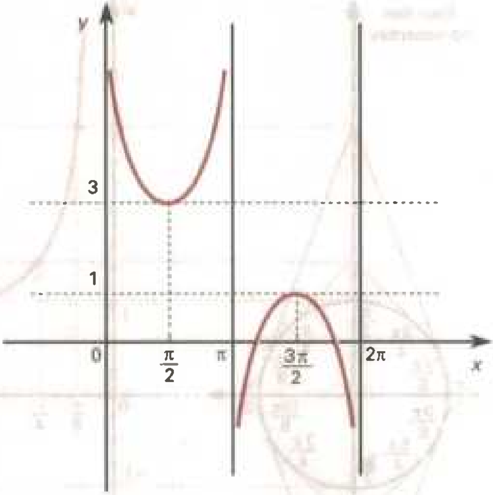


Exercícios resolvidos

R.6 Esboce o gráfico da função $f(x) = 2 + \text{cossec}\, x$.

Resolução

Basta transladar duas unidades verticalmente para cima o gráfico da função $y = \text{cossec}\, x$. Logo, um período do gráfico da função $f(x) = 2 + \text{cossec}\, x$ é:



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1 \text{ ou } y \geqslant 3\}$; $p = 2\pi$.

R.7 Prove que $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ é identidade no universo: $U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Resolução

I. a) Para que exista $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, devemos ter $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \neq 0$, ou seja, $\frac{\pi}{2} - x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como as expressões $\frac{\pi}{2} - k\pi$ e $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, determinam os mesmos pontos na circunferência trigonométrica, podemos escrever $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, em vez de $x \neq \frac{\pi}{2} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ está definida em U.

b) Para que exista $\sec x$ devemos ter $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

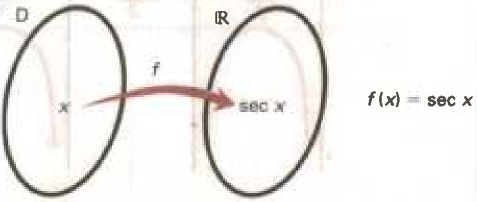
Logo $\sec x$ está definida em U.

II. Primeiro membro $= \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x =$ segundo membro.

(c.q.d.)

4. Função secante

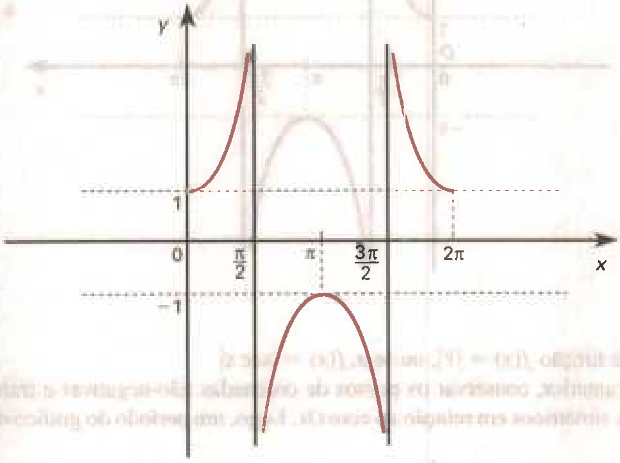
Seja $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Chama-se **função secante** a função $f\colon D \to \mathbb{R}$ que associa a cada número x, $x \in D$, a $\sec x$.



4.1. Gráfico da função $y = \sec x$

O exercício resolvido anterior nos mostrou que $\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ para todo x, $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, o gráfico da função $f(x) = \sec x$ é o mesmo da função $f(x) = \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

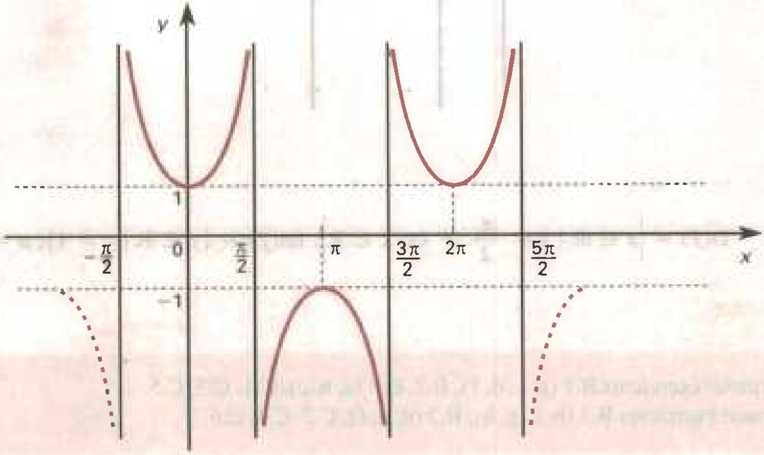
O gráfico da função $f(x) = \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ é obtido por uma translação horizontal para a "esquerda" do gráfico da função $y = \operatorname{cossec} x$. Assim sendo, um período do gráfico da função $f(x) = \sec x$ é:



- O domínio de f é $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- O conjunto imagem de f é $\operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$.
- O período de f é $p = 2\pi$.

Nota

Construímos apenas um período do gráfico da função secante. Essa figura se repete indefinidamente:

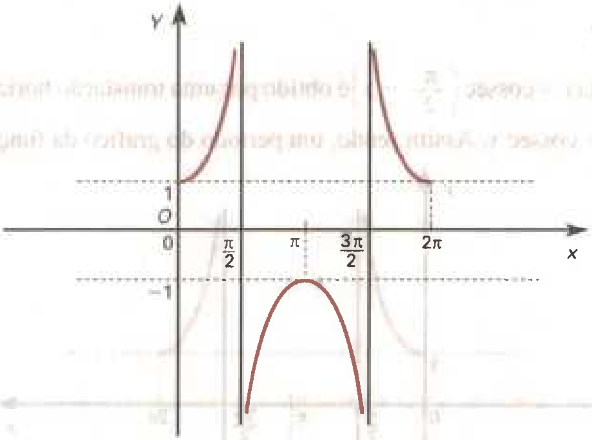


Exercício resolvido

R.8 Construa o gráfico da função $f(x) = |\sec x|$.

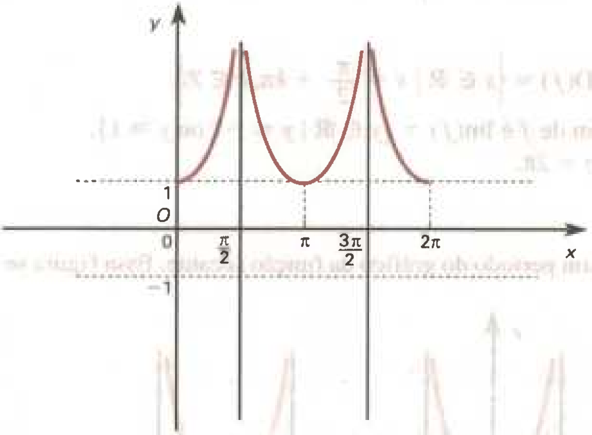
Resolução

Fase 1. Gráfico auxiliar $Y = \sec x$



Fase 2. Gráfico da função $f(x) = |Y|$, ou seja, $f(x) = |\sec x|$

Basta, no gráfico anterior, conservar os pontos de ordenadas não-negativas e transformar os de ordenadas negativas nos seus simétricos em relação ao eixo Ox. Logo, um período do gráfico da função $f(x) = |\sec x|$ é:



$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\};\ \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\};\ p = \pi.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, c, d, f), B.2, B.3 (a, b, c), C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (b, e, g, h), B.3 (d, e, f), C.2, C.4, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = \text{tg } 3x$

b) $y = \text{tg } \frac{x}{2}$

c) $y = 3 + \text{tg } 2x$

d) $y = \left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$

e) $y = -\left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$

f) $y = 2 + |\text{tg } x|$

g) $y = -\text{tg } 2x$

h) $y = -\text{tg } \frac{x}{3}$

B.2 Qual é o número de raízes da equação $\text{tg } x = \frac{4x}{\pi}$ para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$?

B.3 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = -\text{cotg } x$

b) $y = |\text{cossec } x|$

c) $y = 3 + \sec x$

d) $y = -\sec x$

e) $y = -2 + \text{cossec } x$

f) $y = 1 + |\text{cotg } x|$

Exercícios complementares

C.1 Esboce o gráfico da função: $f(x) = \frac{\text{tg } x}{1 + \text{tg } x} + \frac{\text{tg } x}{1 - \text{tg } x}$.

C.2 Represente graficamente a função: $f(x) = \frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 - \text{tg} x}$.

C.3 Quantos pontos têm em comum os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{tg } x$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?

C.4 Quantos pontos têm em comum os gráficos das funções $f(x) = \text{tg } x$ e $g(x) = \cos x$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?

C.5 Qual é o número de raízes da equação $\sec x = \frac{2x}{3\pi}$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$?

C.6 Qual é o número de raízes da equação $\text{cotg } x = -\frac{4x}{\pi} + 2$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$?

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) O domínio da função dada por $f(x) = \text{tg } 2x$ é o conjunto:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

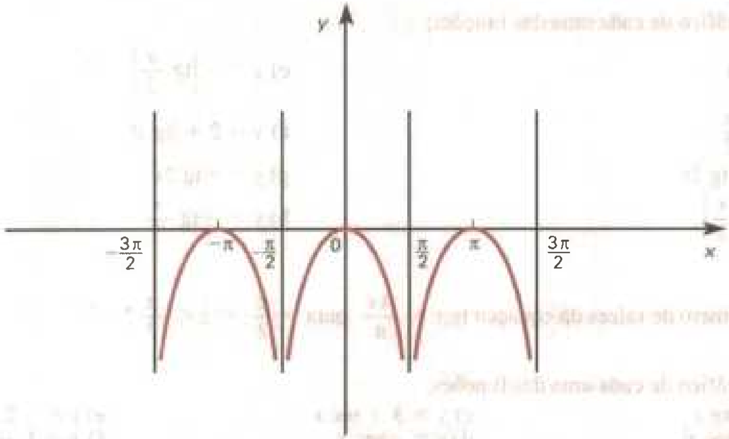
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

V.2 (Cescem-SP) A função que melhor se adapta ao gráfico é:



a) $f(x) = |\cos x|$
b) $f(x) = -|\operatorname{tg} x|$
c) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$
d) $f(x) = -x^2$
e) $f(x) = -|\cos x|$

V.3 (Cescea-SP) Assinale a afirmação falsa:

a) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ para todo x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) A função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é crescente em todo seu domínio.

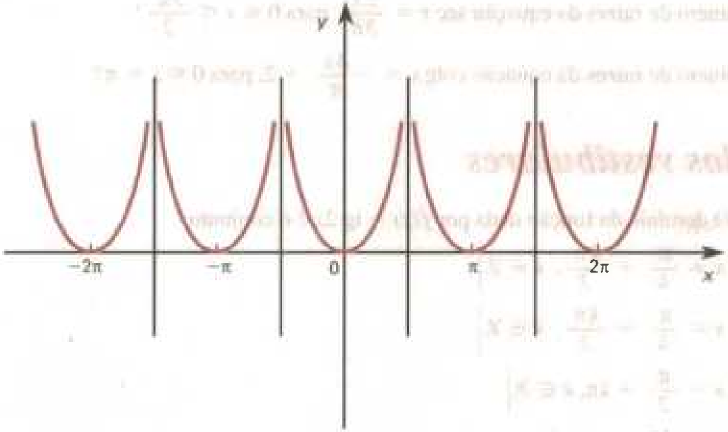
c) A função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é crescente no intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

d) A função $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ é decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

e) O conjunto imagem da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é $\mathbb{R}$.

V.4 (Cescem-SP) Qual das funções abaixo melhor se adapta ao gráfico?

a) $y = x^2$
b) $y = |\operatorname{sen} x|$
c) $y = |\sec x| - 1$
d) $y = |\cos x|$
e) $y = |\operatorname{tg} x| + 1$



Capítulo 85

Funções periódicas

1. Períodos de funções trigonométricas

Teorema

Funções do tipo $y = a + b \operatorname{sen}(mx + q)$ ou $y = a + b\cos(mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$ e $bm \neq 0$, têm período igual a $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$.

Demonstração

O período da função $y = a + b \operatorname{sen}(mx + q)$ é o menor número positivo p tal que:

$$a + b \operatorname{sen}[m(x + p) + q] = a + b \operatorname{sen}(mx + q),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}[m(x + p) + q] = \operatorname{sen}(mx + q)\\
&\therefore \operatorname{sen}[m(x + p) + q] - \operatorname{sen}(mx + q) = 0\\
&\therefore 2 \operatorname{sen}\frac{m(x + p) + q - mx - q}{2} \cos\frac{m(x + p) + q + mx + q}{2} = 0\\
&\therefore 2 \operatorname{sen}\frac{mp}{2} \cos\left(mx + \frac{mp}{2} + q\right) = 0.
\end{aligned}$$

Essa igualdade se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se: $\operatorname{sen}\dfrac{mp}{2} = 0$, isto é:

$$\frac{mp}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \therefore p = \frac{2k\pi}{m},\ k \in \mathbb{Z}.$$

O menor valor positivo p que satisfaz essa igualdade é:

$$p = \frac{2\pi}{m},\ \text{se } m > 0 \quad \text{ou} \quad p = -\frac{2\pi}{m},\ \text{se } m < 0.$$

Logo, $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$. (c.q.d.)

Observação

A demonstração para o período da função $y = a + b\cos(mx + q)$ é análoga à anterior.

Teorema

Funções do tipo $y = a + b \operatorname{tg}(mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$ e $bm \neq 0$, têm período igual a $p = \dfrac{\pi}{|m|}$.

Demonstração

O período da função $y = a + b \operatorname{tg}(mx + q)$ é o menor número positivo p tal que:

$$a + b \operatorname{tg}[m(x + p) + q] = a + b \operatorname{tg}(mx + q)$$

para todo x pertencente ao domínio da função.

Temos, então:

$$\operatorname{tg}[m(x + p) + q] = \operatorname{tg}(mx + q)$$

$$\therefore \operatorname{tg}[m(x + p) + q] - \operatorname{tg}(mx + q) = 0$$

$$\therefore \frac{\operatorname{sen}[m(x + p) + q - mx - q]}{\cos[m(x + p) + q] \cos(mx + q)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(mp)}{\cos[m(x + p) + q] \cos(mx + q)} = 0.$$

Essa igualdade se verifica, para todo x pertencente ao domínio da função $y = a + b \operatorname{tg}(mx + q)$, se, e somente se: $\operatorname{sen}(mp) = 0$. Isto é: $mp = k\pi, k \in \mathbb{Z} \therefore p = \dfrac{k\pi}{m}, k \in \mathbb{Z}$.

O menor valor positivo p que satisfaz tal igualdade é:

$$p = \frac{\pi}{m} \text{ se } m > 0 \quad \text{ou} \quad p = -\frac{\pi}{m} \text{ se } m < 0.$$

Logo, $p = \dfrac{\pi}{|m|}$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Determine o período da função $y = 4 \operatorname{sen} 2x$.

Resolução

$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

R.2 Determine o período da função $y = 3 + 5 \cos(-4x)$.

Resolução

$$p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

R.3 Determine o período da função $y = 5 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$.

Resolução

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

R.4 Determine o período da função $y = 5 + \text{tg}\ 2x$.

Resolução

$$p = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}.$$

R.5 Determine o período da função $y = \cos^2 x - \text{sen}^2\ x$.

Resolução

Lembrando que $\cos^2 x - \text{sen}^2\ x = \cos 2x$, temos: $y = \cos 2x$.

Portanto o período da função é: $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

R.6 Determine o período da função $y = 6\ \text{sen}\ x \cos x$.

Resolução

Lembrando que $2\ \text{sen}\ x \cos x = \text{sen}\ 2x$, temos: $y = 3 \cdot 2\ \text{sen}\ x \cos x \Rightarrow y = 3\ \text{sen}\ 2x$.

Portanto o período da função é: $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

R.7 Determine o período da função $y = \frac{\text{tg}\ 2x + \text{tg}\ x}{1 - \text{tg}\ 2x\ \text{tg}\ x}$.

Resolução

Lembrando que $\frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a\ \text{tg}\ b} = \text{tg}\ (a + b)$, temos: $y = \text{tg}\ (2x + x) \Rightarrow y = \text{tg}\ 3x$.

Portanto o período da função é: $p = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios: B.4, B.5, B.6, C.3, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Determine o período de cada uma das funções:

a) $y = 3 + 5\ \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = 4 \cos 5x$

c) $y = 3 + \text{sen}\left(-\frac{x}{4}\right)$

d) $y = 4 + \text{tg}\ 3x$

e) $y = 2\ \text{sen}\ (-4x)$

f) $y = 3 + 2 \cos (-2x)$

g) $y = 3 - 2\ \text{tg}\ (-5x)$

h) $y = \frac{1}{2} + 3\ \text{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)$

B.2 Qual é o período da função $f(x) = 2\ \text{sen}\ x \cos x$?

B.3 Calcule o período da função $f(x) = \text{sen}\ x \cos x$.

B.4 Obtenha o período da função $f(x) = \text{sen}^3\ x \cos x + \text{sen}\ x \cos^3 x$. (**Sugestão:** fatorar.)

B.5 Determine o período da função $f(x) = \cos^4 x - \text{sen}^4\ x$. (**Sugestão:** fatorar.)

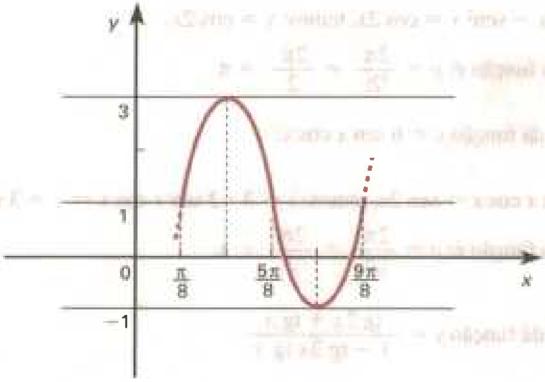
B.6 Qual é o período da função $f(x) = \text{sen}\ x \cos x \cos 2x$?

Exercícios complementares

C.1 A função $f(x) = 3 \text{ sen } mx$ tem período $\frac{3\pi}{5}$. Determine o valor de m.

C.2 A função $f(x) = k \cos mx$ tem período 6π e admite máximo igual a 5. Determine k e m.

C.3 A função $f(x) = 1 + 2 \text{ sen}\left(mx - \frac{\pi}{4}\right)$ tem como gráfico:



Determine o valor de m.

C.4 O domínio da função $f(x) = \text{tg}\left(mx + \frac{\pi}{3}\right)$ é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Determine o valor de m e o período da função.

C.5 Determine o período da função $f(x) = \dfrac{2 \text{ tg } \frac{x}{4}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{4}}$.

C.6 Determine o período da função $f(x) = \dfrac{\text{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1}{1 - \text{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$. $\left(\textbf{Sugestão: } 1 = \text{tg } \frac{\pi}{4}.\right)$

Questões dos vestibulares

V.1 (U. Católica de Salvador-BA) O período da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos \frac{x}{6}$, é:

a) π b) 2π c) 6π d) 8π e) 12π

V.2 (PUC-RS) O período da função definida por $y = \text{sen}\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) π c) $\frac{3\pi}{2}$ d) 2π e) 3π

V.3 (FGV-SP) O período da função $f(x) = \text{sen}^2 x$ é:

a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 2π e) $\frac{2\pi}{3}$

Capítulo 86

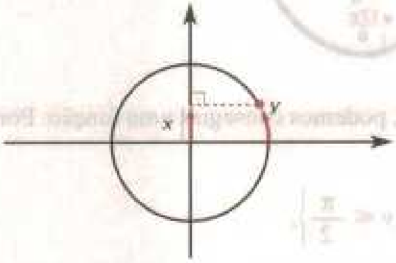
A inversa da função seno

1. Relação arco-seno

Consideremos a relação f de $A = [-1, 1]$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, do eixo dos senos, a um número real y da circunferência trigonométrica tal que:

y é a medida de um arco cujo seno vale x,

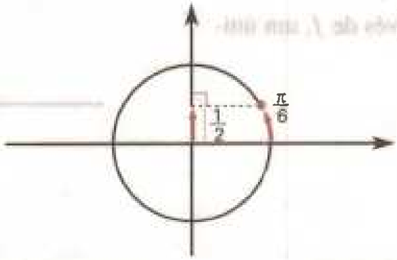
ou seja:



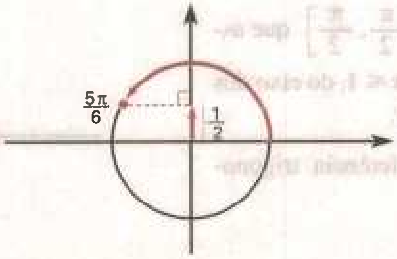
x é um valor no eixo dos senos e y é um valor na circunferência trigonométrica tal que $\operatorname{sen} y = x$.

Exemplos

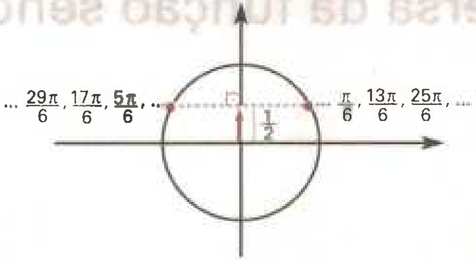
a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right) \in f$, pois $\frac{\pi}{6}$ é a medida de um arco cujo seno vale $\frac{1}{2}$:



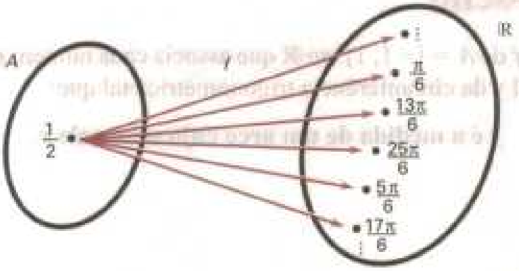
b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \in f$, pois $\frac{5\pi}{6}$ é a medida de um arco cujo seno vale $\frac{1}{2}$:



Note que a relação *f* **não** é uma função, pois a cada valor *x* do eixo dos senos podemos associar, através de *f*, infinitos valores *y* da circunferência trigonométrica:



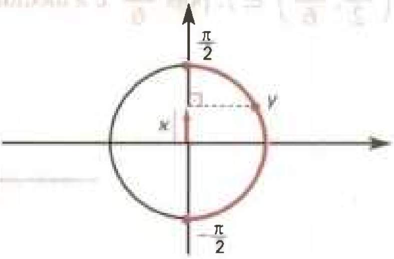
isto é:



Porém, se fizermos uma restrição ao contradomínio de *f*, podemos conseguir uma função. Por exemplo, se restringirmos o contradomínio a:

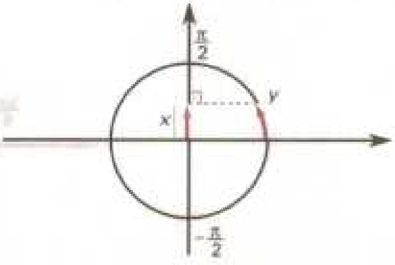
$$CD = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\},$$

teremos que *f*, sob essa restrição, é uma função de domínio $A = [-1, 1]$ e contradomínio $CD = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, pois a cada x, $x \in A$, podemos associar, através de *f*, um único y, $y \in CD$. Observe:



2. Função arco-seno

É a função $f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ que associa cada número real x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, do eixo dos senos, a um **único** número real y, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, da circunferência trigonométrica, tal que $\text{sen } y = x$.



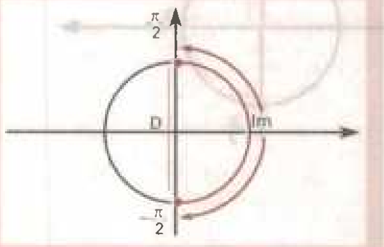
Denotaremos essa função por: $y = \text{arcsen } x$.

Devemos entender essa igualdade da seguinte maneira:

***y* é a medida do arco cujo seno vale *x*.**

O domínio e a imagem da função $y = \text{arcsen } x$ são respectivamente:

- $D = [-1, +1]$;
- $Im = \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$.


$\frac{\pi}{2}$
D
Im
$-\frac{\pi}{2}$

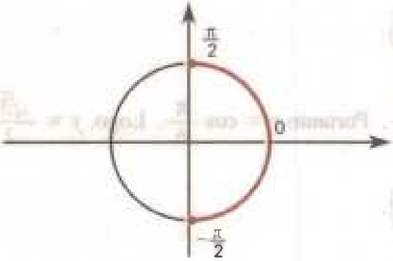
Exercícios resolvidos

R.1 Calcule:

a) $\text{arcsen } \dfrac{1}{2}$ b) $\text{arcsen } 0$ c) $\text{arcsen } 1$ d) $\text{arcsen } \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

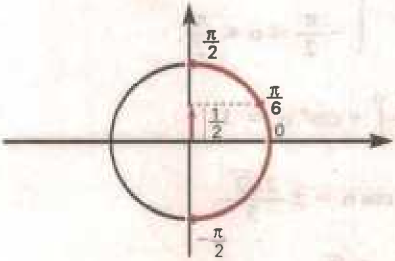
Resolução

Qualquer arco-seno deve pertencer ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

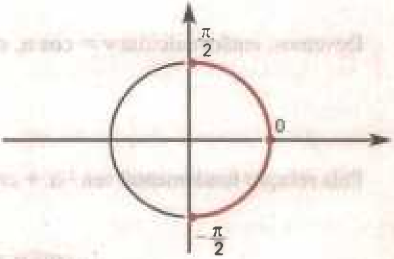

$\frac{\pi}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$

Assim, temos:

a) $\text{arcsen } \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$:

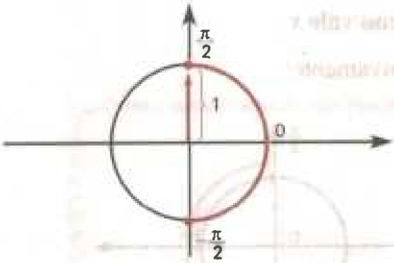

$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$

b) $\text{arcsen } 0 = 0$:

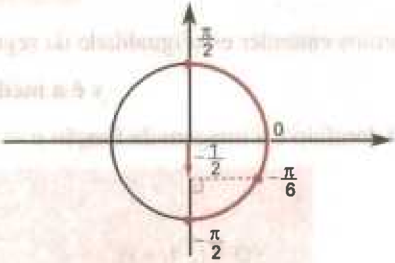

$\frac{\pi}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$

(**Cuidado!** O arcsen 0 não pode ser igual a 2π, pois 2π não pertence ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.)

c) arcsen $1 = \frac{\pi}{2}$:



d) arcsen $\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$



(**Cuidado!** O valor de arcsen $\left(-\frac{1}{2}\right)$ não pode ser igual a $\frac{11\pi}{6}$, pois $\frac{11\pi}{6}$ não pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.)

R.2 Determine o domínio da função $y = \text{arcsen } 2x$.

Resolução

$$y = \text{arcsen } 2x \Rightarrow 2x = \text{sen } y.$$

Como $-1 \leqslant \text{sen } y \leqslant 1$, temos: $-1 \leqslant 2x \leqslant 1 \quad \therefore \quad -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

R.3 Calcule $y = \cos\left(\text{arcsen } \frac{1}{2}\right)$.

Resolução

Temos que arcsen $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Portanto $y = \cos \frac{\pi}{6}$. Logo, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

R.4 Calcule $y = \cos\left(\text{arcsen } \frac{1}{3}\right)$.

Resolução

Seja $\alpha = \text{arcsen } \frac{1}{3}$.

Devemos, então, calcular $y = \cos \alpha$, onde: $\alpha = \text{arcsen } \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{1}{3} \\ \text{e} \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \therefore \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Logo, $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

R.5 Calcule $y = \text{sen}\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{3}{5}\right)$.

Resolução

Seja $\alpha = \text{arcsen}\ \frac{3}{5}$.

Devemos calcular $y = \text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha$, onde: $\alpha = \text{arcsen}\ \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5} \\ \text{e} \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \therefore \cos \alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

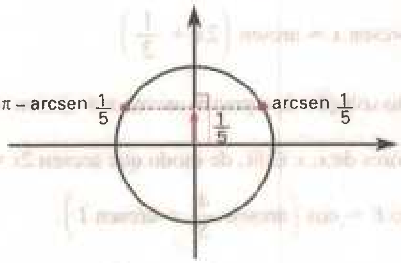
Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Então $y = \text{sen}\ 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

Logo, $y = \frac{24}{25}$.

R.6 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\text{sen}\ x = \frac{1}{5}$.

Resolução



$$\therefore\ x = \text{arcsen}\ \frac{1}{5} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = \pi - \text{arcsen}\ \frac{1}{5} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen}\ \frac{1}{5} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen}\ \frac{1}{5} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.5, B.8, C.1, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.6, B.7, B.9, C.2, C.3, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) arcsen $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) arcsen $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) arcsen (-1) d) arcsen $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e) arcsen $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B.2 Determine o domínio da função $y = \text{arcsen } 3x$.

B.3 Qual é o domínio da função $y = \text{arcsen } \frac{x}{2}$?

B.4 Calcule o valor de $y = \cos\left[\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

B.5 Determine o valor de y, de modo que $y = \cos\left[\text{arcsen}\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

B.6 Obtenha o valor da expressão $y = \text{sen}\left(2 \text{ arcsen } \frac{1}{4}\right)$.

B.7 Calcule o valor de $y = \cos\left(2 \text{ arcsen } \frac{1}{5}\right)$.

B.8 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen } x = \frac{2}{3}$.

B.9 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação: $3 \text{ sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 1 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\text{arcsen } x = \text{arcsen}\left(2x + \frac{1}{2}\right)$.

C.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\text{arcsen } x + \text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

C.3 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que $\text{arcsen } 2x = 2 \text{ arcsen } 3x$.

C.4 Calcule o valor da expressão $E = \cos\left(\text{arcsen } \frac{4}{5} + \text{arcsen } 1\right)$.

C.5 Determine o valor de E, de modo que $E = \text{sen}\left(\text{arcsen } \frac{3}{5} + \text{arcsen } \frac{5}{13}\right)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) O valor da expressão: $E = \text{arcsen } \frac{1}{2} + \text{arcsen}(-1) + \text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ é:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) 0 e) π

V.2 (PUC-SP) Se $y = \text{tg}\left[\text{arcsen}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$, então:

a) $y = \frac{5}{13}$ b) $y = \frac{3}{4}$ c) $y = -\frac{3}{4}$ d) $y = -\frac{5}{2}$ e) $y = -1$

V.3 (Fatec-SP) Determine o domínio da função $y = \text{arcsen}\left(\frac{3x - 1}{2}\right)$.

Capítulo 87

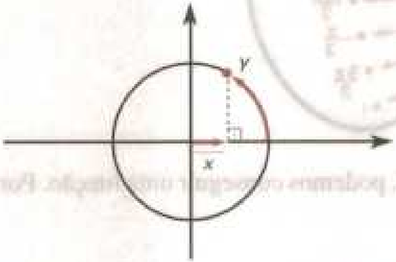
A inversa da função co-seno

1. Relação arco-co-seno

Consideremos a relação f de $A = [-1, 1]$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, do eixo dos co-senos, a um número real y da circunferência trigonométrica tal que:

y é a medida de um arco cujo co-seno vale x,

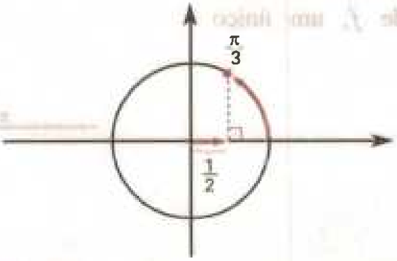
ou seja:



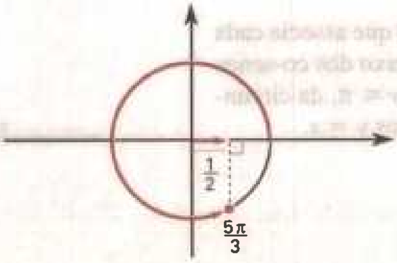
x é um valor no eixo dos co-senos e y é um valor na circunferência trigonométrica tal que $\cos y = x$.

Exemplos

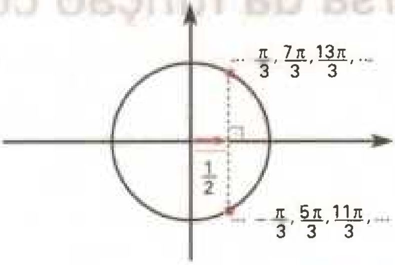
a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \in f$, pois $\frac{\pi}{3}$ é a medida de um arco cujo co-seno vale $\frac{1}{2}$:



b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \in f$, pois $\frac{5\pi}{3}$ é a medida de um arco cujo co-seno vale $\frac{1}{2}$:

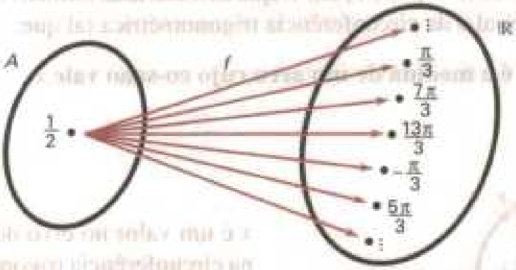


Note que a relação f **não** é uma função, pois a cada valor x do eixo dos co-senos podemos associar, através de f, infinitos valores y da circunferência trigonométrica:



... $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, ...$
$\frac{1}{2}$
... $-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, ...$

isto é:

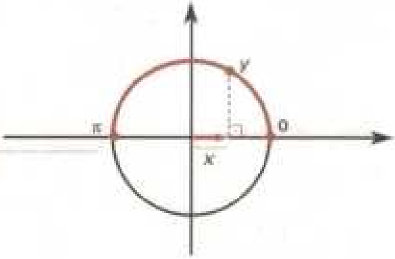


A
f
$\frac{1}{2}$
IR
⋮
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{3}$
$\frac{13\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
⋮

Porém, se fizermos uma restrição ao contradomínio de f, podemos conseguir uma função. Por exemplo, se restringirmos o contradomínio a:

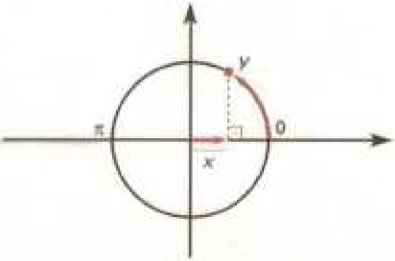
$$CD = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \pi\},$$

teremos que f, sob essa restrição, é uma função de domínio $A = [-1, 1]$ e contradomínio $CD = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \pi\}$, pois a cada x, $x \in A$, podemos associar, através de f, um único y, $y \in CD$. Observe:



2. Função arco-co-seno

É a função $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ que associa cada número real x, $-1 \leq x \leq 1$, do eixo dos co-senos a um **único** número real y, $0 \leq y \leq \pi$, da circunferência trigonométrica tal que $\cos y = x$.



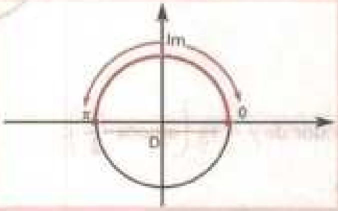
Denotaremos essa função por: $y = \text{arccos}\, x.$

Essa igualdade deve ser entendida como:

y é a medida do arco cujo co-seno vale x.

O domínio e a imagem da função $y = \text{arccos}\, x$ são, respectivamente:

- $D = [-1, +1]$;
- $Im = [0, \pi]$.

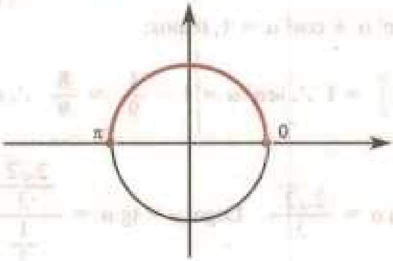


Exercícios resolvidos

R.1 Calcule:

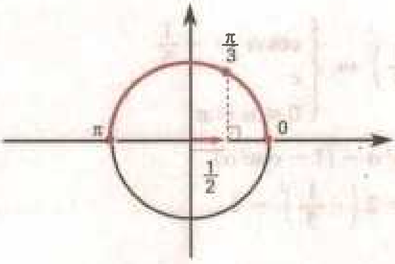
a) $\text{arccos}\, \frac{1}{2}$ b) $\text{arccos}\, 1$ c) $\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Resolução
Todo arco-co-seno deve pertencer ao intervalo $[0, \pi]$:

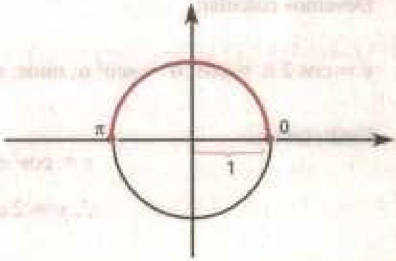


Assim, temos:

a) $\text{arccos}\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$:

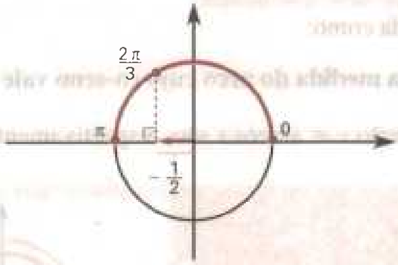


b) $\text{arccos}\, 1 = 0$:



(**Cuidado!** O valor de arccos 1 não pode ser 2π, pois 2π não pertence ao intervalo $[0, \pi]$.)

c) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$:



R.2 Calcule o valor de $y = \text{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Resolução

Temos que $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Portanto $y = \text{tg}\,\frac{\pi}{3}$, ou seja, $y = \sqrt{3}$.

R.3 Calcule o valor de $y = \text{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.

Resolução

Seja $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Devemos calcular $y = \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, onde: $\alpha = \arccos\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{3} \\ \text{e} \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \end{cases}$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \therefore \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \therefore \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Como $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, temos $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Logo, $y = \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$.

R.4 Calcule o valor de $y = \cos\left[2\ \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$.

Resolução

Seja $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

Devemos calcular:

$y = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$, onde: $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{5} \\ \text{e} \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \end{cases}$

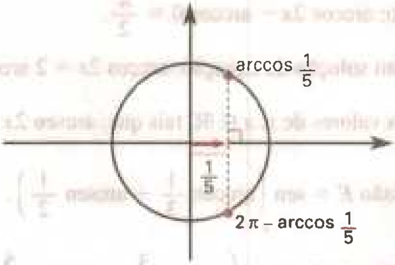
Então temos:

$$y = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$
$$\therefore y = 2\cos^2\alpha - 1 \therefore y = 2\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 1.$$

Logo, $y = -\frac{23}{25}$.

R.5 Resolva a equação $\cos x = \frac{1}{5}$ em $\mathbb{R}$.

Resolução



$$\therefore x = \arccos \frac{1}{5} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = 2\pi - \arccos \frac{1}{5} + k \ \ 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos \frac{1}{5} + k \ \ 2\pi \text{ ou } x = 2\pi - \arccos \frac{1}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.7, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.6, B.8, C.1, C.3, C.4, C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\arccos 0$

d) $\arccos (-1)$

e) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

B.2 Determine o domínio da função $y = \arccos 5x$.

B.3 Calcule o valor de $y = \operatorname{tg} (\arccos 1)$.

B.4 Obtenha y, de modo que $y = \sec \left(\arccos \frac{1}{3}\right)$.

B.5 Qual é o valor da expressão $y = \operatorname{cotg} \left(\arccos \frac{3}{5}\right)$?

B.6 Calcule o valor da expressão $y = \operatorname{sen} \left[2 \arccos \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

B.7 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\cos x = \frac{2}{7}$.

B.8 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\arccos x = \operatorname{arcsen} 2x$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva, em ℝ, a equação: arccos $2x$ − arccos $0 = \dfrac{\pi}{2}$.

C.2 Obtenha, em ℝ, o conjunto solução da equação: arccos $2x = 2$ arccos x.

C.3 Determine o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, tais que: arcsen $2x = 2$ arccos x.

C.4 Calcule o valor da expressão $E = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arccos}\dfrac{1}{3} + \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2}\right)$.

C.5 Determine o valor da expressão $E = \cos\left(\operatorname{arccos}\dfrac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\dfrac{5}{13}\right)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFCE) Se $x = \operatorname{arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, o valor de $\cos 10x$ é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) -1

V.2 (E. F. E. Itajubá-MG) O valor da expressão: $y = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) 0 d) 1 e) -1

V.3 (Mapofei-SP) Determine o domínio da função $f(x) = \operatorname{arccos}\dfrac{1}{x}$.

Capítulo 88

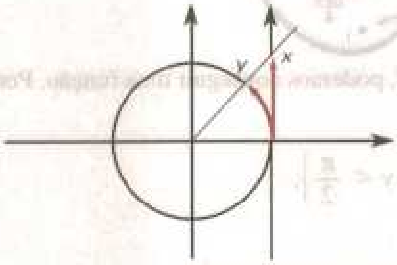
A inversa da função tangente

1. Relação arco-tangente

Consideremos a relação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real x, do eixo das tangentes, a um número real y, da circunferência trigonométrica, tal que:

y é a medida de um arco cuja tangente vale x,

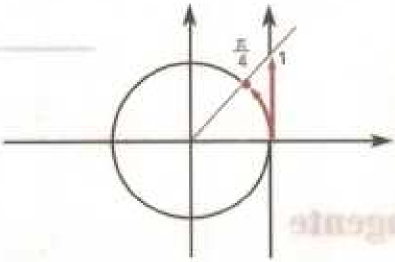
ou seja:



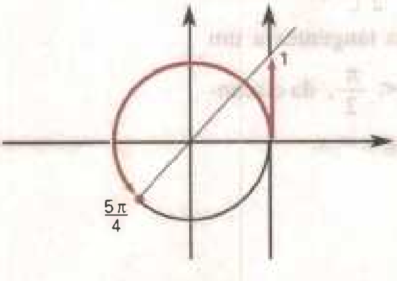
x é um valor no eixo das tangentes e y é um valor na circunferência trigonométrica tal que tg $y = x$.

Exemplos

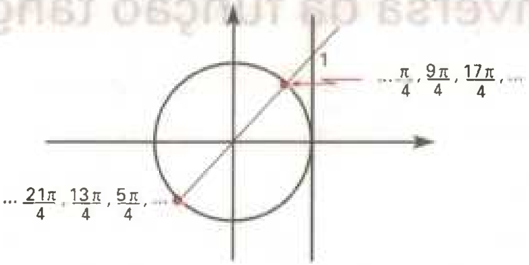
a) $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) \in f$, pois $\dfrac{\pi}{4}$ é a medida de um arco cuja tangente vale 1:



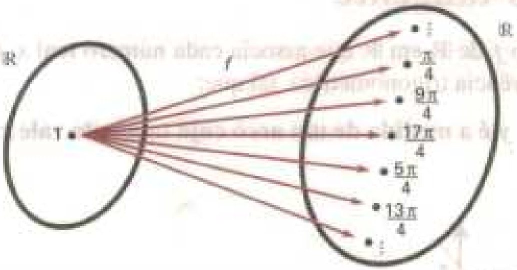
b) $\left(1, \dfrac{5\pi}{4}\right) \in f$, pois $\dfrac{5\pi}{4}$ é a medida de um arco cuja tangente vale 1:



Note que a relação f **não** é uma função, pois a cada valor x, do eixo das tangentes, podemos associar, através de f, infinitos valores y da circunferência trigonométrica:


1
$\ldots \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots$
$\ldots \frac{21\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$

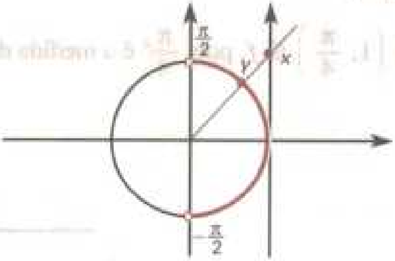
isto é:


IR
f
1
IR
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
$\frac{17\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{13\pi}{4}$

Porém, se fizermos uma restrição ao contradomínio de f, podemos conseguir uma função. Por exemplo, se restringirmos o contradomínio a:

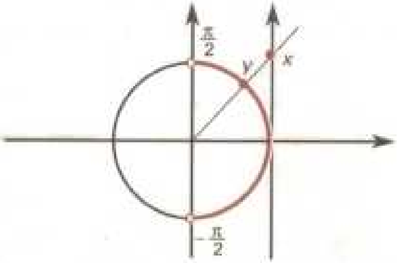
$$CD = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\},$$

teremos que f, sob essa restrição, é uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $CD = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$, pois a cada x, $x \in \mathbb{R}$, podemos associar, através de f, um único y, $y \in CD$. Observe:


$\frac{\pi}{2}$
y
x
$-\frac{\pi}{2}$

2. Função arco-tangente

É a função $f\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ que associa cada número real x do eixo das tangentes a um único número real y, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, da circunferência trigonométrica tal que tg $y = x$.


$\frac{\pi}{2}$
y
x
$-\frac{\pi}{2}$

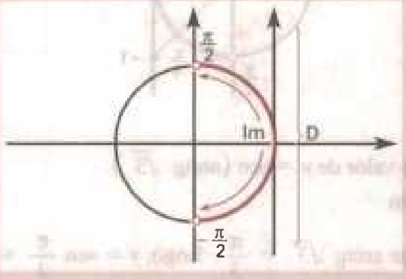
Denotaremos essa função por: $y = \text{arctg}\ x$.

Essa igualdade deve ser entendida como:

y é a medida do arco cuja tangente vale x.

O domínio e a imagem da função $y = \text{arctg}\ x$ são, respectivamente:

- $D = \mathbb{R}$;
- $\text{Im} = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.


$\frac{\pi}{2}$
Im
D
$-\frac{\pi}{2}$

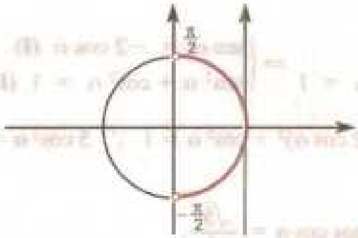
Exercícios resolvidos

R.1 Calcule:

a) arctg 1 b) arctg 0 c) arctg (−1)

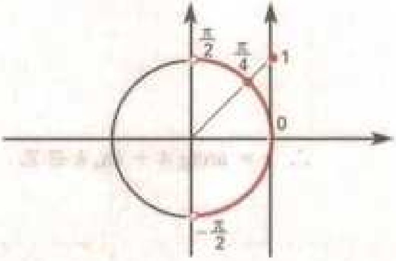
Resolução

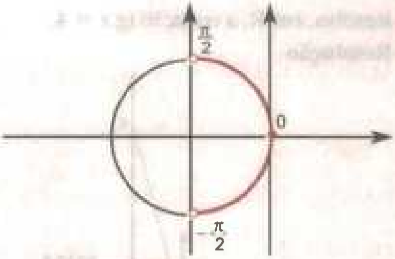
Qualquer arco-tangente deve pertencer ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:


$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$

Assim, temos:

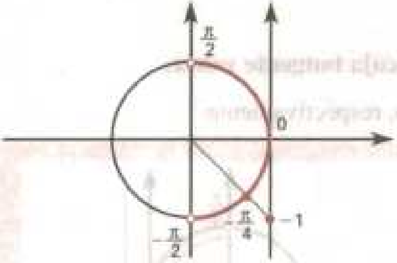
a) $\text{arctg}\ 1 = \dfrac{\pi}{4}$; b) $\text{arctg}\ 0 = 0$;


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
1
0
$-\frac{\pi}{2}$


$\frac{\pi}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$

(**Cuidado!** O valor de arctg 0 não pode ser igual a 2π, pois 2π não pertence ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.)

c) $\operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$:



(**Cuidado!** O valor de $\operatorname{arctg}(-1)$ não pode ser igual a $\dfrac{7\pi}{4}$, pois $\dfrac{7\pi}{4}$ não pertence ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.)

R.2 Calcule o valor de $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

Resolução

Temos que $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. Logo, $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

R.3 Calcule o valor de $y = \operatorname{sen}[2\operatorname{arctg}(-2)]$.

Resolução

Seja $\alpha = \operatorname{arctg}(-2)$

Devemos calcular $y = \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, onde: $\alpha = \operatorname{arctg}(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = -2 \\ \text{e} \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Então, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = -2 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = -2\cos\alpha \quad \textbf{(I)} \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

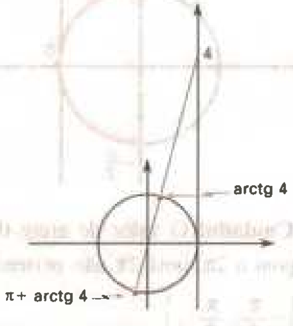
$$\text{(I) em (II)} \Rightarrow (-2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \;\therefore\; 5\cos^2\alpha = 1 \;\therefore\; \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Como $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, temos $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Fazendo $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ em (I), temos $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Logo, $y = \operatorname{sen} 2\alpha = 2\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\dfrac{\sqrt{5}}{5} = -\dfrac{4}{5}$.

R.4 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\operatorname{tg} x = 4$.

Resolução



$\therefore\; x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 até B.7.
Tarefa de casa: exercícios C.1 até C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule:

a) $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ b) $\text{arctg}\,(-\sqrt{3})$ c) $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

B.2 Qual é o valor da expressão $y = \cos\,(\text{arctg}\ 1)$?

B.3 Calcule o valor de $y = \text{sen}\left(\text{arctg}\ \frac{3}{4}\right)$.

B.4 Determine y de modo que $y = \text{tg}\,(2\ \text{arctg}\ 6)$.

B.5 Calcule o valor de $y = \cos\,(2\ \text{arctg}\ 3)$.

B.6 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\text{tg}\ x = 3$.

B.7 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\text{arcsen}\ x = \text{arctg}\ 2x$.

Exercícios complementares

C.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\text{arctg}\ 2x = \text{arctg}\,(x - 3)$.

C.2 Obtenha, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\text{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = 2\ \text{arctg}\ x$.

C.3 Determine o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade $\text{arctg}\,(2x + 2) = 2\ \text{arctg}\,(x + 1)$.

C.4 Calcule o valor da expressão $E = \text{tg}\left(\text{arcsen}\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{arctg}\ 3\right)$.

C.5 Determine o valor de E, de modo que: $E = \text{sen}\left[\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \text{arccos}\ \frac{3}{5}\right]$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFRS) Se $x = \text{arctg}\,(-1)$, lembrando que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de x, convertido em graus, é:

a) 0° b) 30° c) 45° d) 60° e) −45°

V.2 (PUC-PR) Se $\text{arctg}\,(x + 2) + \text{arctg}\ x = \frac{3\pi}{4}$, então x^2 vale:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

V.3 (FGV-SP) O valor da expressão $y = \text{arctg}\ \frac{1}{2} + \text{arctg}\ \frac{1}{3}$ é:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{6}$

Capítulo 89

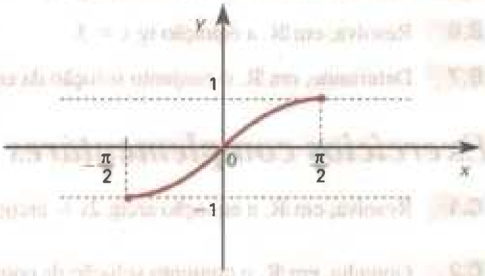
Gráficos das funções trigonométricas inversas

1. Função arco-seno

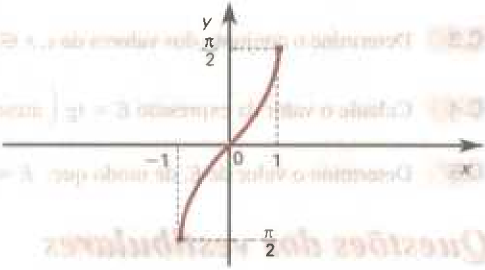
Consideremos a seguinte restrição da função seno:

$$y = \text{sen } x \text{ com domínio } D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

cujo contradomínio coincide com o conjunto imagem Im = $[-1, 1]$. Observe o gráfico ao lado. Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. Sua inversa é a função $y = \text{arcsen } x$, de domínio $D' = [-1, 1]$ e contradomínio $Im' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Sabemos, da álgebra, que funções inversas possuem gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, o gráfico da função arco-seno é:



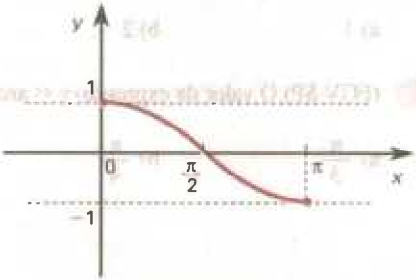
2. Função arco-co-seno

Consideremos a seguinte restrição da função co-seno:

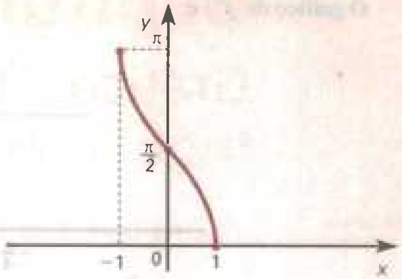
$$y = \cos x, \text{ com domínio } D = [0, \pi],$$

cujo contradomínio coincide com o conjunto imagem Im= $[-1, 1]$. Observe o gráfico ao lado.

Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. Sua inversa é a função $y = \text{arccos } x$, de domínio $D' = [-1, 1]$ e contradomínio $Im' = [0, \pi]$.

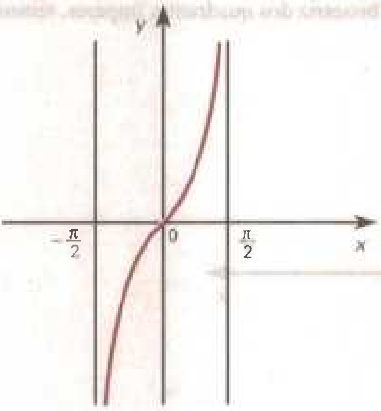


Seu gráfico é simétrico ao gráfico da função co-seno, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja:



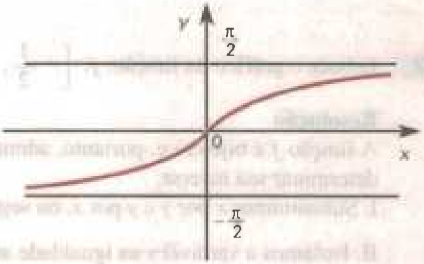
3. Função arco-tangente

Consideremos a seguinte restrição da função tangente: $y = \text{tg}\,x$, com domínio $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cujo contradomínio coincide com o conjunto imagem $\text{Im} = \mathbb{R}$. Observe o gráfico abaixo.



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. Sua inversa é a função $y = \text{arctg}\,x$, com domínio $D' = \mathbb{R}$ e contradomínio $\text{Im}' = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Seu gráfico é simétrico ao gráfico da função tangente, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, o gráfico da função $y = \text{arctg}\,x$ é:



Exercícios resolvidos

R.1 Esboce o gráfico da função: $f\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}$ arcsen x.

Resolução

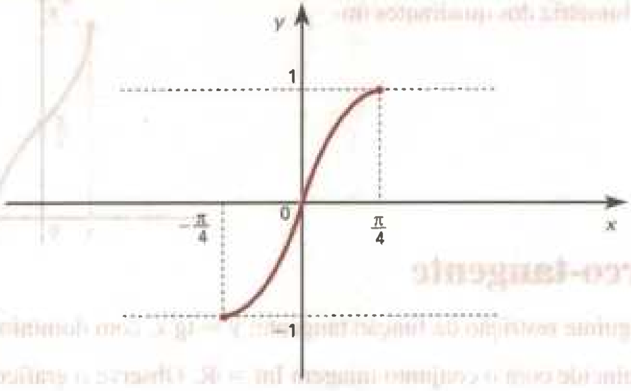
A função f é bijetora e, portanto, admite inversa. Escrevendo a função f sob a forma $y = \frac{1}{2}$ arcsen x, vamos determinar sua inversa:

I. Substituímos x por y e y por x, ou seja: $x = \frac{1}{2}$ arcsen y.

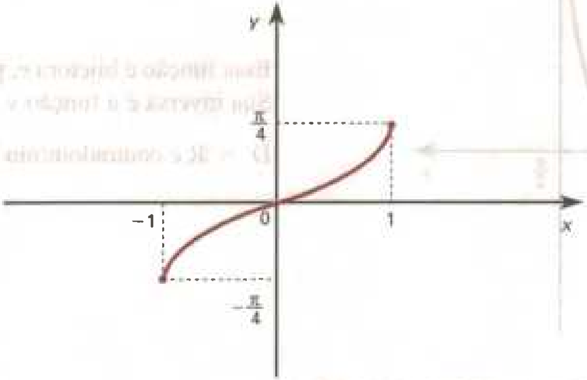
II. Isolamos a variável y na igualdade anterior: $x = \frac{1}{2}\,\text{arcsen}\,y \Rightarrow 2x = \text{arcsen}\,y \therefore y = \text{sen}\,2x$.

Assim, a inversa de f é a função: $f^{-1}\colon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-1, 1]$ tal que $f^{-1}(x) = \text{sen}\,2x$.

O gráfico de f^{-1} é:



Como funções inversas têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos que o gráfico de f é:



R.2 Esboce o gráfico da função: $f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow [0, \pi]$ tal que $f(x) = \text{arccos } 2x$.

Resolução

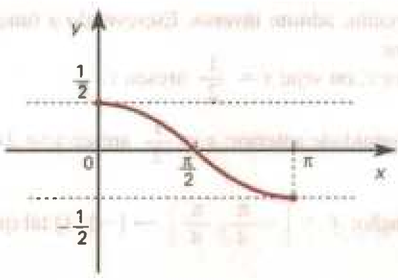
A função f é bijetora e, portanto, admite inversa. Escrevendo a função f sob a forma $y = \text{arccos } 2x$, vamos determinar sua inversa:

I. Substituímos x por y e y por x, ou seja: $x = \text{arccos } 2y$.

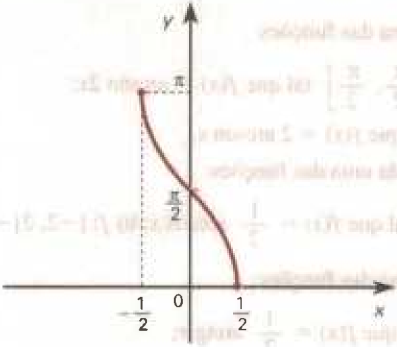
II. Isolamos a variável y na igualdade anterior: $x = \text{arccos } 2y \Rightarrow 2y = \cos x \therefore y = \frac{1}{2} \cos x$.

Assim, a inversa de f é a função: $f^{-1}: [0, \pi] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cos x$.

O gráfico de f^{-1} é:



Como funções inversas têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, segue-se que o gráfico de f é:



R.3 Esboce o gráfico da função: $f\colon \mathbb{R} \to \left]-\pi, \pi\right[$ tal que $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x$.

Resolução

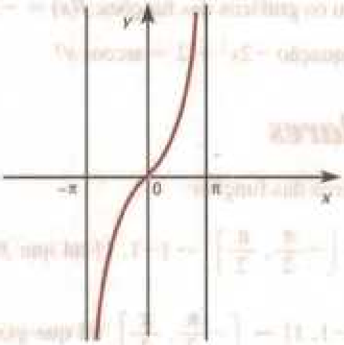
A função f é bijetora e, portanto, admite inversa. Escrevendo a função f sob a forma $y = 2 \operatorname{arctg} x$, vamos determinar sua inversa:

I. Substituímos x por y e y por x, ou seja: $x = 2 \operatorname{arctg} y$.

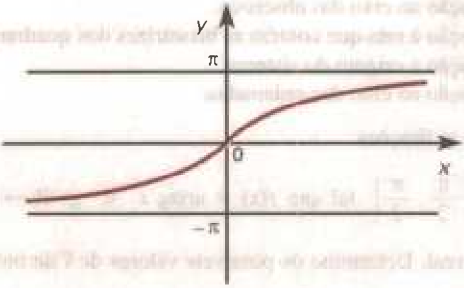
II. Isolamos y na igualdade anterior: $x = 2 \operatorname{arctg} y \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} y \therefore y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Assim, a inversa de f é a função: $f^{-1}\colon \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

O gráfico de f^{-1} é:



Como funções inversas têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, segue-se que o gráfico de f é:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a), B.2 (b), B.3 (a), C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (b), B.2 (a), B.3 (b), C.3, C.4.

Exercícios básicos

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $f\colon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(x) = \text{arcsen } 2x$;

b) $f\colon [-1, 1] \to [-\pi, \pi]$ tal que $f(x) = 2 \text{ arcsen } x$.

B.2 Represente graficamente cada uma das funções:

a) $f\colon [-1, 1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} \text{ arccos } x$; b) $f\colon [-2, 2] \to [0, \pi]$ tal que $f(x) = \text{arccos } \frac{x}{2}$.

B.3 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} \text{ arctg } x$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f(x) = \text{arctg } 2x$.

Exercícios complementares

C.1 Quantos pontos têm em comum os gráficos das funções: $f(x) = \frac{\pi x}{2}$ e $g(x) = \text{arcsen } x$?

C.2 Quantas raízes reais possui a equação $\frac{\pi x}{2} = \text{arcsen } x$?

C.3 Quantos pontos têm em comum os gráficos das funções: $f(x) = -2x^2 + 2$ e $g(x) = \text{arccos } x$?

C.4 Quantas raízes reais possui a equação $-2x^2 + 2 = \text{arccos } x$?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem-SP) Quanto aos gráficos das funções:

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x$$

e

$$g\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } g(x) = \text{arcsen } x,$$

pode-se afirmar que:

a) não têm ponto comum.

b) são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

c) são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

d) são simétricos em relação à origem do sistema.

e) são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

V.2 (Mapofei-SP) Considere as funções:

$$f\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tal que } f(x) = \text{arctg } x \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = k,$$

onde k é uma constante real. Determine os possíveis valores de k de modo que f e g tenham intersecção não-vazia.

V.3 (PUC-RJ) Qual dos pontos abaixo pertence ao gráfico da função:

$$f\colon [-1, 1] \to [0, 2\pi], \text{ com } f(x) = 2 \text{ arccos } x?$$

a) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ c) $(0, 1)$ d) $(-1, 2\pi)$ e) $(0, 0)$

Capítulo 90

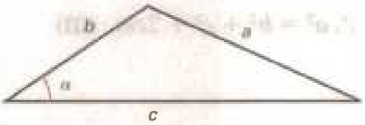
Lei dos co-senos

1. Aplicação do co-seno na resolução de triângulos

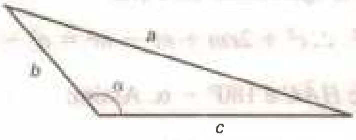
Vamos fazer um estudo das relações existentes entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo. Apresentamos nesse capítulo o seguinte teorema, conhecido como **lei dos co-senos.**

Teorema (lei dos co-senos)

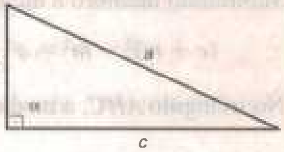
Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e sendo α a medida do ângulo oposto ao lado de medida a:



($\alpha < 90°$)



($\alpha > 90°$)



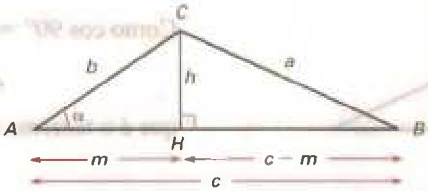
($\alpha = 90°$)

então temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Demonstração

1º caso: $\alpha < 90°$



Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AB}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos HBC e HAC, temos:

$$h^2 + (c - m)^2 = a^2; \quad \text{(I)}$$
$$h^2 + m^2 = b^2. \quad \text{(II)}$$

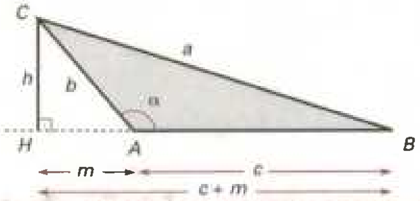
Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II):

$$(c - m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore c^2 - 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \quad \text{(III)}$$

Do triângulo HAC, temos: $\cos\alpha = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b\cos\alpha$. **(IV)**

Substituindo (IV) em (III), encontramos, finalmente: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha$.

2º caso: $\alpha > 90°$



Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos BHC e AHC, temos:

$$h^2 + (c + m)^2 = a^2; \quad \textbf{(I)}$$
$$h^2 + m^2 = b^2. \quad \textbf{(II)}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II):

$$(c + m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore c^2 + 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2cm. \quad \textbf{(III)}$$

No triângulo AHC, a medida de $H\hat{A}C$ é $180° - \alpha$. Assim:

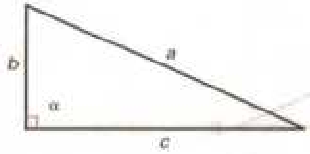
$$\cos(180° - \alpha) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b\cos(180° - \alpha).$$

Porém, sabemos que $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Logo, temos: $m = -b\cos\alpha$. **(IV)**

Substituindo (IV) em (III), encontramos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha$.

3º caso: $\alpha = 90°$

Observe que o teorema também é válido para $\alpha = 90°$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90°$.



Como $\cos 90° = 0$, temos:

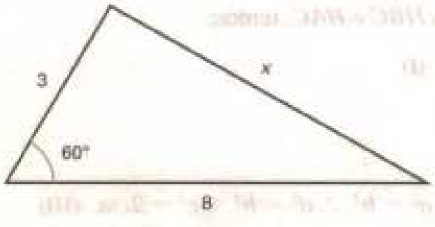
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

que é o teorema de Pitágoras.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Determine o valor de x na figura:



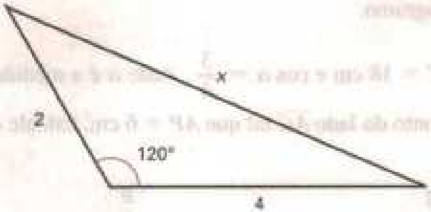
Resolução

Pela lei dos co-senos:

$$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8\cos 60°$$
$$\therefore x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore x^2 = 49.$$

Logo, $x = 7$.

R.2 Determine o valor de x na figura:



Resolução

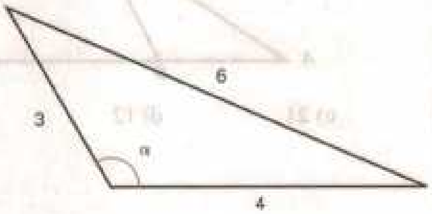
Pela lei dos co-senos:

$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos 120°$$

$$\therefore x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \therefore x^2 = 28.$$

Logo, $x = 2\sqrt{7}$.

R.3 Determine o valor do cos α na figura:



Resolução

Pela lei dos co-senos:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$$

$$\therefore 36 = 9 + 16 - 24 \cos \alpha \therefore 24 \cos \alpha = -11.$$

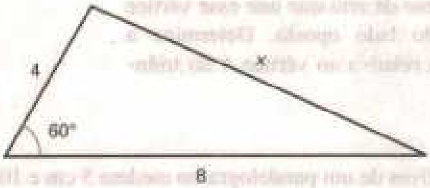
Logo, $\cos \alpha = -\frac{11}{24}$.

Sugestões

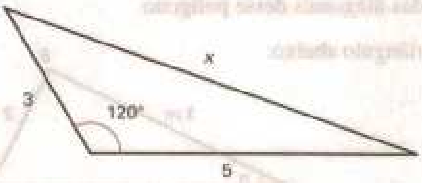
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, C.1, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.6, B.7, C.2, C.3, C.4, C.6.

Exercícios básicos

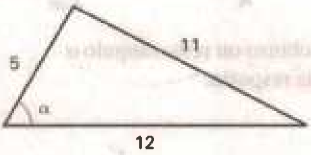
B.1 Determine o valor de x na figura:



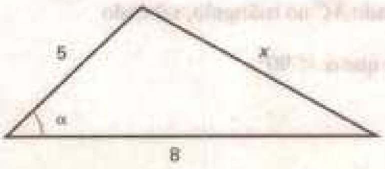
B.2 Calcule a medida x na figura:



B.3 Obtenha o cos α na figura:



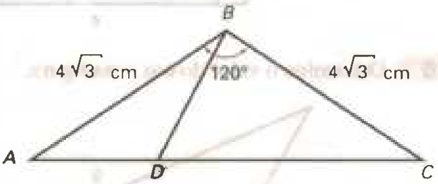
B.4 Sabendo que sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e que $\alpha < 90°$, determine o valor de x na figura abaixo.



B.5 Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem $\sqrt{3}$ cm e 2 cm e formam entre si um ângulo de 30°. Calcule a medida da maior diagonal desse paralelogramo.

B.6 Seja ABC um triângulo isósceles tal que $AB = AC = 18$ cm e $\cos \alpha = \dfrac{3}{4}$, onde α é a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Sendo M o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e P o ponto do lado $\overline{AC}$ tal que $AP = 6$ cm, calcule o perímetro do quadrilátero $MPCB$.

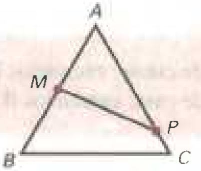
B.7 Na figura, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ estão entre si na razão de 1 para 3. A medida do segmento $\overline{BD}$ é, em centímetros:



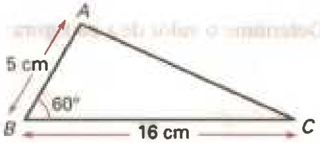
a) $48(2 - \sqrt{3})$ b) $3(19 - 4\sqrt{3})$ c) 21 d) 12 e) $\sqrt{21}$

Exercícios complementares

C.1 A figura mostra um triângulo equilátero ABC de lado 6 cm. O ponto M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{AP}$ mede 4 cm. Determine a medida do segmento $\overline{MP}$.

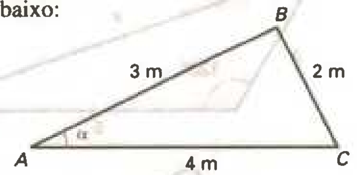


C.2 Chama-se "mediana relativa a um vértice de um triângulo" o segmento de reta que une esse vértice ao ponto médio do lado oposto. Determine a medida da mediana relativa ao vértice A do triângulo.

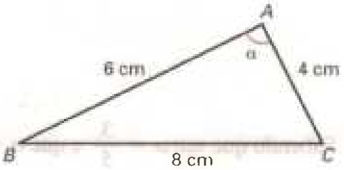


C.3 Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 5 cm e 10 cm e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule as medidas das diagonais desse polígono.

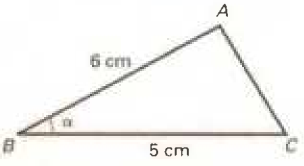
C.4 Calcule o $\cos \alpha$ no triângulo abaixo:



C.5 Classifique como agudo, obtuso ou reto o ângulo α do triângulo. Justifique sua resposta.

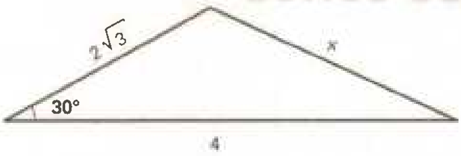


C.6 Calcule a medida do lado $\overline{AC}$ no triângulo, sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ e que $\alpha < 90°$.



Questões dos vestibulares

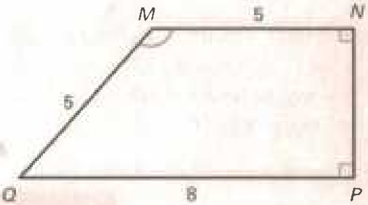
V.1 (PUC-RS) Determine x na figura:



V.2 (Vunesp) Os lados de um triângulo medem $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $3+\sqrt{3}$. Determine a medida do ângulo oposto ao lado de medida $\sqrt{6}$.

V.3 (Unicamp-SP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água/bomba e caixa d'água/casa é de 60°. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?

V.4 (Cesgranrio) O trapézio retângulo *MNPQ* tem as medidas indicadas na figura. O co-seno do ângulo $Q\hat{M}N$ vale:



a) $-\dfrac{3}{5}$ b) $-\dfrac{4}{5}$ c) -1 d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

V.5 (Fuvest-SP) Um triângulo T tem os lados iguais a 4, 5 e 6. O co-seno do maior ângulo de T é:

a) $\dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{1}{8}$

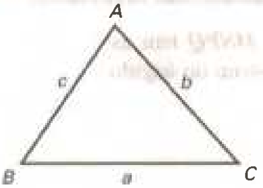
Capítulo 91

Lei dos senos

1. Aplicação do seno em resolução de triângulos

Teorema (lei dos senos)

Se as medidas dos lados de um triângulo ABC são $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$:



então:

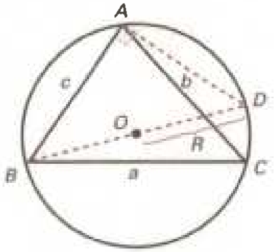
$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R,}$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração

1º caso

O centro (O) da circunferência circunscrita é um ponto interior ao triângulo:



Sendo $\overline{BD}$ um diâmetro dessa circunferência, temos que o ângulo $D\hat{A}B$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Assim, temos:

$$\text{sen } \hat{D} = \frac{c}{2R}.$$

Porém, os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois estão inscritos na mesma circunferência e determinam o mesmo arco. Logo, temos que:

$$\text{sen } \hat{D} = \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}.$$

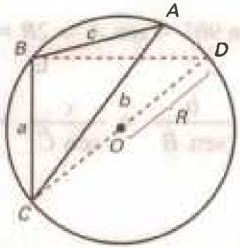
Traçando por A um diâmetro $\overline{AD'}$, temos analogamente: $2R = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$.

Traçando por C um diâmetro $\overline{CD''}$, temos analogamente: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}}$.

Portanto concluímos que: $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

2º caso

O centro (O) **da circunferência** circunscrita é um ponto exterior ao triângulo:



Sendo $\overline{CD}$ um diâmetro dessa circunferência, temos que o ângulo $C\hat{B}D$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Temos então:

$$\text{sen } \hat{D} = \frac{a}{2R}.$$

Porém, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são congruentes, pois estão inscritos na mesma circunferência e determinam o mesmo arco. Logo, temos que:

$$\text{sen } \hat{D} = \text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}.$$

Traçando por A o diâmetro $\overline{AD'}$, temos analogamente:

$$2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}.$$

Traçando por B o diâmetro $\overline{BD''}$, temos analogamente:

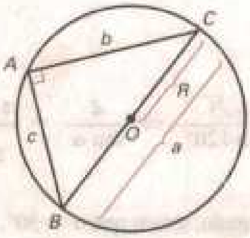
$$2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}.$$

Portanto concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R.$$

3º caso

O centro (O) da circunferência circunscrita pertence a um dos lados do triângulo:



Note que $a = 2R$ e que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Assim, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

e

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

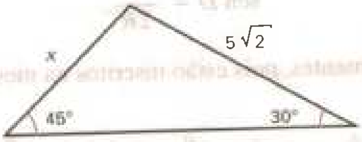
E, como $a = 2R$, temos: $\frac{a}{2R} = 1 = \operatorname{sen} 90° = \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}}$.

Portanto concluímos que: $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R.$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Determine o valor de x na figura:



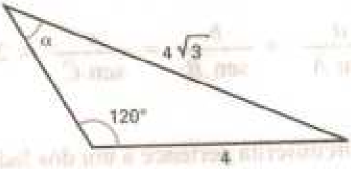
Resolução

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{5\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Logo, $x = 5$.

R.2 Determine o valor de α na figura:



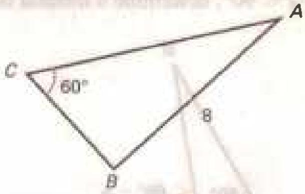
Resolução

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 120°} \Rightarrow \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \therefore \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, temos que α = 30°.

R.3 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura.



Resolução

Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, temos pela lei dos senos:

$$\frac{8}{\text{sen } 60°} = 2R \ \therefore\ \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \ \therefore\ \frac{16}{\sqrt{3}} = 2R \ \therefore\ R = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

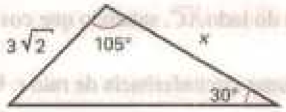
Logo, $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Sugestões

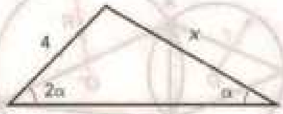
Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, C.1, C.2.
Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5, B.6, C.3, C.4.

Exercícios básicos

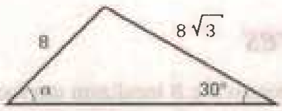
B.1 Determine o valor de x na figura:



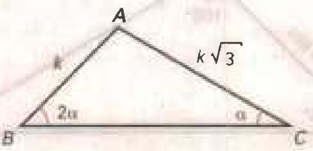
B.2 Sabendo que sen $\alpha = \frac{3}{5}$, calcule o valor de x:



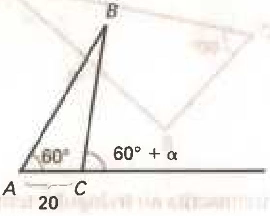
B.3 Determine a medida α, sabendo que $\alpha < 90°$.



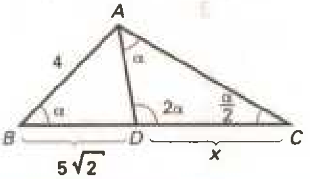
B.4 Calcule a medida do angulo $B\hat{A}C$ no triângulo abaixo:



B.5 Sabendo que sen α = $\frac{5}{12}$ e que α < 90°, determine a medida do segmento $\overline{BC}$:



B.6 Obtenha o valor de x, sabendo que cos $\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.



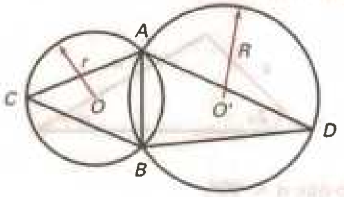
Exercícios complementares

C.1 Um triângulo ABC de perímetro p está inscrito numa circunferência de raio r. Calcule, em função de p e r, o valor de sen $\hat{A}$ + sen $\hat{B}$ + sen $\hat{C}$.

C.2 Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio r. A medida do lado $\overline{BC}$ é igual a r. Calcule a medida do ângulo $\hat{A}$.

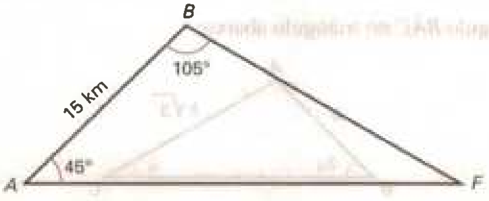
C.3 Num triângulo ABC tem-se que o lado $\overline{AB}$ mede 4 cm e que a medida α do ângulo $\hat{B}$ é a metade da medida do ângulo $\hat{C}$. Determine a medida do lado $\overline{AC}$, sabendo que cos α = $\frac{1}{3}$.

C.4 Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio r. Um outro triângulo ABD está inscrito numa circunferência de raio R. Calcule, em função de r e R, a razão $\frac{\text{sen } \hat{D}}{\text{sen } \hat{C}}$.

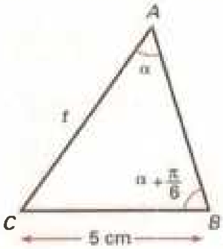


Questões dos vestibulares

V.1 (Unicamp-SP) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio em F. Conhecendo os ângulos $F\hat{A}B = 45°$, $F\hat{B}A = 105°$ e a distância $AB = 15$ km, determine as distâncias AF e BF.



V.2 (Vunesp) Num triângulo ABC, denominemos t o comprimento do lado $\overline{AC}$ e α o ângulo interno do vértice A, medido em radianos. Sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede 5 cm e que o ângulo interno do vértice B mede $\alpha + \frac{\pi}{6}$ radianos.



Então:

a) $t = \dfrac{2}{5\left(\sqrt{3} + \text{cotg}\,\alpha\right)}$

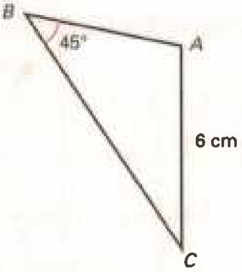
b) $t = \dfrac{5}{2}\left(\sqrt{3} + \text{tg}\,\alpha\right)$

c) $t = \dfrac{5}{2}\left(\sqrt{3} + \text{cotg}\,\alpha\right)$

d) $t = 5\,\text{sen}^2\,\alpha + 2\cos^2\alpha$

e) $t = \dfrac{5}{2}\left(\sqrt{3} - \text{tg}\,\alpha\right)$

V.3 (Fatec-SP) O raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, indicado abaixo, tem comprimento:



a) 3 cm

b) 12 cm

c) 6 cm

d) $3\sqrt{2}$ cm

e) $6\sqrt{2}$ cm

Respostas

Capítulo 0

Exercícios básicos

B.1 (a), (b) e (d). **B.2** $\sim p$: $8 \geqslant 1$; $\sim q$: $x \neq 6$; $\sim r$: x não é número par. **B.3** a) F; b) V; c) F; d) V; e) V; f) V; g) F. **B.4** "5 não é número par e 5 é igual a 3". **B.5** "Carlos não foi viajar e não foi à escola". **B.6** "José não se casou ou não foi viajar". **B.7** "Márcia voltou ou não foi ao cinema". **B.8** a) F; b) V; c) F; d) V.

Exercícios complementares

C.1 a) A relação $\Rightarrow$ pode ser usada; b) a relação $\Rightarrow$ **não** pode ser usada; c) a relação $\Rightarrow$ pode ser usada; d) a relação $\Rightarrow$ pode ser usada. **C.2** a) A relação $\Leftrightarrow$ pode ser usada; b) a relação $\Leftrightarrow$ **não** pode ser usada; c) a relação $\Leftrightarrow$ **não** pode ser usada; d) a relação $\Leftrightarrow$ pode ser usada. **C.3** a) V; b) F; c) V; d) F; e) F; f) V; g) V; h) F; i) V; j) F. **C.4** Devemos mostrar que as proposições $\sim(\sim p)$ e p têm a mesma tabela verdade.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

Note que a primeira e a terceira coluna são iguais; logo, $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$. **C.5** "Márcia voltou". **C.6** a) $x \leqslant 2 \rightarrow x \leqslant 3$. b) "Se Beto não é filho de Rachel, então Rachel não é mulher de José". c) "Se o quadrado da medida do maior lado de um triângulo é diferente da soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então esse triângulo não é retângulo".

Questões dos vestibulares

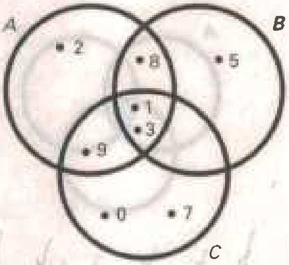
V.1 d. **V.2** e. **V.3** c.

Capítulo 1

Exercícios básicos

B.1 a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; c) $C = \{\dots -8, -7, -6, -5\}$. **B.2** a) $A = \{1\}$; b) $B = \{3\}$; c) $C = \{-1, 1, -2, 2\}$. **B.3** a) V; b) V; c) V; d) V; e) F; f) V; g) V. **B.4** a) V; b) F; c) V; d) V; e) V; f) V; g) F.

B.5



B.6 a) V; b) F; c) V; d) F; e) V; f) V; g) V; h) F; i) V; j) F; k) V; l) V; m) V; n) F. **B.7** a) V; b) V; c) F; d) V; e) F; f) F; g) V; h) F; i) V; j) F; k) V. **B.8** a) F; b) V; c) F; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V; i) V; j) V; k) V; l) F. **B.9** $\varnothing$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$; $\{1, 2, 3\}$. **B.10** 1024.

Exercícios complementares

C.1 a) $A = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$; b) $B = \varnothing$; c) $C = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$; d) $S = \{2\}$; e) $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. **C.2** a) F; b) F; c) V; d) F; e) F. **C.3** O conjunto A possui nove elementos.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** c. **V.3** d.

Capítulo 2

Exercícios básicos

B.1 $P(A) = \{\varnothing, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$. **B.2** $P(A) = \{\varnothing, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}, \{6, 7, 8\}, \{6, 7, 9\}, \{6, 8, 9\}, \{7, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$. **B.3** $2^6 = 64$. **B.4** 2^n. **B.5** 8. **B.6** a) V; b) F; c) V; d) V; e) F; f) V; g) V; h) F; i) V; j) F; k) V; l) V.

Exercícios complementares

C.1 a) F; b) V; c) F; d) V; e) F; f) V. **C.2** $A = \{a, b, c\}$. **C.3** 6. **C.4** $2^4 - 1 = 15$. **C.5** $2^{10} = 1024$. **C.6** $2^6 - 22 = 42$. **C.7** $2^6 - 22 = 42$. **C.8** $2^8 - 9 = 247$.

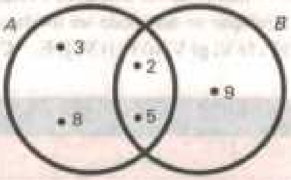
Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** a. **V.3** c.

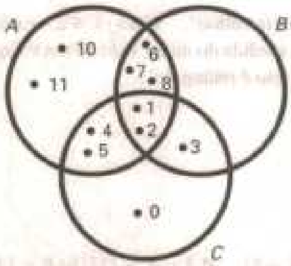
Capítulo 3

Exercícios básicos

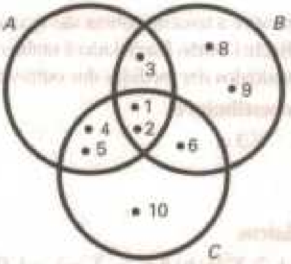
B.1 a) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; b) $A \cap B = \{0, 1, 2\}$; c) $A \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; d) $A \cap D = \varnothing$; e) $A \cup B \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; f) $A \cap B \cap C = \{0, 1, 2\}$; g) $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$; h) $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; i) $(A \cap D) \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3\}$. **B.2** a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, -4, 9, 5, 6, -1, 7\}$; b) $A \cap B =$ $= \{0, 1, 2, 3\}$; c) $A \cap C = \{-1, 2, 3, 5, 6\}$; d) $B \cap C = \{2, 3, 4\}$; e) $A \cap B \cap C = \{2, 3\}$; f) $A \cup B \cup C = \{7, 0, 1, 2, 3, 5, 6, -1, -4, 9, 4, -6, -5, -9\}$. **B.3**



B.4

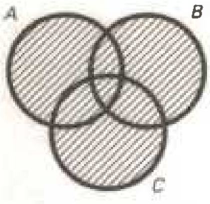

A
B
10
11
6
7
8
1
4
2
5
3
0
C

B.5

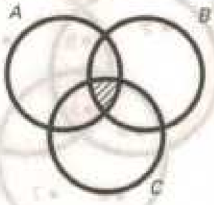

A
B
3
8
9
1
4
2
5
6
10
C

B.6 Três elementos. **B.7** Três elementos.

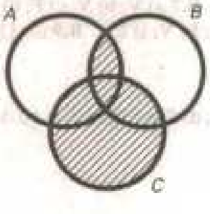
B.8 a)



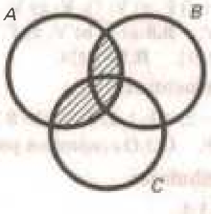
b)



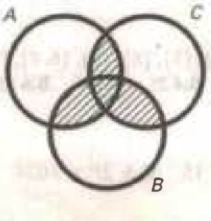
c)



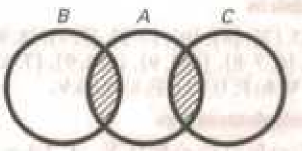
d)



e)



f)



B.9 a) V; b) F; c) V; d) F; e) V; f) V; g) F; h) V; i) V.

Exercícios complementares

C.1 a) $B \cup D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B \cap D = \{1\}$; c) $B \cup C = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; d) $B \cap C = \varnothing$; e) $A \cup B = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$; f) $C \cap D = \{-1\}$; g) $B \cup C \cup D = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; h) $B \cap C \cap D = \varnothing$; i) $(A \cap C) \cup B = \{\ldots -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; j) $(B \cup C) \cap (A \cup D) = \{\ldots -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. **C.2** $S = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **C.3** $S = \{3, 4, 5, 6\}$. **C.4** $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **C.5** a) V; b) V; c) V; d) F; e) F; f) V. **C.6** $S = \{-3, 3, 2, 4\}$. **C.7** $S = \{5, 3, 4\}$.

Questões dos vestibulares

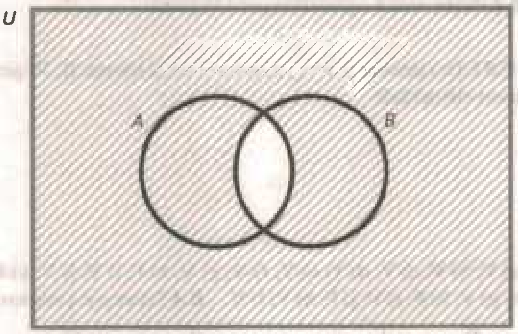
V.1 c. **V.2** a. **V.3** c. **V.4** a.

Capítulo 4

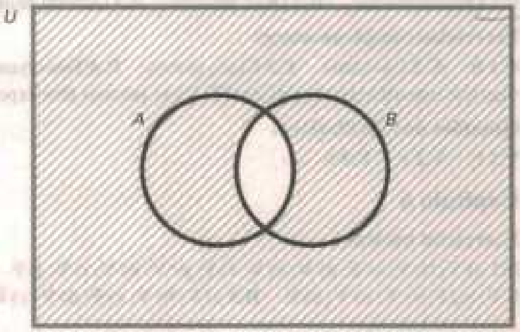
Exercícios básicos

B.1 a) $F - E = \{1, 2, 9\}$; b) $G - E = \{5, 7\}$; c) $(E \cup G) - F = \{5, 7\}$; d) $(F - G) \cup (G - F) = \{1, 2, 3, 9, 5, 7\}$; e) $\underset{F}{\complement} E = \{1, 2, 9\}$; f) $\underset{F}{\complement} (E \cap G) = \{1, 2, 3, 9\}$; g) $\underset{F}{\complement} G$ não existe, pois $G \not\subset F$; h) $\underset{E}{\complement} E = \varnothing$; i) $\underset{F}{\complement} \varnothing = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\}$.

B.2 a) $A' \cup B'$:



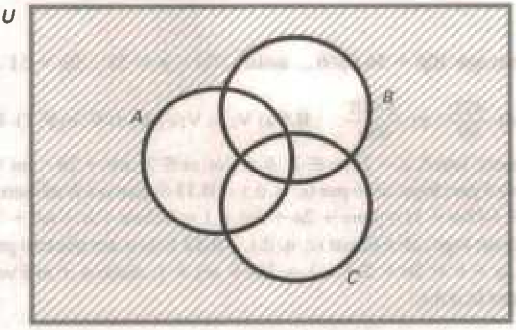
b) $(A \cap B)'$:



Note, pelos itens (a) e (b), que $A' \cup B' = (A \cap B)'$.

B.3 a) $B - C = \{1\}$; b) $C - B = \{2, 3\}$; c) $A - (B \cup C) = \{4, 6, 7\}$; d) $\underset{A}{\complement} B = \{2, 3, 4, 6, 7\}$; e) $\underset{A}{\complement} C = \{1, 4, 6, 7\}$; f) $\underset{A}{\complement} (B \cup C) = \{4, 6, 7\}$; g) $\underset{C}{\complement} B$ não existe, pois $B \not\subset C$.

B.4

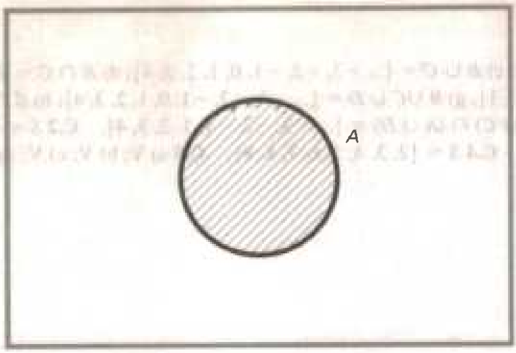


B.5 8. **B.6** 17. **B.7** 10.

Exercícios complementares

C.1 $A \,\Delta\, B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. **C.2** $B = \{1, 2, 7, 8, 9\}$. **C.3** $A = \{g, h, a, i, e, f\}$; $B = \{h, a, i, j, b, c\}$; $C = \{e, f, a, i, j, d\}$.

C.4 $(A')' = A$



C.5 a) V; b) V; c) V; d) F; e) F; f) V; g) F.
C.6 d. **C.7** a) $\supset$; b) $\subset$; c) $\subset$; d) $\supset$; e) $\subset$; f) $\supset$.
C.8 a) $\underset{B}{\complement} D = A$; b) $\underset{B}{\complement} A = D$;
c) $\underset{B}{\complement} (A \cup D) = \varnothing$; d) $\underset{A}{\complement} (A \cap B) = \varnothing$.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** a. **V.3** d.

Capítulo 5

Exercícios básicos

B.1 Quinze pessoas. **B.2** Doze pessoas. **B.3** Dezoito alunos. **B.4** Pimba-cola é o preferido por 145 jovens.

Exercícios complementares

C.1 B. **C.2** Um aluno. **C.3** Cinco alunos. **C.4** Três crianças. **C.5** I. Dez pessoas têm experiência nos três setores. II. 36 pessoas têm experiência em pintura. III. Vinte pessoas têm experiência em eletricidade.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** e. **V.3** b

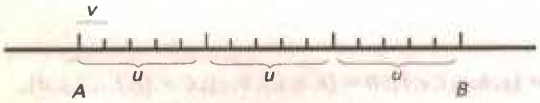
Capítulo 6

Exercícios básicos

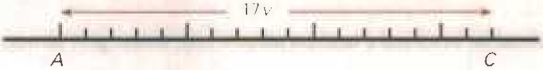
B.1 a) V; b) V; c) F; d) V; e) V; f) F; g) V; h) V; i) V; j) F. **B.2** a) V; b) V; c) V; d) V; e) V; f) V; g) V; h) F; i) V; j) V; k) F; l) V; m) F; n) V; o) V; p) F. **B.3** a) V; b) V; c) F; d) V; e) F; f) V; g) V; h) F; i) V; j) F; k) V; l) V. **B.4** Sejam p e q números racionais; existem inteiros a, b, c e d, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, tais que $p = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$; temos que $pq = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; como a, c, b e d são inteiros, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, segue-se que ac e bd são inteiros, com $bd \neq 0$; logo, $\frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$ (c.q.d.). **B.5** Sejam p e q números racionais, com $q \neq 0$; existem números inteiros a, b, c e d, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, tais que $p = = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$; temos que $\frac{p}{q} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$; como a, b, c e d são inteiros, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, segue-se que ad e bc são inteiros com $bc \neq 0$; logo $\frac{ad}{bc} \in \mathbb{Q}$ (c.q.d.). **B.6** Fazendo $p = 5{,}6666...$, temos que $10p = 56{,}6666...$, assim, $10p - p = 51 \therefore 9p = 51 \therefore p = \frac{51}{9}$; logo, $p \in \mathbb{Q}$ (c.q.d.). **B.7** a) $\frac{112}{9}$; b) $\frac{203}{9}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $\frac{421}{99}$; e) $\frac{3\,418}{999}$. **B.8** a) V; b) V; c) V; d) V; e) F; f) F; g) V; h) F; i) V; j) F; k) V. **B.9** $r = 1$. **B.10** Sejam a e b números pares, isto é, $a = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, $b = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, $ab = 2n \cdot 2m = 2(n \cdot 2m)$; como $n \cdot 2m$ é um número inteiro, temos que $2(n \cdot 2m)$ é par; logo, ab é par (c. q. d.). **B.11** Sejam a e b números ímpares, isto é, $a = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$; $b = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, $ab = (2n + 1)(2m + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$; como $2mn + n + m$ é inteiro, temos que $2(2mn + n + m) + 1$ é ímpar; logo, ab é ímpar (c. q. d.). **B.12** Seja a um número par e b um número ímpar, isto é, $a = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, $b = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, $a + b = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$; como $n + m$ é um número inteiro, temos que $2(n + m) + 1$ é ímpar; logo, $a + b$ é ímpar (c.q.d.).

Exercícios complementares

C.1 Divide-se cada segmento de medida u em cinco partes iguais de medida v:



; marca-se na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ o segmento $\overline{AC}$ de medida $17v$:



; na unidade u, o segmento $\overline{AC}$ mede $\frac{17}{5}$. **C.2** Não existe o menor racional positivo, pois entre dois racionais quaisquer existem infinitos outros racionais. **C.3** a) V; b) F, porque faltou dizer que $b \neq 0$; c) V; d) V; e) F, porque faltou dizer que $1 + a \neq 0$; f) V; g) V; h) F, porque faltou dizer que $q \neq 0$. **C.4** Fazendo $p = 4.5222...$, temos $10p = 45{,}222...$ e $100p = 452{,}222...$; assim, $100p - 10p = 407 \therefore 90p = 407 \therefore p = \frac{407}{90}$; logo, $p \in \mathbb{Q}$. **C.5** a) $\frac{5629}{900}$; b) $\frac{136\,861}{9900}$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** a. **V.3** d.

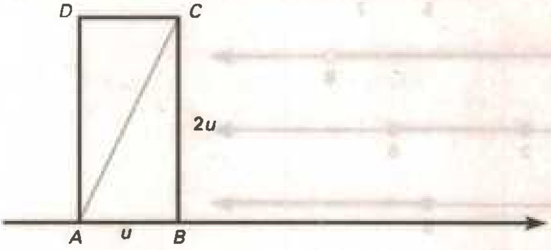
Capítulo 7

Exercícios básicos

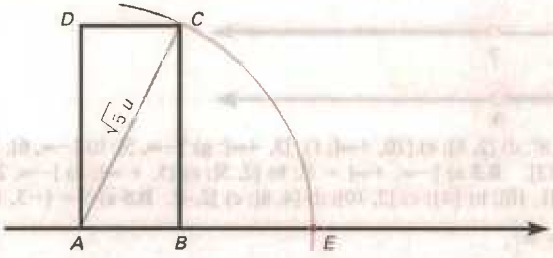
B.1 a) V; b) V; c) F; d) V; e) V; f) F; g) F; h) F; i) V. **B.2** a) V; b) F; c) V; d) V; e) F; f) V; g) V; h) F; i) V; j) V; k) V; l) F; m) V; n) F; o) V; p) V. **B.3** Sejam: r um número racional não-nulo, t um número irracional, e k um número real tais que $rt = k$; analisemos a possibilidade de k ser racional, isto é: $\underbrace{r}_{\textbf{Racional}} \cdot \underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{k}_{\textbf{Racional}}$; isolando t: $\underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = \dfrac{k}{r}\begin{matrix}\leftarrow \textbf{Racional}\\ \leftarrow \textbf{Racional}\end{matrix}$; como k e r são racionais, com $r \neq 0$, temos que $\frac{k}{r}$ é racional: $\underbrace{t}_{\textbf{Irracional}} = \underbrace{\frac{k}{r}}_{\textbf{Racional}}$; mas essa igualdade é absurda; logo, k não pode ser racional; portanto k é irracional (c.q.d.). **B.4** Analisemos a possibilidade de a ser um número racional; se a é racional, então a^2 é racional, pois $a^2 = a \cdot a$ e o produto de dois racionais é racional; mas essa conclusão contraria a hipótese de que a^2 é irracional; assim sendo, a não pode ser racional; portanto a é irracional (c.q.d.). **B.5** $S = \{1\}$. **B.6** $S = \{1, \sqrt{2}\}$.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** Seja um retângulo em que um dos lados é o segmento $\overline{AB}$ e o lado $\overline{BC}$ tem comprimento $2u$:



pelo teorema de Pitágoras, temos que a diagonal $\overline{AC}$ mede $\sqrt{5}\,u$; utilizando um compasso, com a ponta-seca em A e raio $\overline{AC}$, desenhamos o arco que intercepta a semi-reta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E:



assim, temos que o comprimento de $\overline{AE}$ é $\sqrt{5}\,u$. **C.3** Se n é natural par, então $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$; assim, temos que $(\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{2k} = ((\sqrt{2})^2)^k = 2^k$; o número 2^k é racional, pois $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ e $2^k = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k \textbf{ fatores}}$, $k > 1$, e o produto de racionais é racional. **C.4** Se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$; assim, temos que $(\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{2k+1} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2})^{2k}$; como $\sqrt{2}$ é um irracional não-nulo e $(\sqrt{2})^{2k}$ é racional (conforme exercício anterior), temos que $\sqrt{2}\,(\sqrt{2})^{2k}$ é irracional. **C.5** a) três elementos; b) nove elementos. **C.6** a) mín$(A) = 5$; b) mín$(B) = 5$; c) mín$(C) = 6$; d) não existe mín(D). **C.7** a) máx$(A) = 180$; b) máx$(B) = 180$; c) máx $(C) = 17$; d) não existe máx(D).

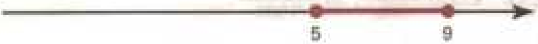
Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** d. **V.3** Como todo número natural ou inteiro ou racional ou irracional é também número real, temos, pelo menos, duas alternativas corretas.

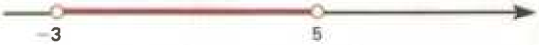
Capítulo 8

Exercícios básicos

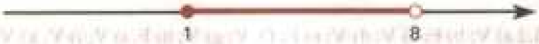
B.1 a)



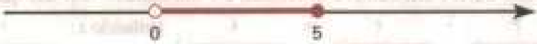
b)



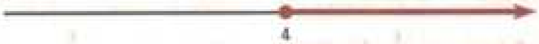
c)



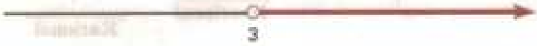
d)



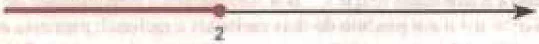
e)



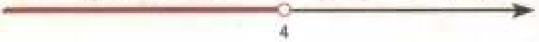
f)



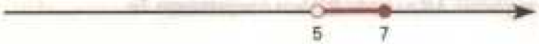
g)



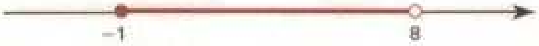
h)



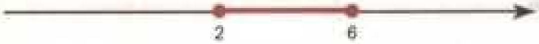
B.2 a)



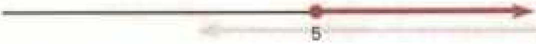
b)



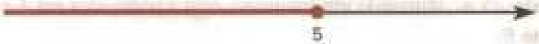
c)



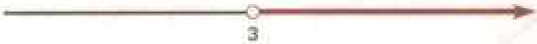
d)



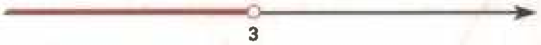
e)



f)



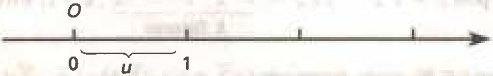
g)



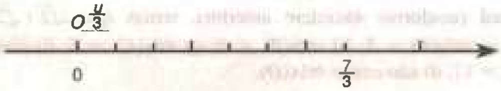
B.3 a)]3, 7]; b) [−3, 4[; c)]1, 8[; d) [2, 8]; e) [10, +∞[; f)]3, +∞[; g)]−∞, 5[; h)]−∞, 6]; i)]−∞, +∞[. **B.4** a)]−3, 13]; b) [5, 10]; c)]−3, 5[; d)]10, 13]. **B.5** a)]−∞, +∞[= ℝ; b) [2, 5[; c) [5, + ∞[; d)]−∞, 2[. **B.6** a)]0, 7[; b) [−1, +∞[; c) [−1, 0] ∪ [7, +∞[. **B.7** a)]1, 10]; b) {4}; c)]2, 10]; d) [4, 8[; e)]2, 4[. **B.8** a) $S = [-3, 11[$; b) $S =]-1, 2]$. **B.9** a) $S =]-1, +\infty[$; b) $S = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

Exercícios complementares

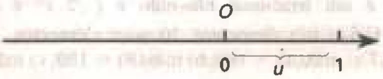
C.1 a)



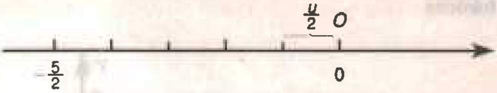
; dividimos a unidade u em três partes iguais a $\frac{u}{3}$; a partir de O, sobre o semi-eixo positivo, marcamos sete segmentos de medidas iguais a $\frac{u}{3}$, obtendo assim o ponto de abscissa $\frac{7}{3}$:



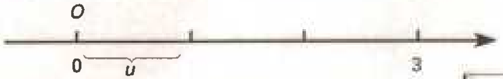
b)



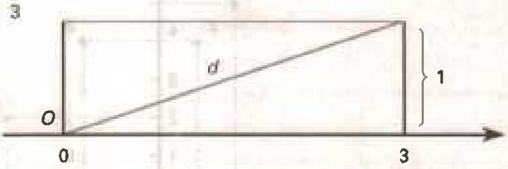
dividimos a unidade u em duas partes iguais a $\frac{u}{2}$; a partir de O, no semi-eixo negativo, marcamos cinco segmentos de medidas iguais a $\frac{u}{2}$, obtendo assim o ponto de abscissa $-\frac{5}{2}$:



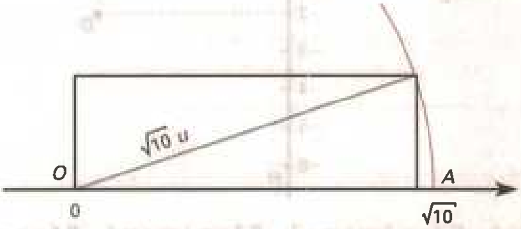
c)



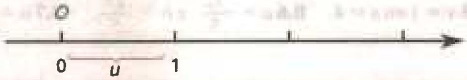
construímos em retângulo de altura 1 u de modo que dois vértices consecutivos tenham abscissas 0 e 3:



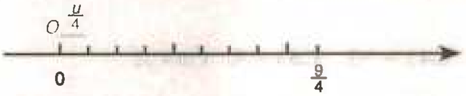
a medida de d da diagonal é obtida pelo teorema de Pitágoras: $d^2 = 3^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{10}$; usando um compasso, com a ponta-seca em O e abertura d ($d = \sqrt{10}$), descrevemos um arco que intercepta o eixo real no ponto A. A abscissa de A é $\sqrt{10}$:



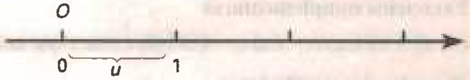
C.2 a)



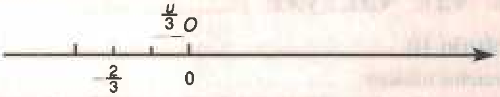
dividimos a unidade u em quatro partes iguais a $\frac{u}{4}$; a partir de O, sobre o semi-eixo positivo, marcamos nove segmentos de medidas iguais a $\frac{u}{4}$, obtendo assim o ponto de abscissa $\frac{9}{4}$:



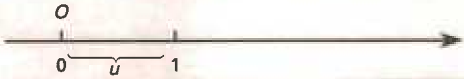
b)



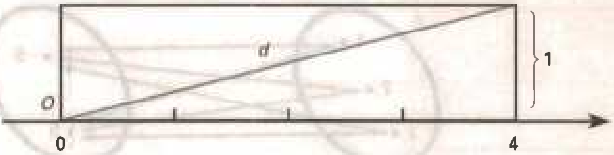
dividimos a unidade u em três partes iguais a $\frac{u}{3}$; a partir do ponto O, sobre o semi-eixo negativo, marcamos dois segmentos de medida $\frac{u}{3}$, obtendo assim o ponto de abscissa $-\frac{2}{3}$:



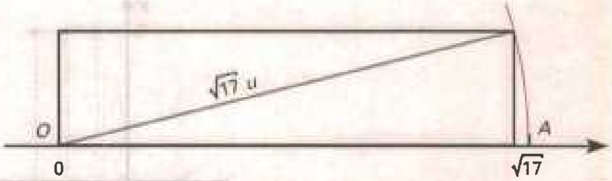
c)



construímos um retângulo de altura 1 u de modo que dois vértices consecutivos tenham abscissas 0 e 4:



a medida d da diagonal é obtida pelo teorema de Pitágoras: $d^2 = 4^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{17}$; usando um compasso, com a ponta-seca em O e abertura d ($d = \sqrt{17}$), descrevemos um arco que intercepta o eixo real no ponto A; a abscissa de A é $\sqrt{17}$:



C.3 a) 32; b) 88; c) 36; d) não, pois as classes são disjuntas entre si; e) 58. **C.4** a) 5; b) 4; c) 7; d) 2; e) 3; f) 2. **C.5** 4.

C.6 a) 10; b) 10; c) 8; d) $\frac{a+b}{2}$. **C.7** a) [0, 1]; b) $\left[0, \frac{1}{4}\right]$; c) $\{0\}$. **C.8** $\{0\}$. **C.9** [4, 8].

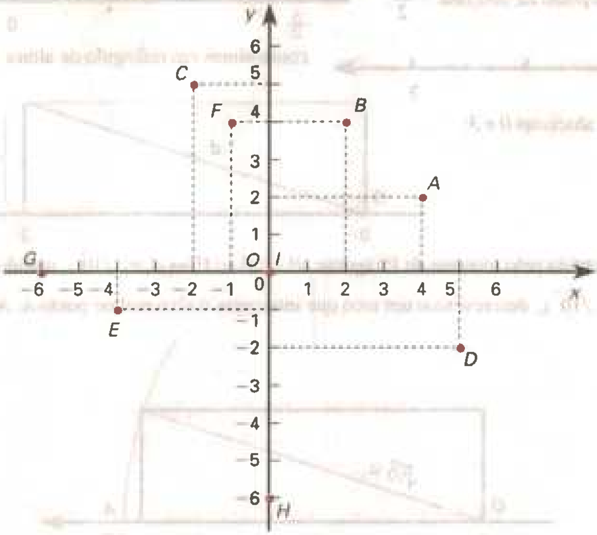
Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** a. **V.3** a.

Capítulo 9

Exercícios básicos

B.1



B.2 $-2 < x < \frac{8}{5}$. **B.3** $-2 < x < 2$. **B.4** $x = 3$ ou $x = -3$. **B.5** $x = 1$ ou $x = 4$. **B.6** $a = \frac{32}{5}$ e $b = \frac{23}{5}$. **B.7** $a = \frac{11}{6}$ e $b = \frac{25}{12}$; logo, $P(a, b)$ é ponto do 1º quadrante.

Exercícios complementares

C.1 a) 3; b) 4; c) 5. **C.2** c. **C.3** Não existe x que satisfaça tal condição. **C.4** $x = -3$. **C.5** $x = 9$. **C.6** $4\sqrt{2}$.

Questões dos vestibulares

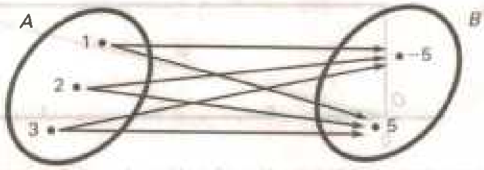
V.1 b. **V.2** b. **V.3** e. **V.4** a.

Capítulo 10

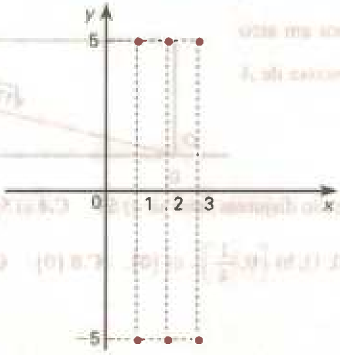
Exercícios básicos

B.1 a) I. $A \times B = \{(1, -5), (1, 5), (2, -5), (2, 5), (3, -5), (3, 5)\}$.

II.

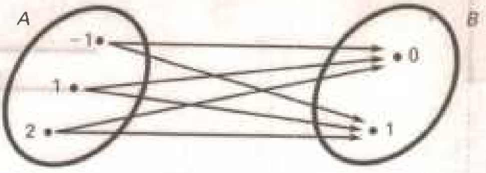


III.

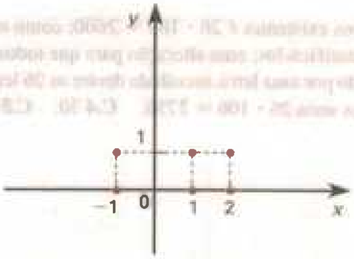


b) $B \times A = \{(-5, 1), (-5, 2), (-5, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$; c) $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ **B.2** I. $A \times B = \{(-1, 0), (-1, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$.

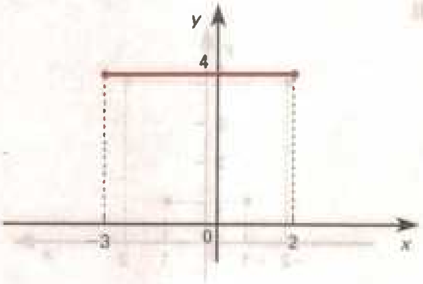
II.



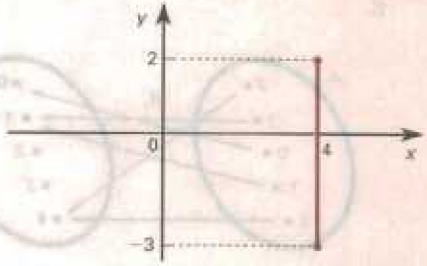
III.



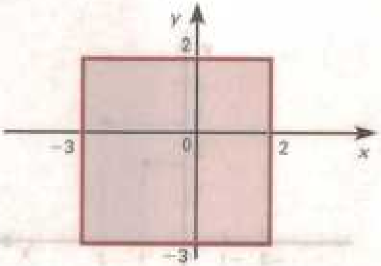
B.3 a)



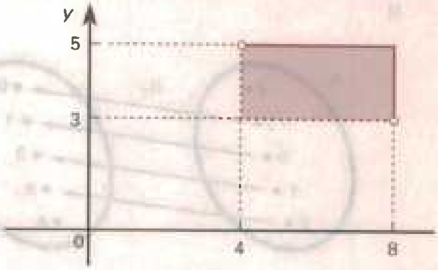
b)



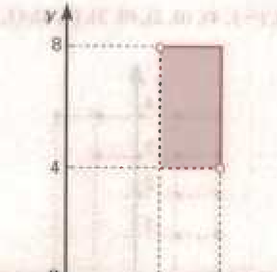
c)



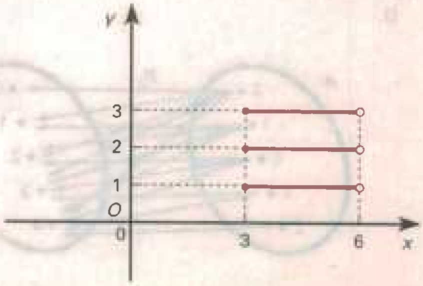
B.4 a)



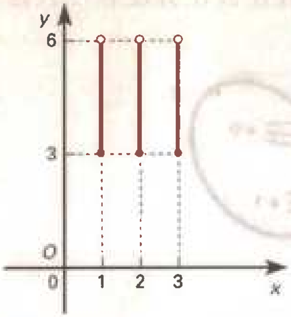
b)



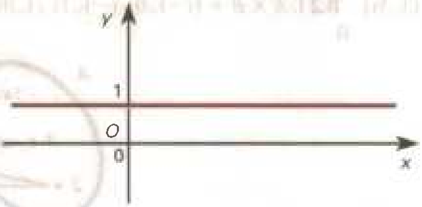
B.5 a)



b)



B.6



O gráfico é a reta paralela ao eixo *Ox* pelo ponto (0, 1).

Exercícios complementares

C.1 50. **C.2** *nk*. **C.3** O número de códigos existentes é 26 · 100 = 2600; como a empresa possui agora 2750 funcionários, o número de códigos não é suficiente para identificá-los; uma alteração para que todos os trabalhadores fossem identificados seria estabelecer-se que cada código fosse formado por uma letra, escolhida dentre as 26 letras do alfabeto, seguida de um número natural de 1 até 106; assim, o número de códigos seria 26 · 106 = 2756. **C.4** 30. **C.5** 25. **C.6** c. **C.7** b.

Questões dos vestibulares

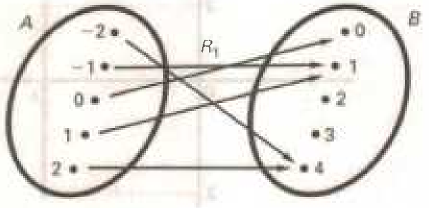
V.1 b. **V.2** b. **V.3** d.

Capítulo 11

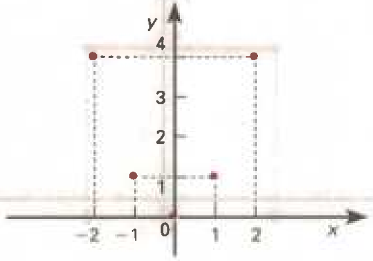
Exercícios básicos

B.1 a) I. $R_1 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$.

II.

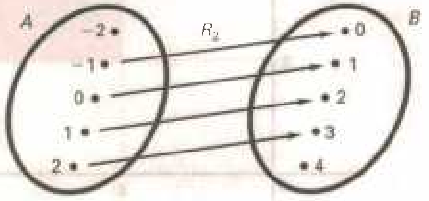


III.

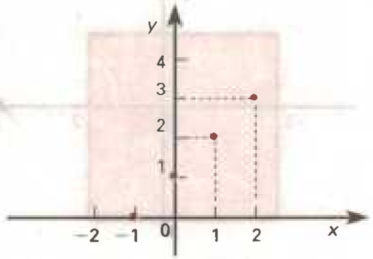


b) I. $R_2 = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.

II.



III.



c) I. $R_3 = \{(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-2, 4), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-1, 4), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$.

II.